

DISEÑO DE MAQUINAS

TEORIA y
320 problemas
resueltos

A. S. HALL
A. R. HOLOWENCO
H. G. LAUGHLIN

1680-

SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM

TEORIA Y PROBLEMAS

DE

DISEÑO DE MAQUINAS

ALLEN S. HALL, JR., M. S. M. E., Ph. D.

Profesor de Ingeniería Mecánica, Universidad de Purdue

ALFRED R. HOLOWENKO, M. S.

Profesor de Ingeniería Mecánica, Universidad de Purdue

HERMAN G. LAUGHLIN, M. S. M. E.

Profesor Asociado de Ingeniería Mecánica, Universidad de Purdue



TRADUCCION Y ADAPTACION:

DIEGO LOPEZ ARANGO, I. C., M. S. M. E.

Profesor Asociado de Ingeniería Mecánica, Universidad Nacional de Colombia

y

GUILLERMO SANCHEZ BOLIVAR

Ingeniero Mecánico



LIBROS MCGRAW-HILL

MEXICO PANAMA SAO PAULO NUEVA YORK

LONDRES TORONTO SIDNEY JOHANNESBURG

DUSSELDORF SINGAPUR

Copyright © 1971 por libros McGraw-Hill de México, S. A. de C. V.

Todos los Derechos Reservados. Impreso en Colombia.
Queda terminantemente prohibido reproducir este libro
total o parcialmente sin permiso expreso de los editores.

91582

Traducido de la primera edición del original publicado en inglés
Copyright © 1970 por McGRAW-HILL BOOK COMPANY, INC. USA.
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - C C - 71 - 0 9 8 7 6 5 4 3 2 1

IMPRESO EN COLOMBIA
PRINTED IN COLOMBIA



Prólogo

Este libro se ha preparado con el propósito de completar los textos corrientes de diseño de máquinas. Estamos convencidos de que la presentación de un gran número de problemas resueltos es la mejor forma de aclarar y fijar en la mente los principios básicos. Por otra parte, la presentación de los principios y de la teoría es suficientemente completa para que el libro se pueda usar como texto, con una programación adecuada del tiempo de clase.

Cada capítulo comienza con una exposición de las definiciones, principios y teoremas correspondientes, acompañada del material ilustrativo y descriptivo necesario. Se continúa con grupos de problemas resueltos y de problemas propuestos. Los primeros sirven para ilustrar y ampliar la teoría y enfocan cuidadosamente aquellos puntos sin los cuales el estudiante se siente inseguro. En los problemas resueltos se incluye un gran número de pruebas de teoremas y deducciones de fórmulas. Los problemas adicionales sirven para repasar el material del capítulo.

Los temas de los capítulos corresponden al material que se ve en un curso corriente de diseño de máquinas. Son temas representativos e ilustran la forma general de llegar a la solución de los problemas de diseño. En los casos en que existe más de un procedimiento aceptado para resolver un problema, los autores han adoptado el que creen mejor, y a veces presentan procedimientos alternos; en unas pocas situaciones hay alguna novedad en el tratamiento. Como resultado de lo anterior, aun cuando este libro no se acopla exactamente a ningún otro texto, los autores creen que puede ser un valioso auxiliar para cualquiera.

Algunas de las características de este libro son las siguientes: Contiene una gran variedad de problemas de repaso de mecánica aplicada. Los problemas resueltos se usan para repasar la resistencia de materiales y para mostrar la aplicación de muchos cursos anteriores a las situaciones reales de diseño. Se introducen la función escalón y el teorema de Castigliano como herramientas para determinar deformaciones en miembros de máquinas. Se presenta una introducción al estudio de las vibraciones. Se incluyen las últimas técnicas para resolver problemas de lubricación, tal como han sido desarrolladas por Boyd y Raimondi. Se dan extractos de las últimas normas AFBMA con el propósito de evaluar las capacidades de carga estática y dinámica de cojinetes radiales de bolas. Las fuerzas en los engranajes se estudian con mucho más detalle que en los textos corrientes. Se presenta un tratamiento cuidadoso de velocidades críticas en ejes. Se hace un tratamiento exhaustivo para determinar tanto la rigidez como la resistencia de los miembros de las máquinas. Se presentan 36 proyectos de diseño, que incluyen control de flujo, control eléctrico automático, control de calidad y problemas de diseño creativo.

Se ha tenido en cuenta que la capacidad para proyectar descansa sobre muchos factores adicionales al entrenamiento científico, tales como el ingenio, el juicio, la familiaridad con los datos empíricos, el conocimiento de las normas y de los códigos de diseño, para nombrar sólo unos pocos de ellos. Muchos de estos factores sólo pueden desarrollarse completamente mediante cierto número de años de experiencia real en la industria. Sin embargo, al estudiante se le puede suministrar lo básico, es decir, un buen adiestramiento en la aplicación lógica de la teoría al diseño de elementos de máquinas, adicionado de alguna sensibilidad para las aproximaciones e hipótesis complementarias. Este libro se encamina hacia este fin.

Los autores están profundamente agradecidos con muchas personas. Se han estudiado y comparado varios textos de diseño de máquinas, resistencia de materiales y dinámica de máquinas, y todos ellos han contribuido al modo de pensar de los autores. Algunos miembros del grupo de diseño de máquinas de la Universidad de Purdue han prestado su colaboración para profundizar y refinar el tratamiento de varios temas. Los autores les están ampliamente agradecidos por sus sugerencias y sus críticas constructivas.

Tenemos especiales motivos de agradecimiento con E. S. Ault, profesor de diseño de máquinas en la Universidad de Purdue: además del estímulo general que de él recibimos, le somos deudores por el procedimiento presentado en los capítulos sobre engranajes de dientes para el manejo de la fórmula de Lewis en los cálculos de diseño.

También queremos hacer llegar nuestros agradecimientos al señor Henry Hayden por el esquema tipográfico y el trabajo artístico de las figuras. El realismo de estas figuras realza notablemente la eficacia de la presentación de un asunto en el cual la visualización especial representa papel importantísimo.

Deseamos además agradecer a quienes permitieron la publicación del material actualmente impreso: Lincoln Electric Company, Anti-Friction Bearing Manufacturers Association, y los señores A. A. Raimondi y John Boyd de Westinghouse Electric Company.

A. S. Hall, Jr.
A. R. Holowenko
H. G. Laughlin

TABLA DE MATERIAS

CAPITULO	PAGINA
1. Introducción	1
2. Esfuerzos en elementos sencillos de máquinas	6
3. Ajustes y tolerancias	18
4. Vigas curvas	26
5. Deformación y pandeo de elementos de máquinas	37
6. Diseño de elementos de máquinas sometidas a la acción de cargas variables	72
7. Vibraciones en máquinas	89
8. Velocidad crítica de ejes	101
9. Trasmisión de potencia mediante ejes	113
10. Diseño de acoplamientos	131
11. Cuñas, pasadores y estrías	138
12. Tornillos de potencia y sujetadores roscados	145
13. Pernos	156
14. Embragues	165
15. Diseño de frenos	178
16. Resortes	190
17. Fuerzas en los engranajes	205
18. Engranajes rectos (cilíndricos)	222
19. Engranajes helicoidales	234
20. Engranajes cónicos	241
21. Engranaje con tornillo sin fin	249
22. Cojinetes de rodamientos	255
23. Lubricación y diseño de cojinetes	276
24. Trasmisión por correas	290
25. Soldadura	301
26. Volantes	313
27. Proyectos	322
Indice	337

Capítulo 1

Introducción

EL DISEÑO EN INGENIERIA es la creación de los planos necesarios para que las máquinas, las estructuras, los sistemas o los procesos desarrollen las funciones deseadas.

EL PROCESO DE DISEÑO incluye lo siguiente.

- (1) Reconocer una **necesidad** y establecerla en términos generales. Esto define el **problema**.
- (2) Considerar varios esquemas para resolver el problema y seleccionar uno para investigarlo con mayor cuidado. Los **estudios de factibilidad** respaldados por **investigación especial**, según sea el caso, son características de este paso del proceso.
- (3) Realizar un **diseño preliminar** de la máquina, estructura, sistema o proceso seleccionado. Esto establece características globales amplias y permite escribir las **especificaciones** para las componentes principales.
- (4) Realizar el diseño de todas las componentes y preparar todos los dibujos necesarios y las especificaciones detalladas.

El proyectista es ante todo un **creador**. Antes de diseñar, su ingenio y capacidad imaginativa deberán estar en condiciones óptimas.

Los dibujos y las especificaciones detalladas para un diseño completo son el registro de una multitud de decisiones, algunas de ellas grandes y otras pequeñas. El proyectista, en los pasos finales del proceso de diseño es básicamente un **tomador de decisiones**. Debe trabajar sobre una base sólida de principios científicos, suplementados con información empírica. Sin embargo, debe entender que la ciencia sólo puede establecer límites dentro de los cuales debe tomarse una decisión, o dar una imagen estadística de los efectos de una decisión particular. La decisión misma la toma el proyectista. Por tanto, el **juicio** al tomar las decisiones es una de las características sobresalientes de un buen proyectista.

EL DISEÑO DE UNA MAQUINA debe seguir un plan semejante al que se muestra en la figura adjacente.

Después de haber establecido las especificaciones generales, debe fijarse una disposición cinemática, o **esqueleto**, de la máquina. A continuación debe hacerse un análisis de fuerzas (incompleto debido a que las masas de las partes móviles no se conocen aún en los diseños en los cuales la dinámica es importante). Con esta información pueden diseñarse las componentes (tentativamente ya que las fuerzas no se conocen con exactitud). Posteriormente puede hacerse un análisis de fuerzas más exacto y un diseño más

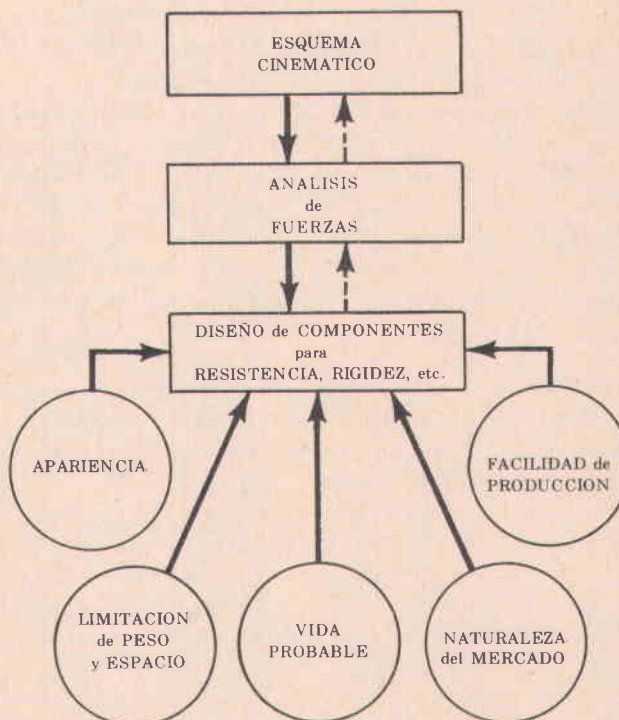


Fig. 1-1

refinado. Las decisiones finales se ven afectadas por muchos factores diferentes a la resistencia y a la rigidez, tales como la apariencia, el peso, las limitaciones de espacio, la disponibilidad de materiales y técnicas de fabricación, etc.

Aun cuando ésta es una simplificación extrema del problema, es, sin embargo, un esquema útil para fijarlo en la mente. Ninguno de los pasos mencionados es independiente de los demás. Existe una retroalimentación continua como lo sugieren las líneas a trazos en el diagrama. Por ejemplo, un análisis dinámico posterior al primer diseño tentativo de las partes puede mostrar efectos de inercia indeseables, los cuales dictaminan un cambio en el esquema cinemático de la máquina.

LAS CIENCIAS QUE SIRVEN DE FUNDAMENTO AL DISEÑO DE MAQUINAS son la Matemática y la Física, con énfasis en la cinemática, la estática, la dinámica y la resistencia de materiales. Sin embargo, sería difícil escoger alguno de los cursos técnicos o científicos de un programa de estudios en ingeniería que no prestara una colaboración importante al proyectista. Entre los cursos de importancia se destacan el Dibujo, la Economía, la Metalurgia, la Termodinámica y la Trasmisión de calor, la Mecánica de fluidos y la Teoría sobre circuitos eléctricos. El estudiante que comienza el estudio del Diseño de máquinas debe tener preparación adecuada en dichas áreas.

La siguiente lista de preguntas y problemas de repaso, principalmente de Mecánica, le permitirá al lector examinarse parcialmente en esta materia básica. Sin consulta de textos de referencia debe resolver el 90% del cuestionario correctamente. De otro modo, es conveniente que repase la Mecánica.

EXAMEN DE REPASO DE MECANICA

(Tiempo razonable de trabajo, 3 horas. Las respuestas aparecen al final del capítulo.)

Usar esquemas libremente. Dar las respuestas en las unidades correctas.

1. ¿Qué potencia (kw) se requiere para mover un automóvil sobre una carretera plana a 96 km/h contra una fuerza horizontal resistente de 225 kg, si la eficiencia global mecánica es de 85%?
2. Un tornillo de potencia se hace girar a un número constante de rpm mediante la aplicación de un momento constante de 173 kg-cm. ¿Cuál es el trabajo (kg-cm) gastado por revolución?
3. Una polea de 25 cm de diámetro está montada en el punto medio de un eje soportado por dos cojinetes separados 75 cm. La polea es conducida mediante una correa en la cual ambos extremos tiran hacia arriba verticalmente. Si la tensión en el lado tenso de la correa es de 272 kg y en el lado flojo de 90 kg, ¿cuál es el momento máximo de flexión y el momento máximo de torsión sabiendo que la potencia se toma de un extremo del eje mediante un acoplamiento flexible?
4. Una cuerda está envuelta sobre una polea libre. En un extremo de la cuerda hay un peso de 92 kg y en el otro uno de 23 kg. Determinar la tensión en la cuerda despreciando el rozamiento y la masa de la polea.
5. Un marco rígido se encuentra sobre un plano sin rozamiento. El marco está formado por tres miembros rectos unidos por articulaciones en forma de A y está cargado con una fuerza F aplicada sobre la articulación del vértice y dirigida verticalmente hacia abajo. Dibujar, para cada miembro, el diagrama de cuerpo libre que muestre todas las fuerzas que actúan sobre él con sus localizaciones y con los sentidos correspondientes.
6. (a) ¿Cuál es la definición matemática del momento de inercia de un área?
 (b) Demostrar, por medio de cálculo, que el momento rectangular de inercia de una sección rectangular es $bd^3/12$ con respecto al eje centroidal paralelo a la base.
 (c) Demostrar que el módulo de la sección en (b) es $bd^2/6$.
 (d) Con base en que el momento rectangular de inercia de una sección circular con respecto a uno de sus diámetros es $\pi d^4/64$, determinar el momento rectangular de inercia de un eje hueco cuyo diámetro exterior es 10 cm y cuyo diámetro interior es 2,5 cm.
 (e) Demostrar en qué forma podría determinarse el momento rectangular de inercia de un área muy irregular con un alto grado de precisión.

7. El rotor de un motor eléctrico pesa 4,5 kg y tiene un diámetro de 10 cm. ¿Cuánto tiempo se requiere para incrementar la velocidad del motor de 0 a 1800 rpm suponiendo un momento eléctrico constante de 23 kg-cm y una carga externa nula durante este período? Suponer que el rotor es un cilindro homogéneo.
8. Definir el momento de flexión. ¿Qué convención arbitraria se usa ordinariamente para determinar el signo de un momento de flexión? Ilustrar lo anterior mediante diagramas de cuerpo libre consistentes de secciones cortas tomadas de los extremos de una viga simplemente apoyada, cargada de modo que exista un momento positivo de flexión en la vecindad del extremo izquierdo y uno negativo en la vecindad del extremo derecho.
9. Si la deformación en un resorte sometido a una carga de 227 kg es 5 cm, ¿cuál es la energía absorbida por el resorte al aplicar gradualmente esta carga?
10. Definir un kilovatio (y un hp) y mostrar que la cantidad de kilovatios (y caballos) puede expresarse mediante:

$$kw = \frac{F(kg) \times V(m/seg)}{102}$$

$$kw = \frac{T(kg-m) \times N(rpm)}{974}$$

$$hp = \frac{F(lb) \times V(pie/min)}{33.000}$$

$$hp = \frac{T(lb-pul) \times N(rpm)}{63.000}$$

11. Ilustrar gráficamente la distribución de esfuerzos sobre la sección transversal perpendicular al eje de una viga para los siguientes casos.
 - (a) Esfuerzo de flexión, M/I , en una viga simple que es (1) simétrica con respecto al eje neutro de la sección transversal, y (2) asimétrica con respecto a dicho eje.
 - (b) Esfuerzo de tensión o de compresión, P/A , debido a una carga axial en un miembro con cualquier sección transversal.
 - (c) Esfuerzo de torsión, T/J , debido a un momento de torsión aplicado sobre un miembro de sección transversal circular.
 - (d) Esfuerzo cortante, VQ/Ib , en una viga simple de (1) sección transversal rectangular, (2) sección transversal circular, y (3) una sección en I simétrica.
12. (a) Si un miembro de una máquina está cargado de modo que los esfuerzos principales en un punto son 42 kg/cm² en tracción, 56 kg/cm² en tracción, y cero, ¿cuál es el esfuerzo cortante máximo en dicho punto?
 (b) El mismo enunciado pero con 42 kg/cm² en compresión, 56 kg/cm² en tracción y cero.
13. (a) Si un hombre amarra un extremo de una cuerda a un árbol y tira del otro extremo con una fuerza de 45 kg, ¿cuál es la fuerza de tensión que se produce en la cuerda?
 (b) ¿Qué tensión existiría en la cuerda si un hombre tira de cada uno de sus extremos con una fuerza de 45 kg?
14. Un camión cuyas llantas tienen un diámetro exterior de 3 pies, se mueve a 60 pies/seg. ¿Cuál es la velocidad relativa al suelo del punto sobre el borde externo de la llanta que en el instante considerado se halla más alejado del suelo? ¿Cuál es la velocidad angular (rpm) de las ruedas en estas condiciones? ¿Cuál es la aceleración del punto sobre la llanta en contacto con el suelo?
15. Un engranaje cónico cuyo diámetro medio es de 18 cm está montado sobre el extremo saliente de un eje a 36 cm del cojinete más cercano. La carga sobre el engranaje tiene las siguientes componentes: tangencial, $F_t = 545$ kg; radial, $F_r = 320$ kg; axial, $F_a = 225$ kg.
 - (a) Calcular el momento de torsión en el eje, debido a cada una de las fuerzas.
 - (b) Calcular el momento de flexión en el eje en el cojinete más cercano, debido a cada fuerza.
 - (c) Calcular el momento de flexión resultante en el cojinete más cercano.
16. Un reductor de velocidad con una relación de 10 a 1 sometido a una prueba con 1000 rpm a la entrada y un momento de salida de 58 kg-cm requiere un momento de entrada de 7 kg-cm. ¿Cuál es su eficiencia?

17. Un transportador de banda cuyo movimiento es horizontal recibe arena que le cae de una tolva. Si el transportador se mueve a 600 m/min y la rata de alimentación de la arena es de 6800 kg/min, ¿cuál es la fuerza necesaria para operar el transportador? Despreciar el rozamiento en el mecanismo de operación del transportador.
18. Una viga de acero simplemente apoyada se carga con una fuerza de 90 kg en el punto *A* y sufre una deformación de 1 cm en el punto *B*. ¿Qué fuerza colocada en *B* produciría una deformación de 0,25 cm en *A*?
19. Un planeta en un sistema de engranajes planetarios se mueve de modo que la velocidad del centro es 1200 cm/seg y la velocidad angular es 20 rad/seg. ¿Cuál es su energía cinética? Considerar el engranaje como un cilindro sólido de 4,5 kg de peso y 15 cm de diámetro.
20. La ecuación diferencial de movimiento de un sistema amortiguado del tipo masa-resorte y un grado de libertad es $8\ddot{x} + 5\dot{x} + 12x = 0$. ¿Cuál es la frecuencia natural de las vibraciones? (Las unidades usadas son libras, pulgadas y segundos.)
21. Una varilla de conexión se mueve en forma tal que la aceleración de uno de sus extremos relativa al otro es 6000 cm/seg² formando un ángulo de 30° con respecto a la línea que une los dos puntos, los cuales tienen una separación de 20 cm. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad angular y de la aceleración angular?
22. Un cable de acero está enrollado dos veces alrededor de un poste. Una fuerza *P* se aplica a un extremo del cable y una fuerza de 1350 kg se aplica al otro extremo. Para un coeficiente de rozamiento de 0,15 determinar (a) la fuerza *P* necesaria para que el cable se mueva en el sentido de *P*, (b) la fuerza *P'* necesaria para prevenir el movimiento del cable en el sentido de la fuerza de 1350 kg.
23. Un bloque cuyo peso es de 45 kg descansa sobre una superficie horizontal. Si el coeficiente de rozamiento es 0,3 (estático y cinético), ¿cuál es la fuerza de rozamiento que se desarrolla al aplicar al bloque fuerzas de (a) 4,5 kg, (b) 9 kg, (c) 13,5 kg, (d) 18 kg en una dirección paralela a la superficie horizontal?
24. La barra rígida de acero que muestra la figura 1-2 tiene 20 pul de largo, 1 pul de ancho, y 1 pul de espesor. La barra está en reposo sobre una superficie lisa y repentinamente se le aplica una fuerza *P* = 200 lb. Determinar (a) la magnitud del momento máximo de flexión, (b) el esfuerzo máximo de flexión.
25. Un momento eléctrico constante se aplica al rotor del motor (Fig. 1-3) el cual tiene un momento de inercia I_M . El piñón conduce dos engranajes, uno de los cuales está conectado a una masa que tiene un momento de inercia = I_M y el otro está conectado a una masa que tiene un momento de inercia = $2I_M$. La relación de engranaje $R_1 = D_3/D_2$ es fija e igual a 3. ¿Cuál debería ser la relación $R_2 = D_4/D_2$ para obtener la aceleración angular máxima del engranaje 4? Despreciar la masa de los engranajes.
26. La barra de acero mostrada en la figura 1-4 tiene 30 pul de largo, 1 pul de ancho, y 1 pul de espesor. La barra está en reposo sobre una superficie horizontal lisa. Dos fuerzas iguales y opuestas de 200 lb cada una se aplican repentinamente. Considerando la barra como rígida, determinar (a) el momento máximo de flexión, (b) el esfuerzo máximo de flexión.

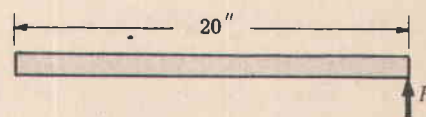


Fig. 1-2

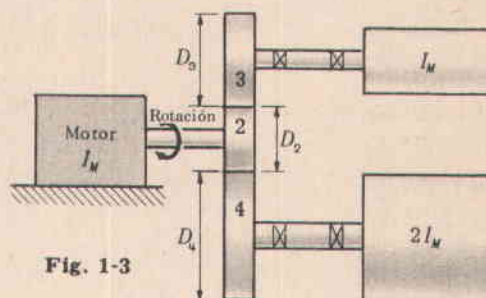


Fig. 1-3

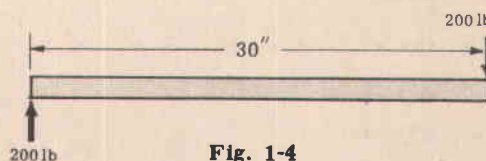


Fig. 1-4

LA CAPACIDAD AL APLICAR LOS PRINCIPIOS DE LA MECANICA al análisis racional y al diseño de componentes de máquinas, como en cualquier otra actividad, se desarrolla por medio de la práctica. Los siguientes capítulos están concebidos para suministrar dicha práctica por medio de los problemas.

Se sugiere enfáticamente que el estudiante use el siguiente plan de estudio para cada capítulo:

- (1) Leer la exposición de la teoría y los principios fundamentales.
- (2) Seguir cuidadosamente los problemas resueltos. Usar lápiz y papel. Desarrollar todos los detalles por sí mismo siguiendo las guías dadas. (Algunos de los problemas resueltos están ampliamente detallados. En otros se han omitido algunos pasos.)
- (3) Resolver los problemas propuestos. Después de leer el enunciado de un problema preguntarse cuáles principios van a aplicarse. Tomar de referencia un problema similar resuelto, solamente si esto se hace absolutamente indispensable.

Conservar el trabajo personal en buena forma para usarlo como referencia en el futuro. Al estudiar los últimos capítulos puede encontrarse ayuda en el trabajo realizado previamente.

- (4) Repasar la teoría enunciada hasta que se haya fijado en la mente.

Respuestas a las preguntas de repaso — Capítulo 1

- | | |
|---|--|
| 1. 69,2 kw | 15. (a) Momento de torsión debido a 545 kg
= 4905 kg-cm, a 320 kg y 225 kg = 0. |
| 2. 1087 kg-cm | (b) Momento de flexión debido a 545 kg
= 19.620 kg-cm, a 320 kg = 11.520
kg-cm, a 225 kg = 2025 kg-cm. |
| 3. $M_b = 6788 \text{ kg-cm}$, $T = 2275 \text{ kg-cm}$ | (c) 21.800 kg-cm. |
| 4. 36,8 kg | 16. 82,9% |
| 5. Los lados son miembros sometidos a tres
fuerzas. | 17. 115 kg |
| 6. Consultar cualquier texto corriente de Me-
cánica. | 18. 22,5 kg |
| 7. 0,47 segundos | 19. 3310 kg-cm |
| 8. Consultar cualquier texto corriente de Me-
cánica. | 20. 1,225 rad/seg |
| 9. 567,5 kg-cm | 21. 16,15 rad/seg, 150 rad/seg ² |
| 10. $\text{kw} = \frac{2\pi TN}{(60) \times 102} = \frac{TN}{974}$ | 22. $P = 8897 \text{ kg}$, $P' = 205 \text{ kg}$ |
| 11. Consultar cualquier texto corriente de Me-
cánica de materiales. | 23. (a) 4,5 kg, (b) 9 kg, (c) 13,5 kg,
(d) 13,5 kg |
| 12. (a) 28 kg/cm ² , (b) 49 kg/cm ² | 24. 592 lb-pul, 3550 psi |
| 13. (a) 45 kg, (b) 45 kg | 25. $R_2 = \sqrt{1,8} = 1,34$ |
| 14. 382 rpm, 2400 pies/seg ² | 26. 575 lb-pul, 3450 psi |

Capítulo 2

Esfuerzos en elementos sencillos de máquinas

EL DISEÑO DE MAQUINAS envuelve, entre otras consideraciones, el dimensionamiento apropiado de un elemento de una máquina para que soporte con seguridad el esfuerzo máximo que se produce en su interior cuando está sometido a alguna combinación de cargas de flexión, torsión, axiales o transversales. En general, los materiales dúctiles, tales como los aceros blandos, son débiles al esfuerzo cortante y se diseñan con base en el esfuerzo cortante máximo; por otra parte, los materiales frágiles, tales como el hierro fundido y ciertos aceros duros, se diseñan normalmente con base en el esfuerzo normal máximo tanto en tracción como en compresión.

LOS ESFUERZOS NORMALES MAXIMO Y MINIMO, $s_n(\max)$ o $s_n(\min)$, los cuales son esfuerzos de tracción o compresión, pueden determinarse para el caso general de una carga bidimensional sobre una partícula por

$$(1) \quad s_n(\max) = \frac{s_x + s_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$(2) \quad s_n(\min) = \frac{s_x + s_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{s_x - s_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) dan los valores máximo y mínimo, donde

s_x es un esfuerzo de tracción o compresión en un punto crítico perpendicular a la sección transversal considerada, y puede tener su origen en cargas axiales o de flexión, o en combinaciones de ambas. Cuando s_x es tracción debe estar precedido de un signo más (+), y cuando es compresión de un signo menos (—).

s_y es un esfuerzo crítico en el mismo punto y en una dirección perpendicular al esfuerzo s_x . De nuevo, este esfuerzo debe estar precedido del signo algebraico apropiado.

τ_{xy} es el **esfuerzo cortante** en el mismo punto crítico actuando en el plano normal al eje y (plano xz) y en el plano normal al eje x . Este esfuerzo cortante puede tener su origen en un momento de torsión, en una carga transversal, o en una combinación de ambos. La forma en la cual se orientan estos esfuerzos entre sí, se muestra en la figura 2-1.

$s_n(\max)$ y $s_n(\min)$ se llaman **esfuerzos principales** y se presentan sobre planos que forman 90° entre sí, llamados **planos principales**. Estos también son planos de esfuerzo cortante nulo. Para carga bidimensional, el tercer esfuerzo principal es cero. La forma de orientación de los esfuerzos principales, entre sí, se muestra en la figura 2-2.

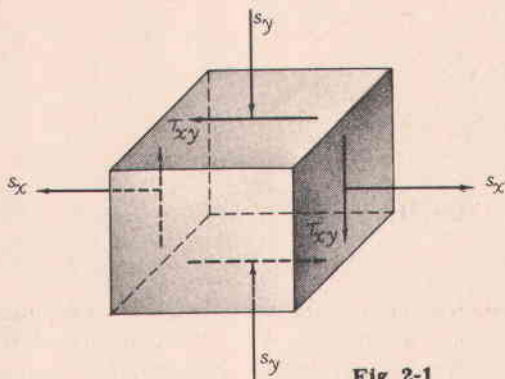


Fig. 2-1

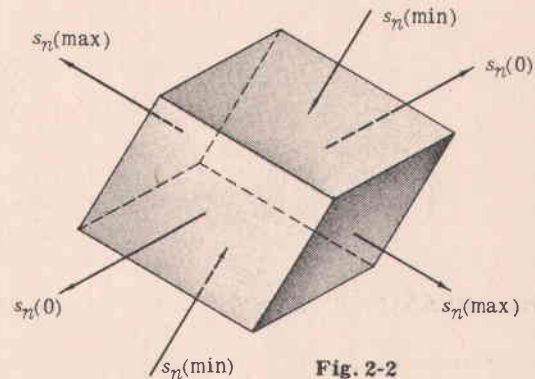


Fig. 2-2

EL ESFUERZO CORTANTE MAXIMO, $\tau(\max)$, en el punto crítico considerado es igual a la mitad de la mayor diferencia entre dos cualesquiera de los tres esfuerzos principales (no debe subestimarse ninguno de los esfuerzos principales nulos). Por tanto, para el caso de carga bidimensional sobre una partícula, tal que produce esfuerzos bidimensionales,

$$\tau(\max) = \frac{s_n(\max) - s_n(\min)}{2} \quad \text{o} \quad \frac{s_n(\max) - 0}{2} \quad \text{o} \quad \frac{s_n(\min) - 0}{2}$$

de acuerdo con el mayor valor numérico que resulte. Los planos de esfuerzo cortante máximo están inclinados 45° con respecto a los ejes principales, como se muestra en la figura 2-3.

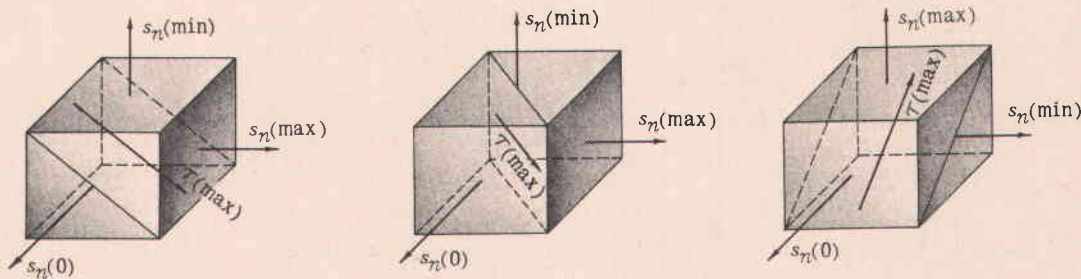


Fig. 2-3

LA APLICACION de las ecuaciones (1) y (2) requiere determinar s_x , s_y y τ_{xy} en el punto crítico del miembro de la máquina. El punto crítico es el punto en el cual las cargas aplicadas producen los efectos combinados para el esfuerzo máximo. En una viga, los siguientes esfuerzos son representativos de los que pueden ocurrir, para incluirlos en las ecuaciones (1) y (2) cuando actúan en el mismo punto.

s_x y $s_y = \pm \frac{Mc}{I} \pm \frac{P}{A}$, recordando que estos esfuerzos pueden ser más o menos, dependiendo de que sean esfuerzos de tracción o de compresión.

$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} + s_v$ para una sección transversal circular (cuando estos esfuerzos son paralelos).

M = momento de flexión, lb-pul (kg-cm)

c = distancia del eje neutro a la superficie más alejada, pul (cm)

r = radio de la sección transversal circular, pul (cm)

I = momento rectangular de inercia de la sección transversal, pul⁴ (cm⁴)

P = carga axial, (kg) libras

A = área de la sección transversal, pul² (cm²)

T = momento de torsión, lb-pul (kg-cm)

J = momento polar de inercia de la sección transversal, pul⁴ (cm⁴)

s_v = esfuerzo cortante trasversal, psi (kg/cm²).

$$s_v = \frac{VQ}{Ib} \text{ en la cual}$$

V = carga cortante transversal sobre la sección, lb (kg)

b = ancho de la sección que contiene el punto crítico, pul (cm)

Q = momento del área de la sección transversal del elemento, por encima o por debajo del punto crítico, con respecto al eje neutro, pul³ (cm³).

$$s_v(\max) = \frac{4V}{3A} \text{ para una sección transversal circular, y se presenta en el eje neutro.}$$

$$s_v(\max) = \frac{3V}{2A} \text{ para una sección transversal rectangular, y se presenta en el eje neutro.}$$

$$s_n(\max) = \text{el esfuerzo algebraico máximo, psi (kg/cm}^2\text{).}$$

$$s_n(\min) = \text{el esfuerzo algebraico mínimo, psi (kg/cm}^2\text{).}$$

$$\tau(\max) = \text{el esfuerzo cortante máximo, psi (kg/cm}^2\text{).}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un elemento hipotético de una máquina tiene 2" de diámetro por 10" de largo y está soportado como voladizo en uno de sus extremos. Este elemento se usará para demostrar cómo se determinan numéricamente los esfuerzos de tracción, compresión y corte para varias formas de carga uniaxial. Notar que en este ejemplo $s_y = 0$ para todas las disposiciones de la carga, en los puntos críticos.

(a) Carga axial aislada.

En este caso todos los puntos del elemento están sometidos al mismo esfuerzo.

$$A = \pi \text{ pul}^2$$

$$s_x = + \frac{P}{A} = + \frac{3000}{\pi} = +954 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$$s_n(\max) = s_x = +954 \text{ psi (tracción)}$$

$$\tau(\max) = \frac{1}{2}(954) = 477 \text{ psi (cortante)}$$

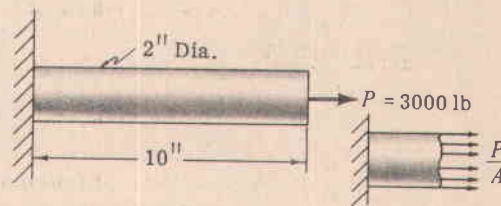


Fig. 2-4

(b) Flexión aislada.

Los puntos A y B son críticos.

$\tau_{xy} = 0$ en los puntos A y B (esfuerzo cortante transversal nulo).

$$s_x = + \frac{Mc}{I} = + \frac{(600)(10)(1)(64)}{\pi 2^4} = +7650 \text{ punto A}$$

$$s_x = - \frac{Mc}{I} = -7650 \text{ psi en el punto B}$$

$$s_n(\max) = +7650 \text{ psi (tracción en A)}$$

$$s_n(\min) = 0 \text{ en el punto A}$$

$$s_n(\max) = 0 \text{ en el punto B}$$

$$s_n(\min) = -7650 \text{ psi (compresión en B)}$$

$$\tau(\max) = \frac{1}{2}(7650)$$

$$= 3825 \text{ psi (cortante en los puntos A y B)}$$

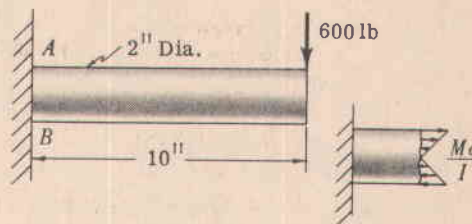


Fig. 2-5

(c) **Torsión aislada.**

En este caso los puntos críticos se presentan a todo lo largo de la superficie exterior del elemento.

$$s_x = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{(2000)(1)(32)}{\pi 2^4} = 1272 \text{ psi}$$

$$s_n(\text{max}) = +1272 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_n(\text{min}) = -1272 \text{ psi (compresión)}$$

$$\tau(\text{max}) = 1272 \text{ psi (cortante)}$$

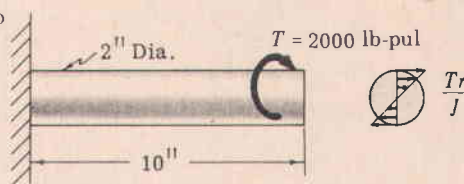


Fig. 2-6

(d) **Flexión y torsión.**

Los puntos A y B son críticos.

$$s_x = +Mc/I = +7650 \text{ psi en el punto A}$$

$$s_x = -7650 \text{ psi en el punto B}$$

$$\tau_{xy} = Tr/J = 1272 \text{ psi en los puntos A y B}$$

$$s_n(\text{max}) = +7650/2 + \sqrt{(7650/2)^2 + (1272)^2} = +3825 + 4030 = +7855 \text{ psi (tracción en el punto A)}$$

$$s_n(\text{min}) = +3825 - 4030 = -205 \text{ psi (compresión en el punto A)}$$

$$s_n(\text{max}) = -3825 + 4030 = +205 \text{ psi (tracción en el punto B)}$$

$$s_n(\text{min}) = -3825 - 4030 = -7855 \text{ psi (compresión en el punto B)}$$

$$\tau(\text{max}) = \frac{+7855 - (-205)}{2} = +4030 \text{ psi (cortante en el punto A)}$$

$$\tau(\text{max}) = \frac{-7855 - 205}{2} = -4030 \text{ psi (cortante en el punto B)}$$

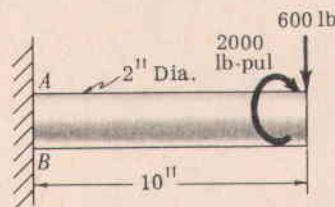


Fig. 2-7

Notar que las magnitudes de los esfuerzos en los puntos A y B son iguales. Los signos de los esfuerzos normales máximos indican tracción o compresión, mientras que los signos de los esfuerzos cortantes máximos no tienen importancia ya que el diseño se basa en la magnitud.

(e) **Flexión y carga axial.**

$$\tau_{xy} = 0 \text{ en los puntos críticos A y B.}$$

En el punto A:

$$s_x = +P/A + Mc/I = +954 + 7650 = +8604 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_n(\text{max}) = s_x = +8604 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_n(\text{min}) = 0$$

$$\tau(\text{max}) = \frac{1}{2}(8604) = 4302 \text{ psi (cortante)}$$

En el punto B:

$$s_x = +P/A - Mc/I = +954 - 7650 = -6696 \text{ psi (compresión)}$$

$$s_n(\text{max}) = 0$$

$$s_n(\text{min}) = -6696 \text{ psi (compresión)}$$

$$\tau(\text{max}) = \frac{1}{2}(6696) = 3348 \text{ psi (cortante)}$$

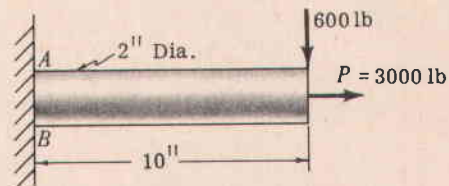


Fig. 2-8

(f) **Torsión y carga axial.**

Los puntos críticos son los de la superficie exterior del elemento.

$$s_x = +P/A = +954 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = Tr/J = 1272 \text{ psi}$$

$$s_n(\text{max}) = +954/2 + \sqrt{(954/2)^2 + (1272)^2} = +477 + 1360 = +1837 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_n(\text{min}) = +477 - 1360 = -883 \text{ psi (compresión)}$$

$$\tau(\text{max}) = 1360 \text{ psi (cortante)}$$

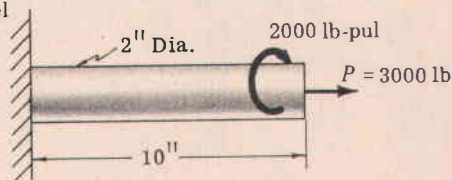


Fig. 2-9

(g) **Flexión, carga axial y torsión.**

Los esfuerzos máximos se presentan en los puntos A y B.

En el punto A:

$$s_x = +Mc/I + P/A = +7650 + 954 = +8604 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = Tr/J = 1272 \text{ psi}$$

$$s_n(\text{max}) = +8604/2 + \sqrt{(8604/2)^2 + (1272)^2} = +4302 + 4480 = +8782 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_n(\text{min}) = +4302 - 4480 = -178 \text{ psi (compresión)}$$

$$\tau(\text{max}) = 4480 \text{ psi (cortante)}$$

En el punto B:

$$s_x = -7650 + 954 = -6696 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = 1272 \text{ psi}$$

$$s_n(\text{max}) = -6696/2 + \sqrt{(6696/2)^2 + (1272)^2} = -3348 + 3581 = +233 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_n(\text{min}) = -3348 - 3581 = -6929 \text{ psi (compresión)}$$

$$\tau(\text{max}) = 3581 \text{ psi (cortante)}$$

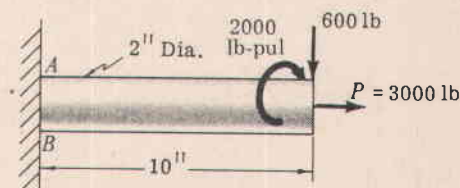


Fig. 2-10

2. Un elemento en voladizo de 4" de largo con una sección trasversal rectangular de 2" x 10" soporta una carga de 6000 lb. ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo y dónde se presenta?

Solución:

El esfuerzo cortante máximo puede presentarse en los puntos a lo largo de A-A debido al momento de flexión, o puede presentarse en los puntos a lo largo de B-B debido a la carga cortante transversal.

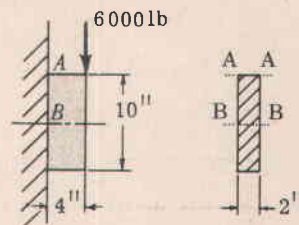


Fig. 2-11

Puntos a lo largo de A-A,

$$\tau(\text{max}) = \frac{1}{2} \frac{Mc}{I} = \frac{(6000)(4)(5)(12)}{(2)(2)(10^3)} = 360 \text{ psi (cortante)}$$

Puntos a lo largo de B-B,

$$\tau(\text{max}) = \frac{3}{2} \frac{V}{A} = \frac{(3)(6000)}{(2)(20)} = 450 \text{ psi (compresión)}$$

Por tanto, el esfuerzo cortante máximo se debe a la carga cortante transversal y se presenta a lo largo del eje neutro B-B.

3. Un punto crítico en un elemento de una máquina está sometido a un régimen biaxial de cargas que produce esfuerzos s_x , s_y y τ_{xy} como muestra la figura. Determinar los esfuerzos normales máximo y mínimo y el esfuerzo cortante máximo.

Solución:

$$s_n(\text{max}) = \frac{-400 - 1200}{2} + \sqrt{\left(\frac{-400 - (-1200)}{2}\right)^2 + (300)^2} = -300 \text{ psi (compresión)}$$

$$s_n(\text{min}) = -1300 \text{ psi (compresión)}$$

$$\tau(\text{max}) = \frac{s_n(\text{min}) - 0}{2} = -650 \text{ psi,}$$

ya que el tercer esfuerzo principal es cero.

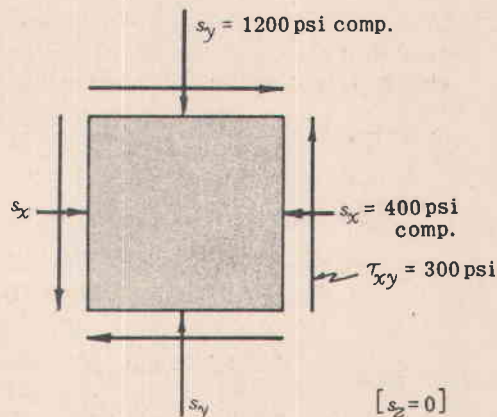


Fig. 2-12

4. Dibujar el diagrama de momentos de flexión para los elementos de máquinas que se muestran.

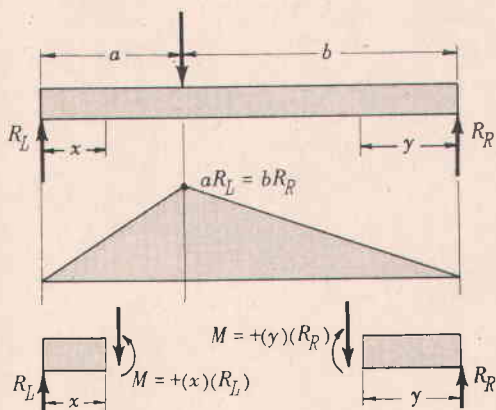


Fig. 2-13

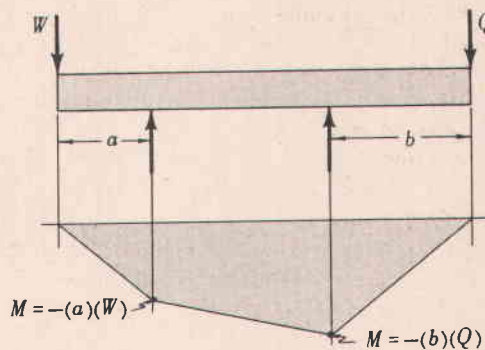


Fig. 2-14

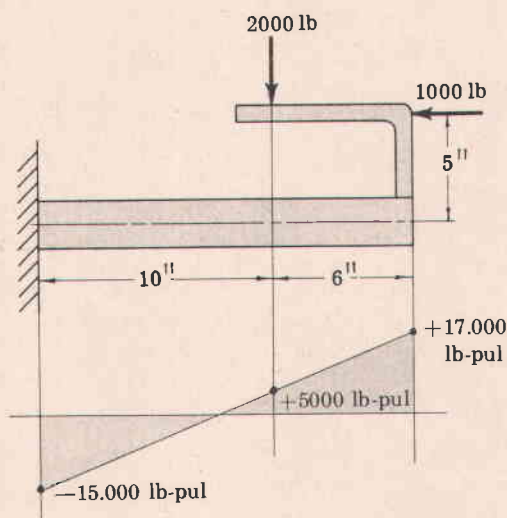


Fig. 2-15

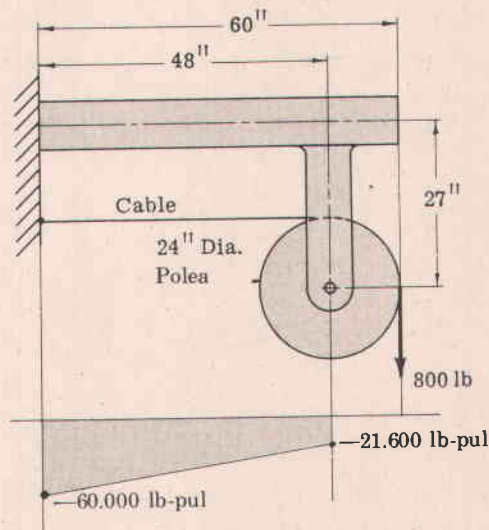


Fig. 2-16

5. Una varilla de acero de 2'' de diámetro está sometida a una carga de 2000 lb y a un momento de torsión de 1000 lb-pul, como se muestra en la figura 2-17. Determinar el esfuerzo máximo de tracción y el esfuerzo cortante máximo.

Solución: El esfuerzo crítico está en A.

$$s_y = 0$$

$$I = \pi d^4 / 64 = \pi 2^4 / 64 = 0,785 \text{ pul}^4$$

$$J = \pi d^4 / 32 = \pi 2^4 / 32 = 1,57 \text{ pul}^4$$

$$s_x = +\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = +\frac{2000}{\pi} + \frac{(2000 \times 1)(1)}{0,785} = +3180 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{(1000)(1)}{1,57} = 637 \text{ psi}$$

$$s_n(\text{max}) = +3180/2 + \sqrt{(3180/2)^2 + (637)^2} = +3305 \text{ psi (tracción)}$$

$$\tau(\text{max}) = \sqrt{(3180/2)^2 + (637)^2} = 1715 \text{ psi (cortante)}$$

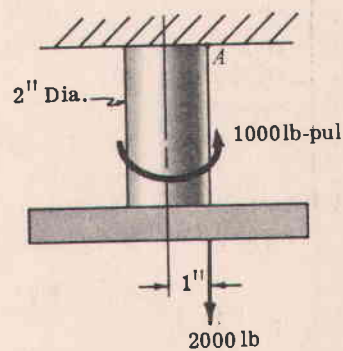


Fig. 2-17

6. Una varilla de hierro fundido de 3" de diámetro soporta una carga axial de compresión de 12.000 lb y un momento de torsión de 2500 lb-pul, como muestra la figura 2-18. Determinar los esfuerzos normales máximo y mínimo.

Solución:

$$s_y = 0$$

$$s_x = -\frac{(12.000)(4)}{\pi 3^2} = -1700 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = \frac{(2500)(1,5)(32)}{\pi 3^4} = 472 \text{ psi}$$

$$s_n(\max) = -1700/2 + \sqrt{(1700/2)^2 + (472)^2} = +122 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_n(\min) = -1822 \text{ psi (compresión)}$$

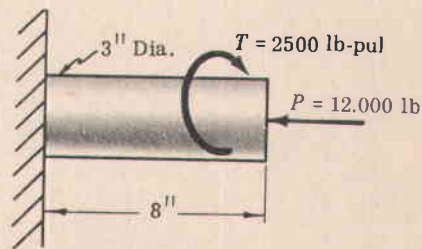


Fig. 2-18

7. Calcular el esfuerzo normal numéricamente mayor y el esfuerzo cortante máximo en la sección A-A de un elemento que se encuentra cargado, como muestra la figura 2-19.

Solución:

$$T = (200)(8) = 1600 \text{ lb-pul debido a la carga de 200 lb}$$

$$M = (500)(8) = 4000 \text{ lb-pul debido a la carga de 500 lb}$$

$$M = (200)(10) = 2000 \text{ lb-pul debido a la carga de 200 lb}$$

El momento total de flexión es el vector suma de los dos momentos de flexión.

$$M(\text{total}) = \sqrt{4000^2 + 2000^2} = 4470 \text{ lb-pul}$$

$$s_x = -\frac{P}{A} - \frac{Mc}{I} = -\frac{500}{\pi} - \frac{(4470)(1)(64)}{\pi 2^4} = -5849 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{(16)(1600)}{\pi 2^3} = 1020 \text{ psi}$$

$$s_n(\min) = -5849/2 - \sqrt{(5849/2)^2 + (1020)^2} = -6025 \text{ psi (compresión)}$$

$$\tau(\max) = \sqrt{(5849/2)^2 + (1020)^2} = 3100 \text{ psi (cortante)}$$

Observar que $s_n(\min)$ es numéricamente el mayor esfuerzo normal.

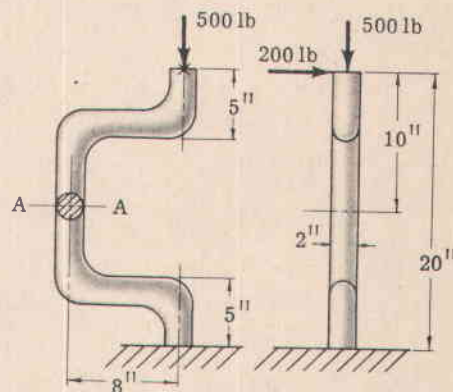


Fig. 2-19

8. Determinar el espesor que debe tener el soporte de acero en la sección A-A, cuando está cargado como muestra la figura 2-20, con el fin de limitar el esfuerzo de tracción a 10.000 psi.

Solución:

$$M = (1000)(2) = 2000 \text{ lb-pul en A-A}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{1000}{2b}$$

$$s_n(\max) = s_x = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{1000}{2b} + \frac{(2000)(1)(12)}{2^3 b} = 10.000 \text{ psi}$$

$$b = 0,35 \text{ pul espesor requerido para limitar el esfuerzo a 10.000 psi.}$$

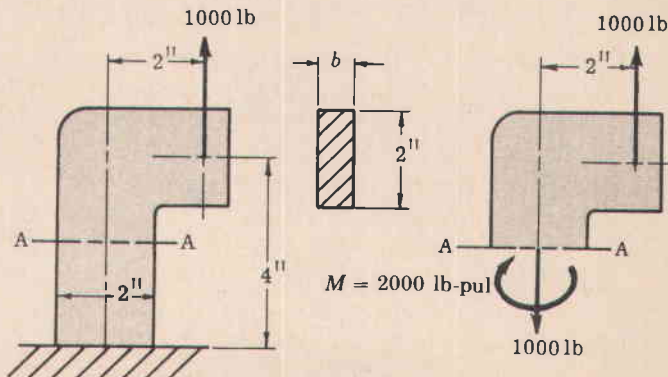


Fig. 2-20

9. La varilla lateral paralela de una locomotora pesa 60 lb por pie. La longitud OP es 15 pulgadas y el radio de la rueda motriz es 3 pies. Si la velocidad de la máquina, es 60 mi/h y la fuerza motriz por rueda es 10.000 lb, hallar el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la varilla, debidos a la inercia y a la carga axial para la posición mostrada en la figura 2-21. Tener en cuenta el peso de la varilla. La sección transversal de la varilla es $3'' \times 6''$.

Solución:

A 60 mi/h las ruedas giran a 4,67 rad/seg.

Todos los puntos sobre la varilla lateral tienen 10.000 lb una aceleración dirigida hacia abajo, a_p .

$$a_p = a_o \rightarrow a_{pO} = a_{pO}, \text{ ya que } a_o = 0.$$

$$a_{pO} = r\omega^2 = (15/12)(2\pi \times 4,67)^2 = 1080 \text{ pies/seg}^2$$

$$\text{Peso total de la varilla} = (60)(6,5) = 390 \text{ lb.}$$

$$\text{Fuerza de inercia actuando hacia arriba sobre la varilla} = (390/32,2)(1080) = 13.100 \text{ lb.}$$

$$\text{Fuerza neta hacia arriba sobre la varilla} = 13.100 - 390 = 12.710 \text{ lb.}$$

La fuerza axial F puede determinarse usando la rueda trasera y la varilla como cuerpos libres y tomando momentos alrededor del centro de la rueda, O .

$$15F = (10.000)(36), F = 24.000 \text{ lb carga axial}$$

El momento máximo de flexión para una viga simplemente apoyada sometida a una carga uniformemente repartida es $WL/8 = (12.710)(78)/8 = 124.000 \text{ lb-pul}$

$$s_x = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = \frac{24.000}{18} + \frac{(124.000)(3)(12)}{(3)(6)^3} = 8230 \text{ psi}$$

$$s_n(\text{max}) = s_x = 8230 \text{ psi (tracción)}$$

$$\tau(\text{max}) = 8230/2 = 4115 \text{ psi (cortante)}$$

10. Un soporte en Z está sostenido y cargado, como muestra la figura 2-22. Calcular el esfuerzo cortante máximo en la sección A-A y en la sección B-B.

Solución:

Usando la parte del soporte que está por encima de A-A como cuerpo libre: En el punto N , $s_y = 0$ y $\tau_{xy} = 0$.

$$s_x = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} = -\frac{10.000}{10} - \frac{(10.000)(7)(1)(12)}{(5)(2)^3} = -22.000 \text{ psi (compresión)}$$

$$\tau(\text{max}) = 22.000/2 = 11.000 \text{ psi (cortante)}$$

Usando la parte del soporte que está a la izquierda de la sección B-B como cuerpo libre: En los puntos Q y R , $s_y = 0$ y $\tau_{xy} = 0$.

$$s_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(10.000)(9)(1)(12)}{(5)(2)^3} = 27.000 \text{ psi (tracción en el punto } R \text{ y compresión en } Q)$$

$$\tau(\text{max}) = 27.000/2 = 13.500 \text{ psi (cortante en la sección B-B).}$$

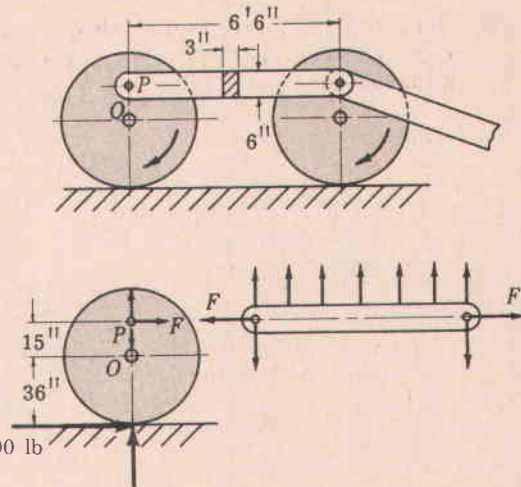


Fig. 2-21

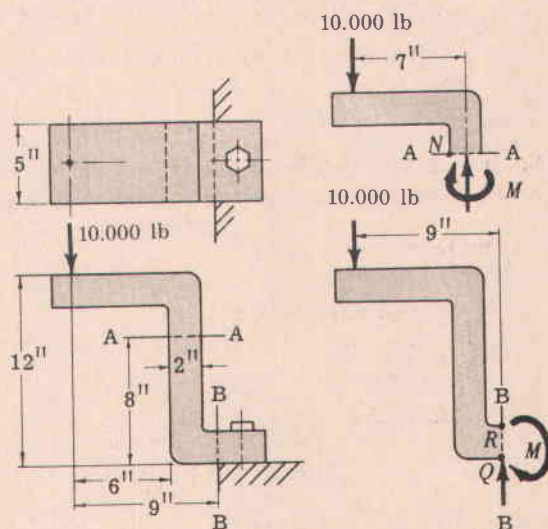


Fig. 2-22

11. Un picaporte de acero tiene $\frac{1}{4}$ " de ancho. Una fuerza P de 600 libras está distribuida uniformemente sobre él, como muestra la figura 2-23. Determinar los esfuerzos máximos de tracción, compresión y de corte en la sección A-A y en el punto B.

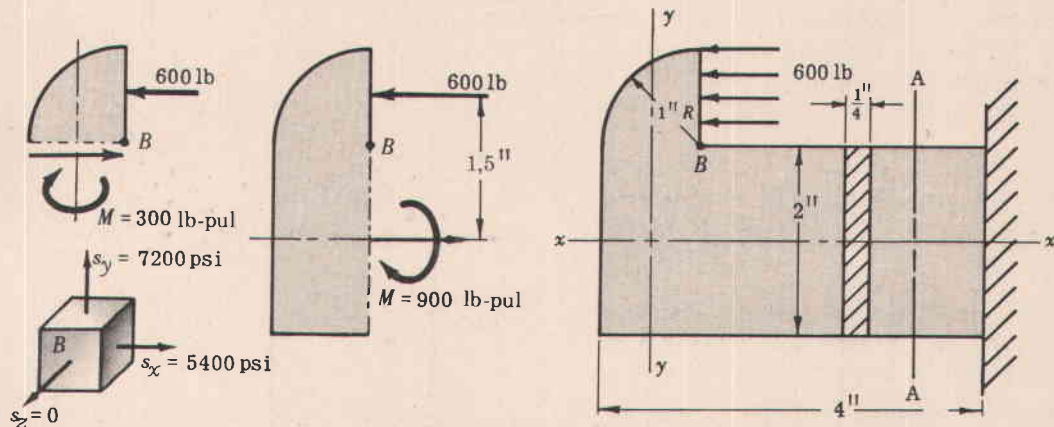


Fig. 2-23

Solución:

En la sección A-A:

El punto crítico está en las fibras superiores.

$$s_x = \frac{Mc}{I} + \frac{P}{A} = \frac{(600 \times 1.5)(1)(12)}{(0.25)(2)^3} + \frac{600}{(0.25)(2)} = 6600 \text{ psi}$$

$$s_n(\text{max}) = s_x = 6600 \text{ psi (tracción)} \\ \text{en las fibras superiores de la sección A-A.}$$

$$s_n(\text{min}) = -4200 \text{ psi (compresión)} \\ \text{en las fibras inferiores de la sección A-A.}$$

$$\tau(\text{max}) = 6600/2 = 3300 \text{ psi (cortante)} \\ \text{en las fibras superiores de A-A.}$$

En el punto B (despreciando concentración de esfuerzos):

$$s_x = \frac{Mc}{I} + \frac{P}{A} = \frac{(900)(1)(12)}{(0.25)(2)^3} + \frac{600}{(0.25)(2)} = 6600 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_y = \frac{Mc}{I} = \frac{(300)(0.5)(12)}{(0.25)(1)^3} = 7200 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_z = 0, \quad \tau_{xy} = 0$$

$$s_n(\text{max}) = \frac{6600 + 7200}{2} + \sqrt{\left(\frac{6600 - 7200}{2}\right)^2 - 0} = 7200 \text{ psi (tracción)}$$

$$s_n(\text{min}) = \frac{6600 + 7200}{2} - \sqrt{\left(\frac{6600 - 7200}{2}\right)^2 - 0} = 6600 \text{ psi (tracción)}$$

$$\tau(\text{max}) = \frac{s_n(\text{max}) - 0}{2} = 3600 \text{ psi (cortante)}$$

12. Determinar el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la sección A-A para el cigüeñal mostrado en la figura 2-24, suponiendo una carga concentrada de 2000 lb en el centro del pasador.

Solución:

Los puntos críticos están en las fibras delanteras y traseras de la sección.

$$M = (2000)(3.5) = 7000 \text{ lb-pul}$$

$$T = (2000)(5) = 10.000 \text{ lb-pul}$$

$$s_x = \frac{Mc}{I} = \frac{(7000)(1.5)(64)}{\pi(3^4)} = 2640 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = \frac{Tr}{J} = \frac{(10.000)(1.5)(32)}{\pi(3^4)} = 1885 \text{ psi}$$

$$s_n(\text{max}) = 2640/2 + \sqrt{(2640/2)^2 + (1885)^2} = 3620 \text{ psi (tracción)}$$

$$\tau(\text{max}) = \sqrt{(2640/2)^2 + (1885)^2} = 2300 \text{ psi (cortante)}$$

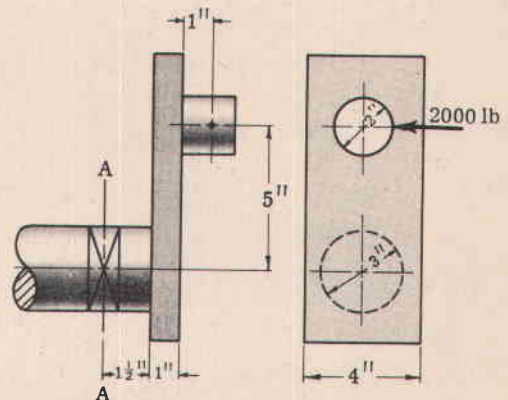


Fig. 2-24

13. En el rotor de una turbina de gas se ha encontrado un esfuerzo radial de +3000 psi y un esfuerzo tangencial de +7000 psi en un punto, como muestra la figura 2-25. ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo en dicho punto?

Solución:

$$s_x = +3000 \text{ psi}$$

$$s_y = +7000 \text{ psi}$$

$$s_n(\max) = s_y = 7000 \text{ psi (tracción)}$$

$$\tau(\max) = \frac{7000 - 0}{2} = 3500 \text{ psi (cortante)}$$

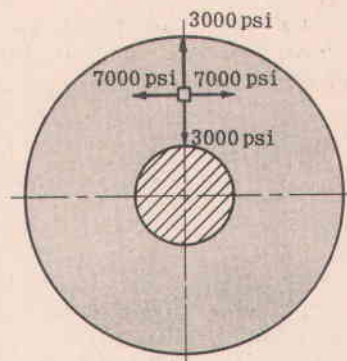


Fig. 2-25

PROBLEMAS PROPUESTOS

14. Una viga en voladizo con sección transversal circular se carga como muestra la figura 2-26. En términos de T , F , L , d , y P , expresar

- el esfuerzo máximo de tracción en el punto A,
- el esfuerzo máximo de compresión en el punto A,
- el esfuerzo máximo de tracción en el punto B,
- el esfuerzo máximo de compresión en el punto B,
- el esfuerzo cortante máximo en ambos puntos.

Resp. Ver el problema resuelto 1

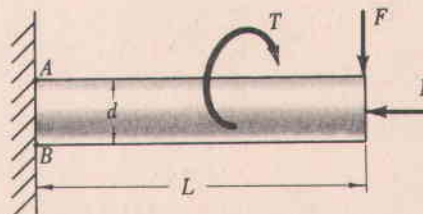


Fig. 2-26

15. Un elemento de acero tiene aplicados un momento de torsión de 1000 lb-pul y una carga axial de 2000 lb, como muestra la figura 2-27. ¿Cuál es la magnitud de (a) el esfuerzo cortante máximo, (b) el esfuerzo normal máximo, (c) el esfuerzo normal mínimo?

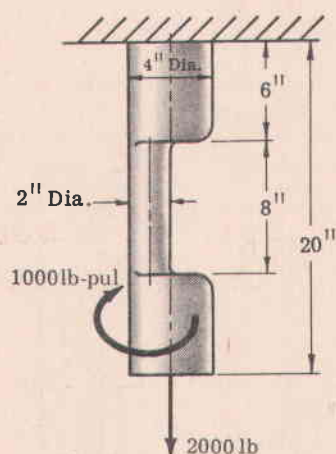


Fig. 2-27

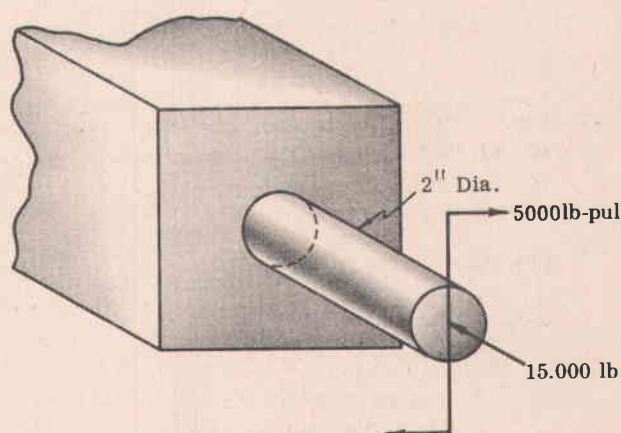


Fig. 2-28

16. Una barra circular corta de 2" de diámetro tiene un par de 5000 lb-pul y una carga de compresión de 15.000 lb aplicada, como muestra la figura 2-28. Determinar (a) el esfuerzo cortante máximo en la barra, (b) el esfuerzo máximo de tracción en la barra, (c) el esfuerzo máximo de compresión en la barra.

Resp. (a) 3980 psi, (b) 1590 psi, (c) -6370 psi (compresión)

17. Determinar el esfuerzo cortante máximo en el elemento que muestra la figura 2-29. Resp. 1785 psi (cortante)

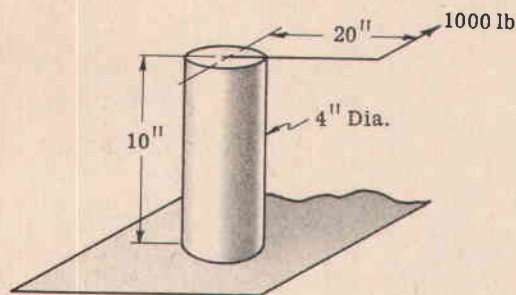


Fig. 2-29

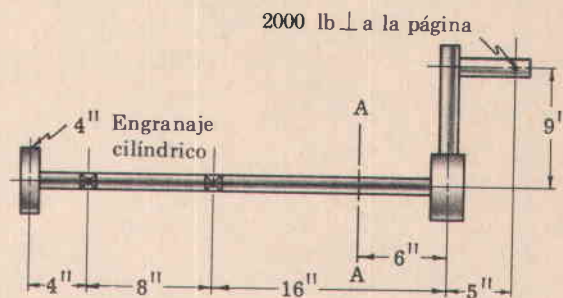


Fig. 2-30

18. Una manivela tiene una carga de 2000 lb aplicada, como muestra la figura 2-30. Determinar el esfuerzo cortante máximo en la sección A-A donde el diámetro es 2 pulgadas.
Resp. ($s_x = 28.000$ psi, $\tau_{xy} = 11.450$ psi), $\tau(\max) = 18.100$ psi

19. Las tres componentes de la fuerza total que actúa sobre el engranaje cónico son perpendiculares entre sí, siendo la fuerza de 1000 lb perpendicular al papel y actuando en el radio medio del engranaje, como muestra la figura 2-31. Determinar el momento máximo de flexión y el esfuerzo cortante máximo en la sección A-A.
Resp. $M = 8150$ lb-pul, $\tau(\max) = 6120$ psi

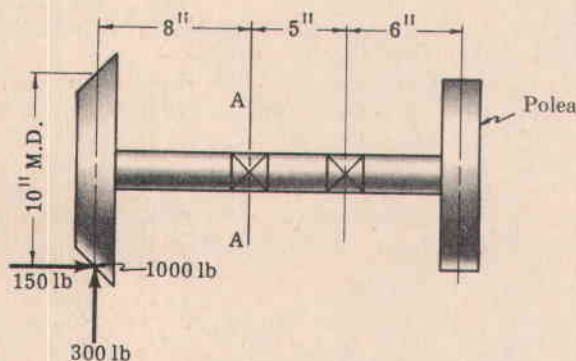


Fig. 2-31

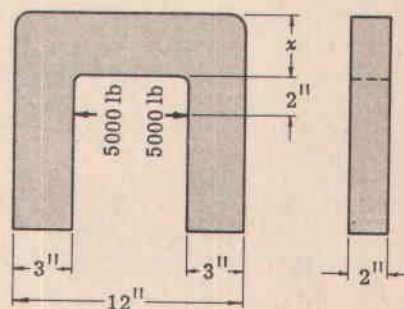


Fig. 2-32

20. Un soporte de acero de las dimensiones mostradas en la figura 2-32 se carga con dos fuerzas de 5000 lb. Se desprecian tanto el peso del soporte, como cualquier concentración de esfuerzos. Si el esfuerzo de tracción máximo en el soporte no debe exceder de 5000 psi, ¿cuál es el valor mínimo que puede tener la longitud x ?
Resp. 4,29 pul

21. La varilla lateral paralela de una locomotora pesa 60 lb/pie. La longitud OP es 16 pulgadas y el radio de la rueda motriz es 3 pies. Si la velocidad de la máquina es 75 mi/h y la fuerza de tracción por rueda es 10.000 lb, encontrar el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la varilla lateral debidos a la inercia y a la carga axial. La sección transversal de la varilla es $3'' \times 6''$.

Resp. Aceleración de la varilla = 1790 pies/seg² hacia arriba

Fuerza de inercia sobre la varilla = 33.400 lb hacia abajo

Carga axial sobre la varilla = 22.500 lb (compresión)

$s_n(\max) = 27.000$ psi (tracción)

$s_n(\min) = -29.500$ psi (compresión)

$\tau(\max) = 15.750$ psi (cortante)

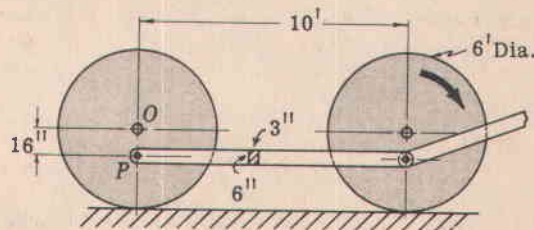


Fig. 2-33

22. Los esfuerzos en un eje hueco debidos a un ajuste de presión son 5000 psi y 9000 psi en tracción, en un punto, como se muestra en la figura 2-34. ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo en el punto?

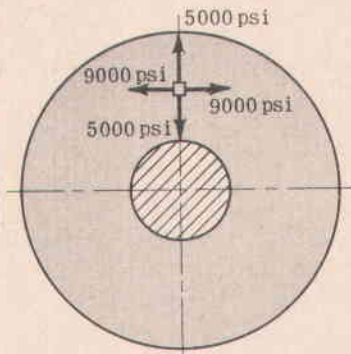


Fig. 2-34

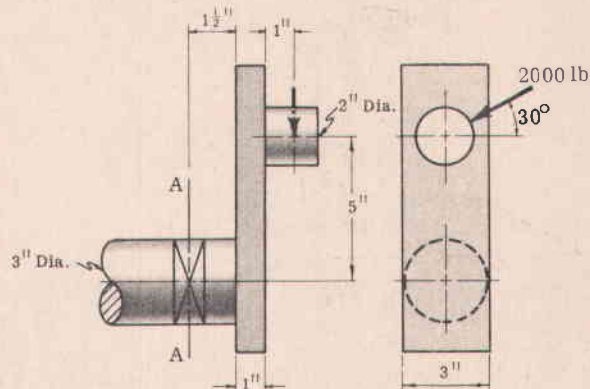


Fig. 2-35

23. Determinar el esfuerzo normal máximo y el esfuerzo cortante máximo en la sección A-A para la manivela mostrada en la figura 2-35, si una carga de 2000 lb, que se supone concentrada, se aplica al centro del pasador. Despreciar el efecto de la fuerza cortante transversal en este problema.

Resp. $s_x = 2640$ psi, $\tau_{xy} = 1630$ psi, $\tau(\max) = 2100$ psi (cortante), $s_n(\max) = 3420$ psi

24. Sobre las aletas de una viga I se sueldan peldaños de escalera, como muestra la figura 2-36. Diámetro de los peldaños: 1". Para dar espacio al pie el peldaño está doblado 3" hacia afuera en un plano horizontal. Suponiendo que los soportes extremos proporcionados por las aletas son rígidos, calcular los esfuerzos cortantes máximos que se inducen en el peldaño cuando un hombre de 180 lb pone su pie en el centro de la luz. Despreciar la curvatura del peldaño al calcular el esfuerzo máximo. Resp. $\tau(\max) = 2200$ psi

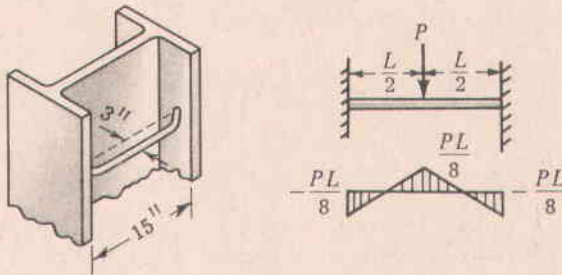


Fig. 2-36

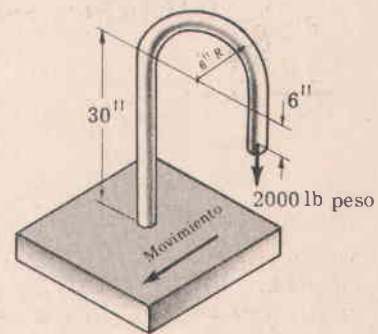


Fig. 2-37

25. Un peso de 2000 lb está suspendido de un soporte curvo, como muestra la figura 2-37. El soporte es transportado sobre una plataforma móvil cuya aceleración es 8 pies/seg². Encontrar el diámetro necesario de la barra de modo que el esfuerzo cortante máximo en su base no sobrepase de 10.000 psi. Resp. 2,41"

26. Una manivela construida con secciones cilíndricas soldadas requiere una carga de 250 lb para vencer la resistencia cuando se halla en la posición mostrada en la figura 2-38.

(a) Calcular los esfuerzos cortantes y normales máximos inducidos en la sección A-A.

(b) Determinar los esfuerzos cortantes máximos inducidos en las partes I, II, y III.

Resp. (a) $s_n(\max) = 29.000$ psi, $\tau(\max) = 15.000$ psi

(b) 10.550 psi para la parte I, 6880 psi para II, 15.000 psi para III

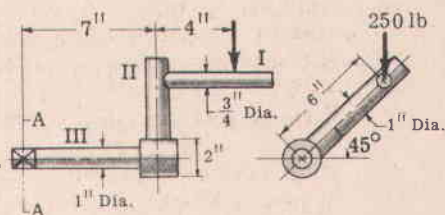


Fig. 2-38

Capítulo 3

Ajustes y tolerancias

LOS AJUSTES deben especificarse para asegurar el montaje apropiado de miembros de máquinas que se acoplan. Como es imposible fabricar partes de máquinas que tengan exactamente las mismas dimensiones, se han concebido sistemas que permiten tolerar variaciones pequeñas en las dimensiones de las partes que se acoplan sin sacrificar su funcionamiento adecuado.

El **tamaño nominal*** es el tamaño aproximado decidido por el proyectista y al cual se aplican las discrepancias y las tolerancias para llegar al dimensionamiento de las partes que se acoplan. Las **dimensiones básicas** son las dimensiones con respecto a las cuales se permiten las variaciones. **Tolerancia** es la variación máxima permisible en el tamaño de la parte. **Holgura** (o interferencia) es la diferencia real en el tamaño de las partes que se acoplan. **Discrepancia** es la diferencia entre las **dimensiones básicas** de las partes que se acoplan. La tolerancia puede ser **bilateral**, en cuyo caso se permite que el tamaño de la parte varíe por encima y por debajo del tamaño básico, tal como $2,500 \pm 0,003$; o **unilateral**, en cuyo caso la parte puede ser exclusivamente o más grande o más pequeña que el tamaño básico, tal como $2,500 \begin{smallmatrix} +0,000 \\ -0,003 \end{smallmatrix}$. El orificio normal básico que tiene tolerancias unilaterales es el recomendado por la American Standards Association. En el sistema del orificio básico el diámetro mínimo del orificio es la dimensión nominal.

EL ORIFICIO NORMAL BASICO da ocho clases de ajustes que van desde el ajuste holgado hasta el forzado o de presión.

1. El ajuste holgado tiene una gran discrepancia y está concebido para aplicaciones en las cuales la precisión no es esencial, tales como en el caso de algunos equipos agrícolas, de construcción de carreteras y de minería.
2. El ajuste libre se recomienda para usarlo en cojinetes giratorios donde la velocidad es 600 rpm o mayor. La discrepancia es suficiente para suministrar una lubricación satisfactoria en equipos tales como generadores, motores y algunas partes de automotores.
3. El ajuste medio se usa para ajustes de carrera por debajo de 600 rpm y para ajustes deslizantes en equipos tales como máquinas, herramientas de precisión y partes de automotores.
4. El ajuste estrecho es el ajuste más próximo que puede montarse a mano, para usarse en donde se permite un juego muy pequeño y donde no se pretende que las partes móviles se muevan libremente bajo carga.
5. El ajuste timbrante es prácticamente un ajuste metal a metal y no es intercambiable sino de montaje selectivo. Para montar las partes se requieren unos golpes suaves con martillo.
6. El ajuste apretado tiene una interferencia metálica y se usa para un montaje semi-permanente recomendable para ajustes conductores o de presión en secciones livianas.
7. El ajuste semi-forzado requiere una presión considerable para el montaje y se usa para ajustes de presión en secciones medianas o en ejes largos y es el ajuste más apretado que puede usarse seguramente con miembros externos de hierro fundido. Es recomendable en ajustes de presión sobre ruedas de locomotora, ruedas de automóvil, armaduras de generadores y motores.
8. El ajuste forzado se usa como ajuste de fuerza o presión para miembros externos de acero en los cuales se requiere una gran adherencia, tales como en llantas para ruedas de locomotora y discos cigüeñales pesados de máquinas grandes.

* En otras partes del texto, tamaño "nominal" puede significar una dimensión "de nombre" que no guarda ninguna relación especial con la dimensión real, como es el caso del tamaño nominal de una tubería.

DISCREPANCIAS Y TOLERANCIAS RECOMENDADAS

Clase de Ajuste	Método de Montaje	Discrepancia	Interferencia media (Discrepancia negativa)	Tolerancia de orificio	Tolerancia de eje
1. Holgado	Intercambiable	$0,0025 d^{\frac{2}{3}}$	-----	$0,0025 d^{\frac{1}{3}}$	$0,0025 d^{\frac{1}{3}}$
2. Libre	"	$0,0014 d^{\frac{2}{3}}$	-----	$0,0013 d^{\frac{1}{3}}$	$0,0013 d^{\frac{1}{3}}$
3. Medio	"	$0,0009 d^{\frac{2}{3}}$	-----	$0,0008 d^{\frac{1}{3}}$	$0,0008 d^{\frac{1}{3}}$
4. Estrecho	"	0,0000	-----	$0,0006 d^{\frac{1}{3}}$	$0,0004 d^{\frac{1}{3}}$
5. Timbrante	Selectivo	-----	0,0000	$0,0006 d^{\frac{1}{3}}$	$0,0004 d^{\frac{1}{3}}$
6. Apretado	"	-----	$0,00025 d$	$0,0006 d^{\frac{1}{3}}$	$0,0006 d^{\frac{1}{3}}$
7. Semi-forzado	"	-----	$0,0005 d$	$0,0006 d^{\frac{1}{3}}$	$0,0006 d^{\frac{1}{3}}$
8. Forzado o de presión	"	-----	$0,0010 d$	$0,0006 d^{\frac{1}{3}}$	$0,0006 d^{\frac{1}{3}}$

LAS DISCREPANCIAS Y LAS TOLERANCIAS tal como se aplican al orificio normal básico se muestran en la figura 3-1. Notar que las dimensiones del orificio son las mismas, tanto para ajustes móviles, como para ajustes apretados.

d = dimensión nominal

t_h = tolerancia de orificio

t_s = tolerancia de eje

a = discrepancia

i = interferencia media seleccionada (también llamada discrepancia negativa en ajustes de interferencia)



Para ajustes (Clase 1-4)



Para ajustes (Clase 5-8)

Fig. 3-1

EL MONTAJE SELECTIVO es la práctica de separar las partes en grupos de diferente tamaño y luego montarlas en grupos que se corresponden, con el fin de obtener ajustes más estrechos que de otra manera no serían factibles económicamente. Por ejemplo, supongamos que se van a fabricar ejes de 1 pul con un ajuste clase 2, con dimensiones que van desde 0,9986 pul hasta 0,9993 pul. Los cojinetes correspondientes se fabrican con dimensiones que van desde 1,0000 pul hasta 1,0013 pul. Si se ejecuta un montaje totalmente intercambiable, la holgura variará desde 0,0014 pul hasta 0,0040 pul.

No obstante, si se quiere mantener el intervalo de holgura entre 0,0020 pul y 0,0034 pul, por razones de lubricación, se pueden agrupar los ejes y los cojinetes en dos grupos como se indica:

Grupo A	Cojinetes	1,0000 pul a 1,0007 pul
	Ejes	0,9973 pul a 0,9980 pul
Grupo B	Cojinetes	1,0007 pul a 1,0013 pul
	Ejes	0,9980 pul a 0,9986 pul

Con intercambiabilidad completa dentro del **Grupo A**, el intervalo de holguras obtenido irá desde 0,0020 pul hasta 0,0034 pul; y con intercambiabilidad completa dentro del **Grupo B**, de 0,0021 pul a 0,0033 pul. Lo que se ha hecho, efectivamente, es obtener el beneficio de tolerancias menores que aquellas para las cuales se maquinaron las partes. Esto se ha realizado a costa de alguna intercambiabilidad.

Si las partes se dividieran en más grupos, el margen de holgura podría reducirse aún más.

El mismo procedimiento de usar montaje selectivo se sigue para ajustes de interferencia. Aquí la razón es mantener los esfuerzos máximos dentro de los límites convenientes.

En la tabla de Discrepancias y Tolerancias Recomendadas, bajo la columna Método de Montaje, las clases 1 a 4 se describen como intercambiables, donde este término significa simplemente que todas las partes dentro de una clase ajustan libremente; en forma similar, con las clases 5 a 8, Montaje Selectivo significa que las partes deben agruparse de modo que permitan el Método de Montaje que garantice el ajuste descrito.

LOS ESFUERZOS DEBIDOS A LOS AJUSTES DE INTERFERENCIA pueden calcularse considerando como cilindros de pared gruesa a las partes que se ajustan, por medio de las siguientes ecuaciones (Fig. 3-2):

$$p_c = \frac{\delta}{d_c \left[\frac{d_c^2 + d_i^2}{E_i(d_c^2 - d_i^2)} + \frac{d_o^2 + d_c^2}{E_o(d_o^2 - d_c^2)} - \frac{\mu_i}{E_i} + \frac{\mu_o}{E_o} \right]}$$

donde

- p_c = presión en la superficie de contacto, psi (kg/cm²)
- δ = interferencia total, pul (cm)
- d_i = diámetro interior del elemento interno, pul (cm)
- d_c = diámetro de la superficie de contacto, pul (cm)
- d_o = diámetro exterior del elemento externo, pul (cm)
- μ_o = relación de Poisson para el elemento externo
- μ_i = relación de Poisson para el elemento interno
- E_o = módulo de elasticidad del elemento externo, psi (kg/cm²)
- E_i = módulo de elasticidad del elemento interno, psi (kg/cm²)

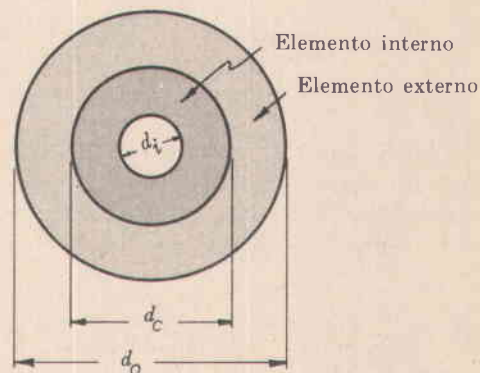


Fig. 3-2

Si ambos elementos son del mismo material, la ecuación anterior se reduce a

$$p_c = \frac{\delta}{\frac{2d_c^3(d_o^2 - d_i^2)}{E(d_c^2 - d_i^2)(d_o^2 - d_c^2)}}$$

Después de encontrar p_c , los esfuerzos tangenciales reales en las diferentes superficies, de acuerdo con la ecuación de Lamé, (para usarla conjuntamente con la teoría de rotura por esfuerzo cortante máximo), pueden determinarse por:

$$\text{Sobre la superficie en } d_o, \quad s_{to} = \frac{2p_c d_c^2}{d_o^2 - d_c^2}$$

$$\text{Sobre la superficie en } d_c \text{ para el elemento externo, } s_{tco} = p_c \left(\frac{d_o^2 + d_c^2}{d_o^2 - d_c^2} \right)$$

Sobre la superficie en d_c para el elemento interno, $s_{tci} = -p_c \left(\frac{d_c^2 + d_i^2}{d_c^2 - d_i^2} \right)$

Sobre la superficie en d_i , $s_{ti} = \frac{-2p_c d_c^2}{d_c^2 - d_i^2}$

Los esfuerzos tangenciales equivalentes en las diferentes superficies, de acuerdo con la ecuación de Birnie, (para usarla conjuntamente con la teoría de rotura por deformación máxima), pueden determinarse por:

Sobre la superficie en d_o para el elemento externo, $s'_{to} = \frac{2p_c d_c^2}{d_o^2 - d_c^2}$

Sobre la superficie en d_c para el elemento externo, $s'_{tco} = p_c \left(\frac{d_o^2 + d_c^2}{d_o^2 - d_c^2} + \mu_o \right)$

Sobre la superficie en d_c para el elemento interno, $s'_{tci} = -p_c \left(\frac{d_c^2 + d_i^2}{d_c^2 - d_i^2} - \mu_i \right)$

Sobre la superficie en d_i , $s'_{ti} = \frac{-2p_c d_c^2}{d_c^2 - d_i^2}$

FUERZAS Y MOMENTOS DE TORSION. La fuerza axial máxima F_a requerida para montar un ajuste forzado varía directamente con el espesor y la longitud del elemento externo, la diferencia en los diámetros de las partes que se acoplan y el coeficiente de rozamiento. Este valor de la fuerza puede aproximarse por

$$F_a = f\pi d L p_c$$

El momento de torsión que puede transmitirse en un ajuste de interferencia sin que ocurra deslizamiento entre el elemento externo y el eje puede estimarse por

$$T = \frac{f p_c \pi d^2 L}{2}$$

donde

F_a = fuerza axial, lb (kg)

T = momento de torsión transmitido, lb-pul (kg-cm)

d = diámetro nominal del eje, pul (cm)

f = coeficiente de rozamiento

L = longitud del elemento externo, pul (cm)

p_c = presión de contacto entre los elementos, psi (kg/cm²)

EL MONTAJE DE AJUSTES DE PRESION se facilita con frecuencia, calentando el elemento externo hasta que se haya dilatado en una cantidad por lo menos igual a la interferencia. El cambio de temperatura ΔT requerido para producir un aumento δ en el diámetro interior del elemento externo puede determinarse por

$$\Delta T = \frac{\delta}{\alpha d_i}$$

donde

δ = interferencia diametral, pul (cm)

α = coeficiente de dilatación lineal, por °F (por °C)

ΔT = cambio de temperatura, °F (°C)

d_i = diámetro inicial del orificio antes de dilatarse, pul (cm)

También se puede enfriar el eje por medio de un refrigerante tal como el hielo seco.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuáles son los valores de la discrepancia, tolerancia de orificio, y tolerancia de eje para las siguientes dimensiones de partes que se acoplan de acuerdo con el sistema del orificio básico?

Orificio 1,5000"
1,5009"

Eje 1,4988"
1,4978"

Solución:

Orificio 1,5000"

Eje 1,5" - a $a = 0,0012"$

a 1,5" + t_h $t_h = 0,0009"$

a 1,5" - $a - t_s$ $t_s = 0,0010"$

2. Un eje de 3" gira sobre un cojinete. La tolerancia para eje y cojinete es 0,003" y la discrepancia requerida es 0,004". Dimensionar el eje y el orificio del cojinete de acuerdo con el orificio normal básico.

Solución:

Orificio $d = 3,000"$
 $d + t_h = 3,003"$

Eje $d - a = 2,996"$
 $d - t_s - a = 2,993"$

3. Un ajuste semiforzado sobre un eje de 3 pul requiere una tolerancia de orificio de 0,009 pul, y una interferencia media de 0,0015 pul. Dar las dimensiones apropiadas del eje y del orificio de acuerdo con el orificio normal básico.

Solución:

Orificio $d = 3,0000"$
 $d + t_h = 3,0009"$

Eje $d + i = 3,0015"$
 $d + i + t_s = 3,0024"$

4. (a) ¿Cuál es la diferencia en el tipo de montaje usado corrientemente en ajustes de carrera y ajustes de interferencia?
(b) Si se deseara un ajuste semiforzado (interferencia de 0,0015"), ¿cuál eje debería acoplarse a cada rueda dentro del siguiente grupo?

Rueda	A	B	C
Diámetro del orificio	3,0009"	3,0005"	3,0000"
Eje	A'	B'	C'
Diámetro	3,0015"	3,0020"	3,0024"

Solución:

- (a) Los ajustes de carrera son estrictamente intercambiables mientras que los ajustes de interferencia requieren un montaje selectivo.
(b) Para un montaje selectivo A' debería acoplarse con C, B' con B, y C' con A.
5. Dar las dimensiones para el eje y el orificio en los siguientes casos: (a) un cojinete de $\frac{1}{2}$ pul para un motor eléctrico, (b) un ajuste semiforzado sobre un eje de 8 pul, (c) un cojinete de 2 pul sobre el mecanismo de elevación de una motoniveladora.

Solución:

- (a) Un ajuste libre, clase 2, sería recomendable para un cojinete ordinario de un motor eléctrico.

Discrepancia = $0,0014 \times 0,5^{2/3} = 0,0009$ pul
 Dimen. orificio = d hasta $d + t_h = 0,5000$
 hasta $0,5010$ pul

Tolerancia (eje y orificio) = $0,0013 \times 0,5^{1/3} = 0,0010$ pul
 Dimen. eje = $d - a$ hasta $d - a - t_s = 0,4991$ hasta $0,4981$ pul

- (b) Interferencia = $0,0005 \times 8 = 0,0040$ pul
 Dimen. orificio = d hasta $d + t_h = 8,0000$
 hasta $8,0012$ pul

Tolerancia (eje y orificio) = $0,0006 \times 8^{1/3} = 0,0012$ pul
 Dimen. eje = $d + i$ hasta $d + i + t_s = 8,0040$ hasta $8,0052$ pul

- (c) Un ajuste holgado, clase 1, sería recomendable.
 Discrepancia = $0,0025 \times 2^{2/3} = 0,004$ pul
 Dimensiones del orificio = $2,000$ hasta $2,003$ pul

Tolerancia (eje y orificio) = $0,0025 \times 2^{1/3} = 0,003$ pul
 Dimensiones del eje = $1,996$ hasta $1,993$ pul

6. Una práctica común es la de diseñar un anillo externo de modo que su diámetro exterior sea cerca del doble del diámetro del orificio. Se sabe también que un montaje selectivo debería usarse cuando se presiona un anillo externo sobre un eje. El propósito de este problema es determinar qué tan pequeños y qué tan grandes pueden ser los esfuerzos con un ajuste forzado (clase 8) en el cual el montaje **no** es selectivo. Determinar, para un eje sólido de $1''$, los esfuerzos **tangenciales** máximos y mínimos que resultarían si se usaran las interferencias máximas y mínimas para un anillo externo con $2''$ de diámetro exterior. El eje y el anillo están hechos de acero. La relación de Poisson puede tomarse igual a $0,3$.

Solución

$$d_i = 0, \quad d_c = 1'', \quad d_o = 2''$$

Primero se determina la presión radial sobre la superficie de contacto, p_c . Puesto que tanto el eje como el anillo son del mismo material,

$$p_c = \frac{\delta E (d_c^2 - d_i^2)(d_o^2 - d_c^2)}{2d_c^3(d_o^2 - d_i^2)} = \frac{\delta(30)(10^6)(1^2 - 0)(2^2 - 1^2)}{(2)(1^3)(2^2 - 0)} = \delta(11,25)(10^6)$$

Entonces, usando la ecuación de Lamé se determina el esfuerzo tangencial en la superficie de contacto del elemento externo,

$$s_{tco} = p_c \frac{d_o^2 + d_c^2}{d_o^2 - d_c^2} = \delta(11,25)(10^6) \frac{2^2 + 1^2}{2^2 - 1^2} = \delta(18,75)(10^6)$$

Para un ajuste clase 8, la dimensión del orificio puede variar desde $1,0000''$ hasta $1,0006''$ y la del eje desde $1,0010''$ hasta $1,0016''$; entonces $\delta(\max) = 0,0016''$, $\delta(\min) = 0,0004''$, y

$$s_{tco}(\max) = (0,0016)(18,75)(10^6) = 30.000 \text{ psi}$$

$$s_{tco}(\min) = (0,0004)(18,75)(10^6) = 7.500 \text{ psi}$$

7. Un eje de acero de 6 pul de diámetro debe tener un ajuste de presión con un anillo externo de 12 pul d. e. por 10 pul de largo, fabricado en hierro fundido. El esfuerzo tangencial máximo debe ser 5000 psi. $E = 30 \times 10^6$ psi para el acero y 15×10^6 psi para el hierro fundido; $\mu = 0,3$ para ambos materiales; $f = 0,12$.

- (a) Determinar la interferencia diametral máxima.

- (b) ¿Qué fuerza axial F_a se necesitará para presionar el anillo sobre el eje?

- (c) ¿Qué momento de torsión puede transmitirse con este ajuste?

Solución:

- (a) El esfuerzo tangencial máximo se presenta sobre la superficie d_c para el miembro externo:

$$s_{tco} = p_c \left(\frac{d_o^2 + d_c^2}{d_o^2 - d_c^2} \right), \quad 5000 = p_c \left(\frac{12^2 + 6^2}{12^2 - 6^2} \right), \quad p_c = 3000 \text{ psi}$$

Usando

$$p_c = \frac{\delta}{d_c \left[\frac{d_c^2 + d_i^2}{E_i(d_c^2 - d_i^2)} + \frac{d_o^2 + d_c^2}{E_o(d_o^2 - d_c^2)} - \frac{\mu_i}{E_i} + \frac{\mu_o}{E_o} \right]}$$

$$3000 = \frac{\delta}{6 \left[\frac{6^2 + 0}{(30)(10^6)(6^2 - 0)} + \frac{12^2 + 6^2}{(15)(10^6)(12^2 - 6^2)} - \frac{0,3}{(30)(10^6)} + \frac{0,3}{(15)(10^6)} \right]}$$

de la cual $\delta = 0,00278$ pul (interferencia diametral máxima permisible).

$$(b) F_a = f\pi d L p_c = 0,12\pi(6)(10)(3000) = 67.800 \text{ lb}$$

$$(c) T = f p_c \pi d^2 L / 2 = F_a(d/2) = 67.800(6/2) = 203.400 \text{ lb-pul}$$

8. Un anillo externo de acero fundido cuyo diámetro mínimo es 4,000 pul debe colocarse sobre un eje cuyo diámetro máximo es 4,006 pul. Suponiendo una temperatura ambiente de 70°F, un coeficiente de dilatación lineal para el acero de 0,0000063 por grado Fahrenheit, y una holgura diametral deseable de 0,002 pul, ¿cuál debe ser la temperatura a la cual debe calentarse el anillo de modo que permita un montaje sin interferencia?

Solución:

$$\text{El diámetro del anillo debe dilatarse hasta 4,008 pul } \Delta T = \frac{0,008}{0,0000063 \times 4,0000} = 317^\circ.$$

El anillo debe calentarse a una temperatura mínima de: $70^\circ + 317^\circ = 387^\circ\text{F}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. ¿Cuáles son los valores de la discrepancia, tolerancia de orificio, y tolerancia de eje para las siguientes dimensiones de partes que se acoplan, de acuerdo con el sistema del orificio básico?
- Orificio** 1,7500 **Eje** 1,7490
 1,7506 1,7483 Resp. $t_h = 0,0006$, $a = 0,0010$, $t_s = 0,0007$
10. ¿Cuáles son las dimensiones correctas para acoplar un eje de 6 pul de diámetro con un anillo externo para producir un ajuste de clase 8?
- Resp. **Orificio** 6,0000 **Eje** 6,0060
 6,0011 6,0071
11. Un ajuste semiforzado sobre un eje de 3 pul requiere una tolerancia de orificio de 0,0009 pul, una tolerancia de eje de 0,0009 pul y una interferencia media de 0,0015 pul. Determinar las dimensiones apropiadas para el eje y el orificio.
- Resp. $\frac{3,0000}{3,0009}$ y $\frac{3,0015}{3,0024}$
12. Un anillo externo de acero de $17\frac{1}{2}$ pul d.e. $\times$ 10 pul d.i. debe tener un ajuste de presión sobre un eje de acero de 10 pul de diámetro. El esfuerzo tangencial en la superficie de contacto debe ser 15.000 psi. La longitud del anillo es 12 pul. (a) ¿Cuál es el esfuerzo radial en la superficie de contacto? (b) ¿Qué momento de torsión puede transmitirse si el coeficiente de rozamiento es 0,18?
- Resp. $p_c = 7600$ psi, $T = 215.000$ libras-pie
13. Un anillo externo de acero de 2" d.e. $\times$ 1" d.i. debe montarse sobre un eje de acero de 1" de diámetro, sin usar un montaje selectivo y con un ajuste clase 8.
- (a) Determinar la tolerancia, interferencia y dimensiones de las partes que se acoplan.
 (b) ¿Cuál es el máximo esfuerzo radial de contacto?
 (c) ¿Cuáles son los esfuerzos tangenciales máximos y mínimos en la superficie de contacto? (Emplear la ecuación de Lamé.)

- (d) ¿Cuáles son los esfuerzos tangenciales equivalentes máximos y mínimos, basados en la teoría de la máxima deformación, en la superficie de contacto? (Emplear la ecuación de Birnie.)
- (e) ¿Cuál es la fuerza axial máxima F_a que se requiere para montar las partes, suponiendo que la longitud del anillo es 3" y $f = 0,12$?
- (f) ¿Cuál es el momento máximo de torsión que puede transmitirse con este montaje? (Basar la solución en la interferencia máxima.)

Resp. (a) Tolerancia 0,0006 pul Interferencia máxima 0,0016 pul Orificio 1,0000 pul Eje 1,0010 pul
Interferencia mínima 0,0004 pul 1,0006 pul 1,0016 pul

(b) $p_c(\max) = 18.000 \text{ psi}$ (c) $s'_t(\max) = 30.000 \text{ psi}$ (d) $s'_t(\max) = 35.400 \text{ psi}$ (e) $F_a = 20.400 \text{ libras}$
 $s'_t(\min) = 7500 \text{ psi}$ $s'_t(\min) = 8850 \text{ psi}$ $T = 10.200 \text{ lb-pul}$

14. Un anillo externo de acero de 1" d.i. va a montarse sobre un eje cuyo diámetro es 1,001. ¿A qué temperatura debería enfriarse el eje para permitir un ajuste deslizante, suponiendo que la temperatura ambiente es 70° F y que el coeficiente de dilatación lineal es 0,000063 por grado Fahrenheit? Resp. —88,5° F

15. Se quieren montar dos cilindros de acero cuyos diámetros nominales son 1" d. i. $\times$ 2" d. e. y 2" d. i. $\times$ 3" d. e. manteniendo limitado a 12.000 psi el esfuerzo tangencial en la superficie interior del miembro externo. Determinar la interferencia requerida y los esfuerzos tangenciales en las superficies internas y externas de ambos miembros, de acuerdo con la ecuación de Birnie.

Resp. $p_c = 4130 \text{ psi}$ $s'_{ti} = -11.020 \text{ psi}$
 $\delta = 0,001178'' \text{ interferencia}$ $s'_{tci} = -5650 \text{ psi}$
 $s'_{tco} = 12.000 \text{ psi}$
 $s'_{to} = 6608 \text{ psi}$

16. Un ajuste de centrado para un acoplamiento de aletas se usa para colocar las dos mitades del acoplamiento. Si se usa un ajuste clase 4 para suministrar un ajuste estrecho, la discrepancia es adecuada pero las tolerancias son pequeñas. Determinar las dimensiones necesarias del ajuste de centrado para una dimensión nominal de 6 pul tomando un término medio entre la discrepancia de un ajuste clase 4 y las tolerancias de un ajuste clase 3. Notar que se obtienen algunas de las ventajas del ajuste clase 4 con la economía del ajuste clase 3.

Resp. $\frac{6,0015}{6,0000}$ y $\frac{6,0000}{5,9985}$

17. Un ajuste clase 8 se utiliza para montar en caliente un cubo sobre un eje. ¿Cuántos grupos de partes se necesitan para un montaje selectivo intercambiable que produzca una interferencia máxima de 0,0022 pul y una interferencia mínima de 0,0018 pul? Diámetro del eje 2".

Resp. Cuatro grupos separados en la siguiente forma:

Grupo	A	B	C	D
Orificio	$\frac{2,0002}{2,0000}$	$\frac{2,0004}{2,0002}$	$\frac{2,0006}{2,0004}$	$\frac{2,0008}{2,0006}$
Eje	$\frac{2,0022}{2,0020}$	$\frac{2,0024}{2,0022}$	$\frac{2,0026}{2,0024}$	$\frac{2,0028}{2,0026}$

Capítulo 4

Vigas curvas

LOS ESFUERZOS DE FLEXION EN VIGAS CURVAS no siguen la misma variación lineal como en las vigas rectas, debido a la variación en la longitud del arco. Aun cuando las mismas hipótesis se usan para ambos tipos, esto es, las secciones planas perpendiculares al eje de la viga permanecen planas después de la flexión y los esfuerzos son proporcionales a las deformaciones, la distribución de esfuerzos es bastante diferente. La figura 4-1 muestra la variación lineal de los esfuerzos en una viga recta y la distribución hiperbólica en una viga curva. Debe notarse que el esfuerzo de flexión en la viga curva es cero en un punto diferente al centro de gravedad. Notar también, que el eje neutro está localizado entre el eje del centro de gravedad y el centro de curvatura; esto siempre ocurre en las vigas curvas.

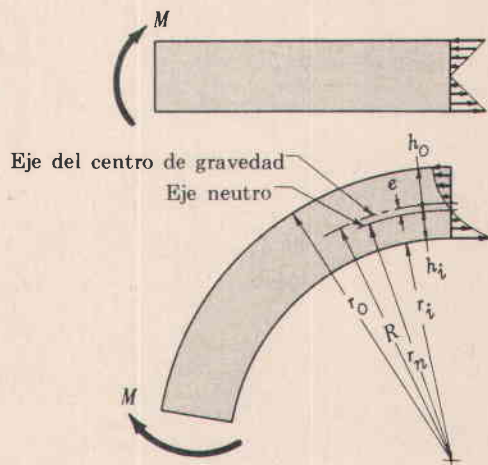


Fig. 4-1

LA DISTRIBUCION DE ESFUERZOS debidos a la flexión está dada por $s = \frac{My}{Ae(r_n - y)}$

donde s es el esfuerzo de flexión, psi (kg/cm²)

M es el momento de flexión con respecto al eje del centro de gravedad, lb-pul (kg-cm)

y es la distancia del eje neutro al punto investigado, pul (cm) (positiva para distancias hacia el centro de curvatura, negativa para distancias hacia afuera de él)

A es el área de la sección, pul² (cm²)

e es la distancia del eje del centro de gravedad al eje neutro, pul (cm)

r_n es el radio de curvatura del eje neutro, pul (cm).

EL ESFUERZO DE FLEXION EN LA FIBRA INTERNA está dado por $s = \frac{Mh_i}{Aer_i}$

donde h_i es la distancia del eje neutro a la fibra interna, pul (cm) ($h_i = r_n - r_i$)

r_i es el radio de curvatura de la fibra interna, pul (cm).

EL ESFUERZO DE FLEXION EN LA FIBRA EXTERNA está dado por $s = \frac{Mh_o}{Aer_o}$

donde h_o es la distancia del eje neutro a la fibra externa, pul (cm) ($h_o = r_o - r_n$)

r_o es el radio de curvatura de la fibra externa, pul (cm).

Si la sección es **simétrica** (como un círculo, un rectángulo, una viga I de alas iguales) el esfuerzo máximo de flexión **siempre** ocurre en la fibra interna. Si la sección es asimétrica, el esfuerzo máximo de flexión puede presentarse en la fibra interna o en la externa.

Si la sección tiene una carga axial, además de la flexión, el esfuerzo axial debe sumarse algebraicamente al esfuerzo de flexión.

Debe tenerse mucho cuidado con las operaciones aritméticas. La distancia "e" del eje del centro de gravedad al eje neutro es generalmente pequeña. Una variación numérica en el cálculo de "e" puede producir un gran cambio porcentual en el resultado final.

La Tabla I, a continuación, da la localización del eje neutro, la distancia del eje centroidal al eje neutro, y la distancia del eje centroidal desde el centro de curvatura, para varias formas comunes.

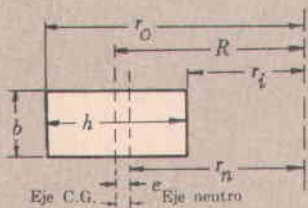
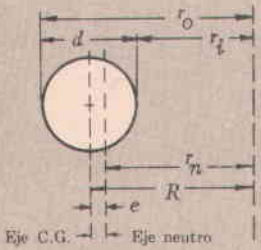
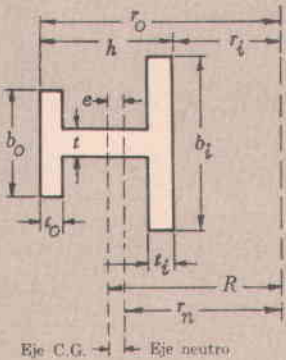
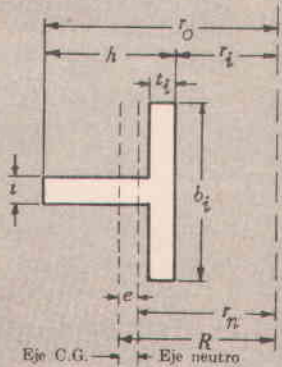
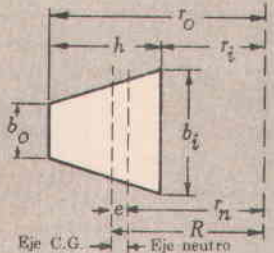
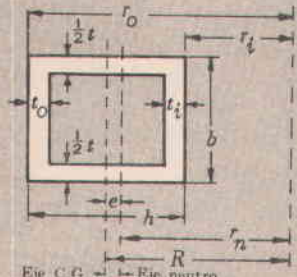
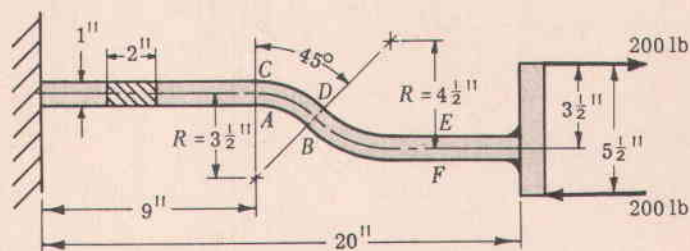
TABLA I	
	$r_n = \frac{h}{\log_e r_o / r_i}$ $e = R - r_n$ $R = r_i + h/2$
	$r_n = \frac{[r_o^{1/2} + r_i^{1/2}]^2}{4}$ $e = R - r_n$ $R = r_i + d/2$
	$r_n = \frac{(b_i - t)(t_i) + (b_o - t)(t_o) + th}{b_i \log_e \frac{r_i + t_i}{r_i} + t \log_e \frac{r_o - t_o}{r_i + t_i} + b_o \log_e \frac{r_o}{r_o - t_o}}$ $e = R - r_n$ $R = r_i + \frac{\frac{1}{2} h^2 t + \frac{1}{2} t_i^2 (b_i - t) + (b_o - t)(t_o)(h - \frac{1}{2} t_o)}{(b_i - t)(t_i) + (b_o - t)(t_o) + th}$

TABLA I (continuación)

	$r_n = \frac{(b_i - t)(t_i) + th}{(b_i - t) \log_e \frac{r_i + t_i}{r_i} + t \log_e \frac{r_o}{r_i}}$ $e = R - r_n$ $R = r_i + \frac{\frac{1}{2} h^2 t + \frac{1}{2} t_i^2 (b_i - t)}{ht + (b_i - t) t_i}$
	$r_n = \frac{\left(\frac{b_i + b_o}{2} \right) h}{\left(\frac{b_i r_o - b_o r_i}{h} \right) \log_e \left(\frac{r_o}{r_i} \right) - (b_i - b_o)}$ $e = R - r_n$ $R = r_i + \frac{h(b_i + 2b_o)}{3(b_i + b_o)}$
	$r_n = \frac{(b - t)(t_i + t_o) + th}{b \left[\log_e \frac{r_i + t_i}{r_i} + \log_e \frac{r_o}{r_o - t_o} \right] + t \log_e \frac{r_o - t_o}{r_i + t_i}}$ $e = R - r_n$ $R = r_i + \frac{\frac{1}{2} h^2 t + \frac{1}{2} t_i^2 (b - t) + (b - t)(t_o)(h - \frac{1}{2} t_o)}{ht + (b - t)(t_i + t_o)}$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una barra doblada está sometida a las fuerzas mostradas. La barra tiene $1'' \times 2''$. El efecto de las dos fuerzas aplicadas es un par que produce el mismo momento de flexión en cualquier sección de la viga. Determinar los esfuerzos máximos de tracción, compresión y cortante, y decir dónde se presentan.



Solución:

- (a) El momento de flexión en cualquier sección es

$$200(5\frac{1}{2}) = 1100 \text{ lb-pul}$$

- (b) Como el par equilibrante es el mostrado, puede verse que se presenta tracción en la fibra superior CDE y compresión en la fibra inferior ABF . Debido a la simetría en la viga, el esfuerzo normal máximo se presenta en la fibra interna de la parte con el radio de curvatura menor, con $R = 3\frac{1}{2}''$, $r_i = 3''$, $r_o = 4''$; el esfuerzo máximo en la fibra interna es de compresión. No obstante, la localización del esfuerzo máximo de tracción no es evidente. Las secciones para las cuales $R = 3\frac{1}{2}''$ y $R = 4\frac{1}{2}''$ deben verificarse.

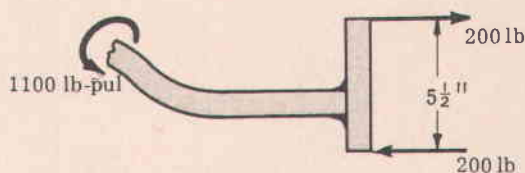


Fig. 4-2

- (c) Para determinar e :

$$r_n = \frac{h}{\log_e r_o / r_i} = \frac{1}{\log_e \frac{4}{3}} = 3,485'' \quad e = R - r_n = 3,5 - 3,485 = 0,015''$$

- (d) Para la sección con $R = 3\frac{1}{2}''$ el esfuerzo en la fibra interna es

$$s_i = \frac{Mh_i}{Aer_i} = \frac{1100(0,485)}{2(0,015)(3)} = 5930 \text{ psi compresión}$$

El esfuerzo en la fibra externa es

$$s_o = \frac{Mh_o}{Aer_o} = \frac{1100(0,515)}{2(0,015)(4)} = 4720 \text{ psi compresión}$$

- (e) Para la sección con $R = 4\frac{1}{2}''$, $r_n = \frac{h}{\log_e r_o / r_i} = \frac{1}{\log_e \frac{5}{4}} = 4,480''$ o $e = R - r_n = 4,5 - 4,480 = 0,020''$.

En la fibra interna,

$$s_i = \frac{Mh_i}{Aer_i} = \frac{1100(0,480)}{2(0,02)(4)} = 3300 \text{ psi tracción}$$

En la fibra externa,

$$s_o = \frac{Mh_o}{Aer_o} = \frac{1100(0,520)}{2(0,02)(5)} = 2860 \text{ psi compresión}$$

- (f) Por tanto, la tracción máxima se presenta en las fibras exteriores de la sección con $R = 3\frac{1}{2}''$.

La compresión máxima se presenta en las fibras interiores de la sección con $R = 3\frac{1}{2}''$. El esfuerzo cortante máximo es la mitad de la mayor diferencia entre dos cualesquiera de los tres esfuerzos principales. Como sólo se presentan esfuerzos de flexión en la fibra externa, el esfuerzo cortante máximo es $\frac{1}{2}(-5930 - 0) = 2965 \text{ psi}$.

(Para efectos de comparación, el esfuerzo máximo en la viga recta es

$$s = \frac{Mc}{I} = \frac{1100(\frac{1}{2})}{2(1^3)/12} = 3300 \text{ psi tracción y compresión.})$$

2. Una grapa elástica, hecha de una varilla de 1" de diámetro se muestra en la figura 4-3. Determinar el esfuerzo cortante máximo y especificar su localización o localizaciones.

Solución:

- (a) Mediante inspección y comparación puede encontrarse la localización del esfuerzo normal máximo. Cualquier cuerpo libre tomado de la barra que incluya las dos fuerzas aplicadas tendrá el mismo momento flector, ya que las fuerzas aplicadas producen un par puro. El esfuerzo máximo de flexión se presentará en las fibras interiores de las secciones con radio interior de curvatura $r_i = 3''$ (de A a B y de C a D). El esfuerzo máximo no se presentará donde $r_i = 4''$.

$$(b) r_n = \frac{[r_o^{1/2} + r_i^{1/2}]^2}{4} = \frac{[4^{1/2} + 3^{1/2}]^2}{4} = 3,482''$$

$$(c) e = R - r_n = 3,5 - 3,482 = 0,018''$$

$$h_i = 0,50 - 0,018 = 0,482$$

$$(d) s_i = \frac{M h_i}{A e r_i} = \frac{500(0,482)}{\pi (1)^2 (0,018)(3)} = 5680 \text{ psi}$$

- (e) El esfuerzo desde A hasta B es de tracción y desde C hasta D es de compresión.

- (f) El esfuerzo cortante máximo es $\frac{1}{2}(5680) = 2840 \text{ psi}$ y se presenta en todos los puntos desde A hasta B y desde C hasta D.

- (g) Como la sección es simétrica, no es necesario verificar el esfuerzo máximo en las fibras externas.

3. Un eslabón abierto en S está hecho con varilla de 1" de diámetro. Determinar el esfuerzo máximo de tracción y el esfuerzo cortante máximo.

Solución:

- (a) Comparando las secciones A-A y B-B, en la figura 4-4, puede verse que el momento de flexión en A-A es menor que en B-B, pero el radio de curvatura es menor en A-A que en B-B. Es necesario investigar ambas secciones.

Sección A-A, punto P:

$$(b) M = 600 \text{ lb-pul}$$

$$(c) r_n = \frac{[r_o^{1/2} + r_i^{1/2}]^2}{4} = \frac{[(3\frac{1}{2})^{1/2} + (2\frac{1}{2})^{1/2}]^2}{4}$$

$$= 2,979''$$

$$e = R - r_n = 3,0 - 2,979 = 0,021''$$

$$h_i = 0,5 - 0,021 = 0,479''$$

$$\text{Esfuerzo de flexión + tracción directa} = \frac{M h_i}{A e r_i} + \frac{P}{A} = \frac{600(0,479)}{\frac{1}{4} \pi (1)^2 (0,021)(2,5)} + \frac{200}{\frac{1}{4} \pi (1)^2} = 6960 + 260 = 7220 \text{ psi}$$

tracción

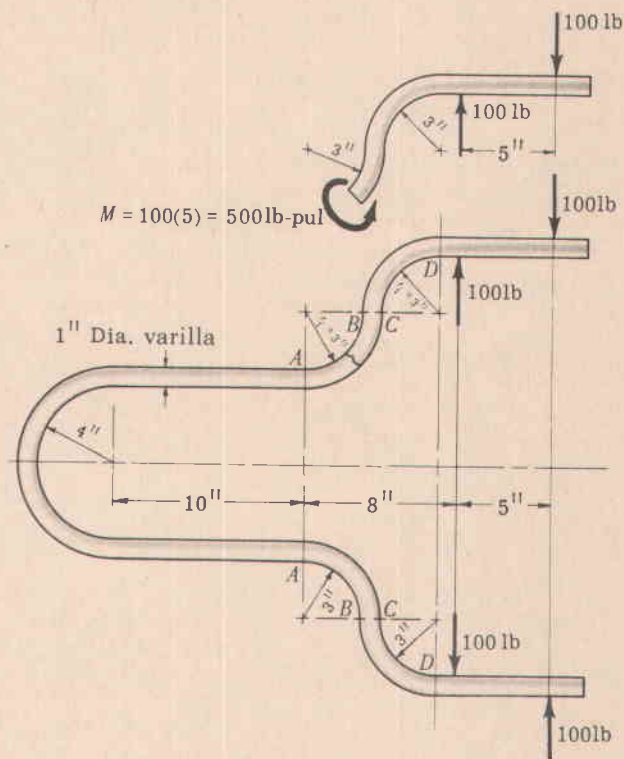


Fig. 4-3

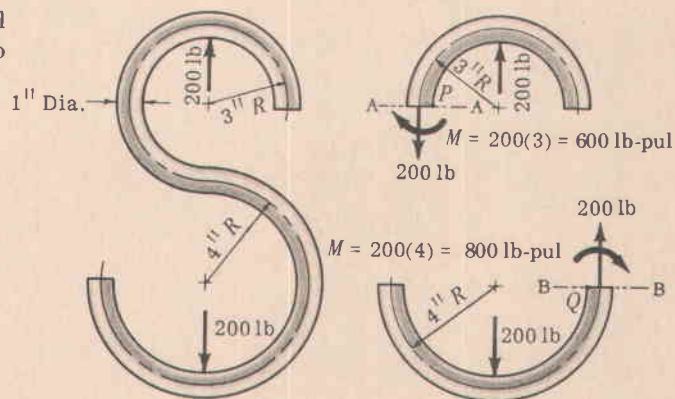


Fig. 4-4

Sección B-B, punto Q:

(d) $M = 800 \text{ lb-pul}$

$$r_n = \frac{[r_o^{1/2} + r_i^{1/2}]^2}{4} = \frac{[(4,5)^{1/2} + (3,5)^{1/2}]^2}{4} = 3,984''$$

$$e = 4,0 - 3,984 = 0,016'',$$

$$h_i = 0,5 - 0,016 = 0,484''$$

(e) Esfuerzo de flexión + tracción directa = $\frac{M h_i}{A e r_i} + \frac{P}{A} = \frac{800 (0,484)}{\frac{1}{4} \pi (1)^2 (0,016) (3,5)} + \frac{200}{\frac{1}{4} \pi (1)^2}$
 $= 8800 + 260 = 9060 \text{ psi tracción}$

(f) Cortante máximo = $\frac{1}{2} (9060) = 4530 \text{ psi en el punto Q.}$

4. Un barra doblada se carga como muestra la figura 4-5. El peso de la barra puede despreciarse. ¿Cuál es la máxima deformación (dimensión X) si el esfuerzo de tracción permitido se limita a 10.000 psi? ¿Dónde se presenta el esfuerzo máximo de tracción?

Solución:

- (a) Como la barra es simétrica, la flexión produce el mayor esfuerzo en la fibra interna. El punto P sobre la sección A-A tendrá el mayor esfuerzo.

(b) M para la sección A-A = $2000(X) \text{ lb-pul.}$

$$r_n = \frac{[r_o^{1/2} + r_i^{1/2}]^2}{4} = \frac{[(6,0)^{1/2} + (2,0)^{1/2}]^2}{4} = 3,732''$$

$$e = R - r_n = 4 - 3,732 = 0,268''$$

$$h_i = 2 - 0,268 = 1,732''$$

$$A = \frac{1}{4} \pi (4)^2 = 12,56 \text{ pul}^2.$$

- (c) El esfuerzo permisible de tracción es 10.000 psi.

$$\text{Esfuerzo de flexión + tracción directa} = \frac{M h_i}{A e r_i} + \frac{P}{A}$$

$$\text{o, } 10.000 = \frac{2000(X)(1,732)}{12,56(0,268)(2)} + \frac{2000}{12,56}$$

de la cual $X = 19''$, es la deformación máxima.

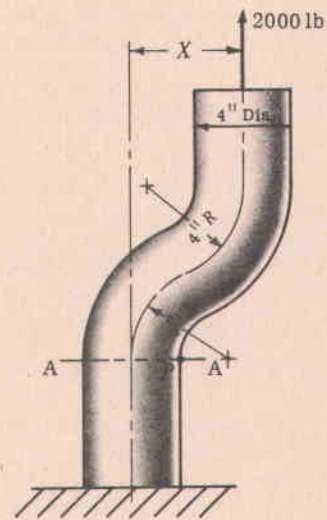


Fig. 4-5

5. Establecer las relaciones básicas necesarias para obtener la distribución de esfuerzos en una viga curva, debidos a la flexión considerada aisladamente y deducir la ecuación que da la distribución de los esfuerzos de flexión.

Solución:

- (a) Considerar un elemento diferencial de la viga correspondiente a un ángulo $d\theta$.

- (b) Como resultado de la flexión, y de que las secciones planas permanecen planas, una sección cualquiera $p-q$ rota a $p'-q'$, con tracción sobre la fibra interna y compresión sobre la externa. La rotación deja fijo un punto sobre el eje neutro.

- (c) El alargamiento de la fibra a una distancia y de la superficie neutra es $y d\phi$.

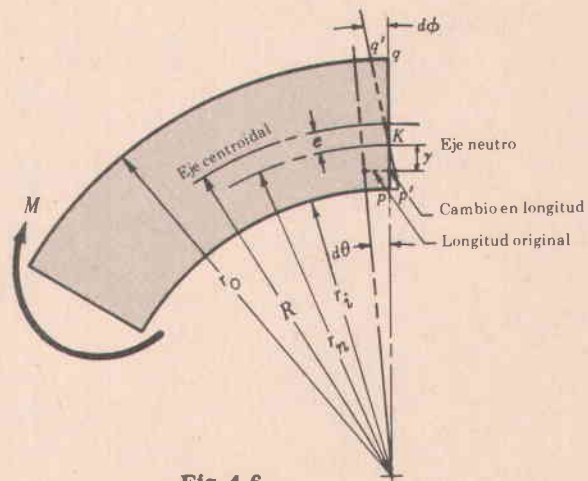


Fig. 4-6

(d) La longitud original de la fibra diferencial es $(r_n - y) d\theta$.

(e) Como el esfuerzo es proporcional a la deformación,

$$s = \epsilon E = \frac{\Delta l}{l} E \quad \text{o} \quad s = \frac{y d\phi}{(r_n - y) d\theta} E, \quad \text{donde } s \text{ es el esfuerzo de flexión.}$$

(f) La suma de todas las fuerzas diferenciales debe ser cero para el equilibrio; entonces

$$\int s dA = 0 \quad \text{o} \quad \int \frac{y d\phi E dA}{(r_n - y) d\theta} = 0 \quad \text{o} \quad \frac{d\phi}{d\theta} E \int \frac{y dA}{r_n - y} = 0$$

(g) Además, el momento de las fuerzas diferenciales alrededor de cualquier punto debe ser igual al par aplicado M .

Tomando el punto K como un centro conveniente de momentos

$$\int s y dA = M \quad \text{o} \quad \int \left[\frac{y d\phi}{(r_n - y) d\theta} E \right] y dA = M \quad \text{o} \quad \frac{d\phi}{d\theta} E \int \frac{y^2}{r_n - y} dA = M$$

(h) Manejando $\int \frac{y^2}{r_n - y} dA = M$ y dividiendo $(r_n - y)$ por y^2 , se obtiene

$$r_n \int \frac{y}{r_n - y} dA - \int y dA = M$$

(i) Pero de (f), $\int \frac{y}{r_n - y} dA = 0$ y $\int y dA$ representa el momento alrededor del eje neutro de las áreas diferenciales que comprenden la sección. Por tanto, $\int y dA$ puede escribirse como Ae , donde e es la distancia del eje neutro al eje centroidal.

(j) Así, la ecuación en (g) puede escribirse $\frac{d\phi}{d\theta} E \int \frac{y^2}{r_n - y} dA = M = \frac{d\phi}{d\theta} E [Ae] \quad \text{o} \quad \frac{d\phi}{d\theta} E = \frac{M}{Ae}$

(k) La ecuación de esfuerzos en (e) puede escribirse $s = \frac{y d\phi}{(r_n - y) d\theta} E = \frac{M}{Ae} \frac{y}{r_n - y}$ la cual da la variación del esfuerzo.

6. La figura 4-7 muestra una sección de una prensa en C. ¿Qué fuerza F puede ejercer el tornillo si el esfuerzo máximo de tracción en la prensa se limita a 20.000 psi?

Solución:

(a) El esfuerzo máximo de tracción ocurre en el punto P en la sección A-A, en la cual la flexión es máxima, existe una curvatura, y actúa un esfuerzo directo de tracción.

(b) La distancia del centro de curvatura al eje del C. G. es, de la Tabla I,

$$R = r_i + \frac{\frac{1}{2} h^2 t + \frac{1}{2} t_i^2 (b_i - t)}{h t + (b_i - t) t_i} = 1 + \frac{\frac{1}{2} (1)^2 (\frac{1}{8}) + \frac{1}{2} (\frac{1}{8})^2 (\frac{3}{4} - \frac{1}{8})}{(1)(\frac{1}{8}) + (\frac{3}{4} - \frac{1}{8})(\frac{1}{8})} = 1,332''$$

(c) También, de la Tabla I,

$$r_n = \frac{(b_i - t)(t_i) + th}{(b_i - t) \log_e \frac{r_i + t_i}{r_i} + t \log_e \frac{r_o}{r_i}} = \frac{(\frac{3}{4} - \frac{1}{8})(\frac{1}{8}) + (\frac{1}{8})(1)}{(\frac{3}{4} - \frac{1}{8}) \log_e \frac{1 + \frac{1}{8}}{1} + \frac{1}{8} \log_e \frac{2}{1}} = 1,267''$$

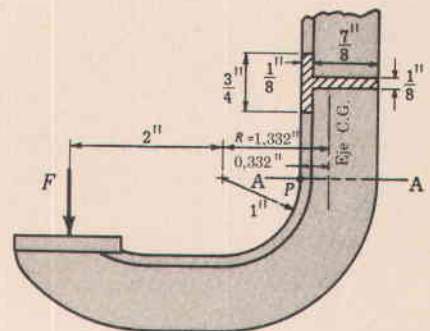


Fig. 4-7

$$(d) \quad e = R - r_n = 1,332 - 1,267 = 0,065''. \quad h_i = r_n - r_i = 1,267 - 1,0 = 0,267''.$$

$$(e) \quad \text{Area} = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{4} \right) + \frac{7}{8} \left(\frac{1}{8} \right) = 0,203 \text{ pul}$$

$$(f) \quad \text{Momento de flexión (alrededor del C. G.)} = F(2 + 1,332) = 3,332F$$

$$(g) \quad \text{Esfuerzo de flexión} + \text{esfuerzo directo} \quad \frac{Mh_i}{Aer_i} + \frac{F}{A}$$

$$20.000 = \frac{3,332F(0,267)}{(0,203)(0,065)(1)} + \frac{F}{0,203}, \quad \text{y } F(\text{máximo}) = 276 \text{ lb}$$

(h) Notar que el esfuerzo en la fibra externa puede ser mayor en este caso que el esfuerzo en la fibra interna, pero este esfuerzo es de compresión.

7. Una bandeja de 1" de espesor por 8" de largo está sometida a una carga de 400 lb. Determinar la magnitud y localización de los esfuerzos máximos de tracción, compresión y corte.

Solución:

- (a) La localización del esfuerzo máximo de flexión puede reducirse, por inspección, a tres localizaciones diferentes:

- 1) Sección A-A
- 2) Sección B-B
- 3) Sección C-C

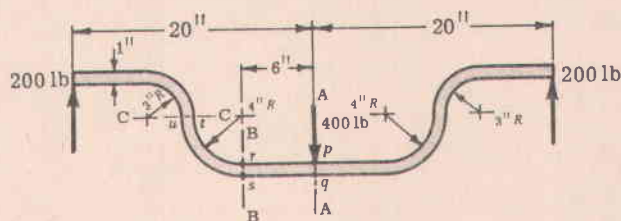


Fig. 4-8

En la sección A-A, el momento de flexión es máximo pero la viga es recta.

En la sección B-B, el momento de flexión es menor que en A-A pero la viga tiene curvatura.

En la sección C-C, el momento de flexión es menor que en A-A y B-B pero la viga tiene un radio de curvatura menor. También en C-C existe un esfuerzo directo de tracción, el cual no existe en las otras secciones.

Por tanto, el esfuerzo se hallará en las tres secciones diferentes para compararlo. (Sólo es necesario calcular los esfuerzos a un lado de la línea central ya que la viga es simétrica.)

- (b) Sección A-A

$$s = \frac{Mc}{I} = \frac{Mc}{bh^3/12} = \frac{(200 \times 20) \frac{1}{2}}{8(1^3)/12} = 3000 \text{ psi (tracción en el punto } q, \text{ compresión en el punto } p)$$

Nota. El esfuerzo cortante trasversal es cero en los puntos p y q .

- (c) Sección B-B

$$\text{Punto } r: \quad s_i = \frac{Mh_i}{Aer_i} = \frac{(200 \times 14)(0,5 - 0,019)}{8(0,019)(4)} = 2215 \text{ psi (compresión)}$$

$$\text{donde } r_n = \frac{h}{\log_e r_o/r_i} = \frac{1}{\log_e 5/4} = 4,481'', \quad e = R - r_n = 4,5 - 4,481 = 0,019''$$

$$\text{Punto } s: \quad s_o = \frac{Mh_o}{Aer_o} = \frac{(200 \times 14)(0,5 + 0,019)}{8(0,019)(5)} = 1910 \text{ (tracción)}$$

(d) Sección C-C

Punto t: En el punto *t* el esfuerzo debido a la flexión es de compresión y el esfuerzo directo es de tracción. Por tanto, los esfuerzos se restan entre sí. El esfuerzo de flexión en el punto *t* es

$$s_o = \frac{Mh_o}{Aer_o} = \frac{(200 \times 9,5)(0,5 + 0,024)}{8(0,024)(4)} = 1300 \text{ psi (compresión)}$$

$$\text{donde } r_n = \frac{h}{\log_e r_o/r_i} = \frac{1}{\log_e 4/3} = 3,476'' \quad e = R - r_n = 3,5 - 3,476 = 0,024''$$

$$P/A = 200/8 = 25 \text{ psi}$$

$$\text{Esfuerzo neto} = 1300 - 25 = 1275 \text{ psi (compresión)}$$

Punto u:

$$s_i = \frac{Mh_i}{Aer_i} = \frac{(200 \times 9,5)(0,5 - 0,024)}{8(0,024)(3)} = 1570 \text{ psi (tracción)}$$

$$P/A = 200/8 = 25 \text{ psi}$$

$$\text{Esfuerzo total} = 1570 + 25 = 1595 \text{ psi (tracción)}$$

- (e) El esfuerzo máximo se presenta en la sección recta, A-A, y es 3000 psi (tracción en el punto *q* y compresión en el punto *p*).

El esfuerzo cortante máximo se presenta tanto en *p* como en *q* y es $\frac{1}{2}(3000) = 1500 \text{ psi}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

8. La interferencia de las partes de una máquina exige el uso de un elemento de acero como muestra la figura 4-9. Si se aplica una carga de 175 lb, determinar el esfuerzo máximo de tracción y el esfuerzo cortante máximo e indicar su localización. Resp. 2670 psi, 1335 psi; ambos se presentan en el punto A
9. Una remachadora hidráulica portátil tiene una fuerza máxima de remachado de 15.000 lb. El marco en U está hecho de acero fundido con un esfuerzo último de tracción de 70.000 psi y un punto de fluencia de 35.000 psi. Con referencia a la figura 4-10, considerar únicamente la sección A-A y determinar:

- (a) Momento de flexión
(b) Distancia entre eje centroidal y eje neutro
(c) Fuerza directa de tracción
(d) Esfuerzo máximo de tracción
(e) Esfuerzo cortante máximo

- Resp. (a) 159.000 lb-pul
(b) 0,334''
(c) 10.600 lb
(d) 17.860 psi en el punto P
(e) 8930 psi en el punto P

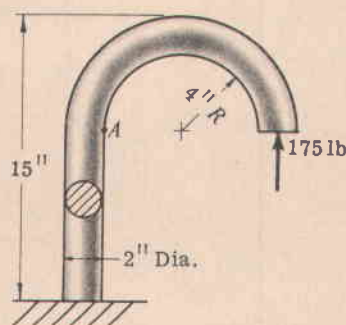


Fig. 4-9

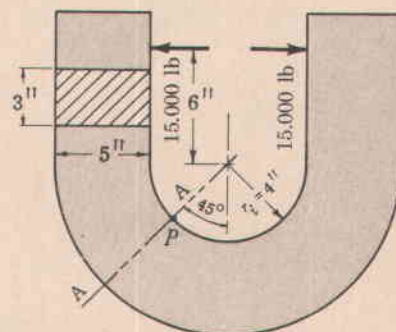


Fig. 4-10

10. Un anillo está hecho con una barra de 3 pul de diámetro. El diámetro interno del anillo es 4". Para la carga mostrada en la figura 4-11 calcular el esfuerzo cortante máximo en la barra y especificar su localización.
 Resp. 4210 psi en el punto A

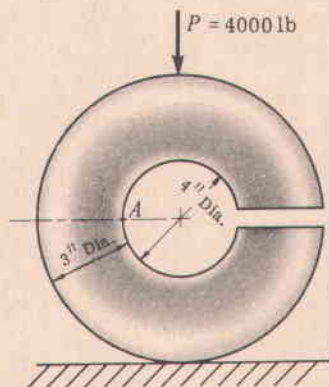


Fig. 4-11

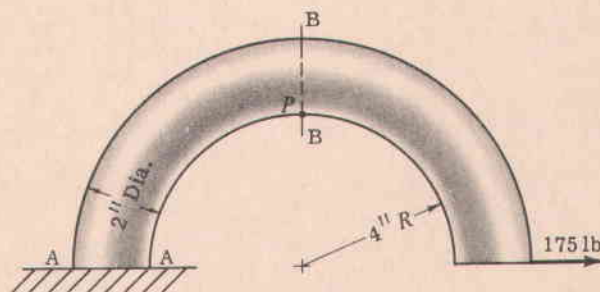


Fig. 4-12

11. Determinar la magnitud y la localización del esfuerzo máximo de tracción en una parte de una máquina cargada, como muestra la figura 4-12. Resp. 1360 psi en el punto P
12. Un gancho de grúa hecho con una barra de 2 pul está cargado, como muestra la figura 4-13. Determinar el esfuerzo máximo de tracción y especificar su localización. Resp. 5680 psi en el punto A
13. Un elemento de una máquina está hecho con una varilla de 1" de diámetro y está cargado como muestra la figura 4-14.
- (a) ¿Dónde se presenta el esfuerzo máximo de tracción? Resp. (a) En el punto P sobre la sección A-A
 (b) ¿Cuál es el momento de flexión en la sección más esforzada? (b) 210 lb-pul
 (c) ¿Cuál es la carga directa en la sección más esforzada? (c) 20 lb
 (d) ¿Cuál es el esfuerzo máximo de tracción? (d) 2430 psi

14. La estructura de soporte de una grúa móvil de 1 tonelada tiene las dimensiones mostradas en la figura 4-15. Determinar: (a) localización del esfuerzo máximo de compresión, (b) localización del esfuerzo cortante máximo, (c) momento de flexión en la sección A-A, (d) carga directa de compresión en la sección A-A, (e) esfuerzo máximo de compresión, (f) esfuerzo cortante máximo.
 Resp. (a) punto P sobre la sección A-A, (b) punto P sobre la sección A-A, (c) 71.000 lb-pul (d) 2000 lb, (e) 4800 psi, (f) 2400 psi

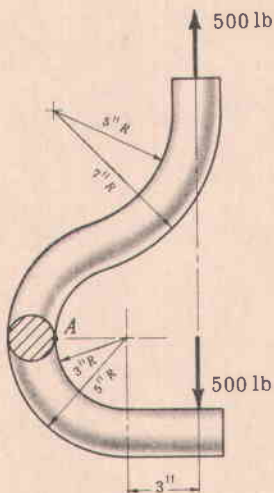


Fig. 4-13

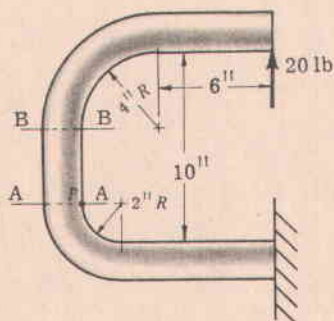


Fig. 4-14

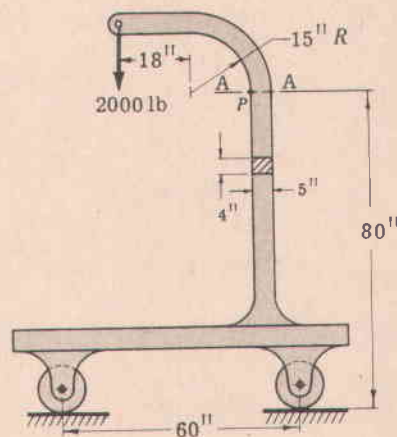


Fig. 4-15

15. La línea central de la viga portante del carro móvil inferior de una grúa se muestra en la figura 4-16. La viga está soportada sobre rodamientos en C y D . Considerando la viga como si fuera hecha de una barra de 2 pul de diámetro, (a) ¿cuáles son las reacciones en C y D ? (b) ¿Cómo varía el momento de flexión en las secciones perpendiculares al eje de la viga entre A y B ? (c) Determinar la sección o las secciones más esforzadas. (d) ¿Cuál es el esfuerzo máximo?

Resp. (a) Reacción en $C = 1000$ lb, en $D = 1000$ lb. (b) El momento de flexión es el mismo en cualquier sección entre A y B , 10.000 lb-pul. (c) De A a E y de F a B . (d) 15.700 psi tracción

16. En la pequeña prensa mostrada en la figura 4-17, se ejerce una fuerza $W = 1000$ lb entre la prensa en C y el tornillo. (a) Si el esfuerzo cortante máximo permisible es 7500 psi, el esfuerzo de tracción máximo permisible es 15.000 psi y el esfuerzo de compresión máximo permisible es 15.000 psi, ¿está diseñada adecuadamente la prensa en C , desde el punto de vista de su resistencia? (b) Si el diseño no es apropiado, ¿qué cambios deberían hacerse para mejorarlo? Suponer que el análisis se hace después de apretar el tornillo.

Resp. (a) El diseño no es satisfactorio, porque el esfuerzo máximo de tracción es 45.300 psi y el permitido es 15.000 psi (o el esfuerzo cortante máximo es 22.700 psi y el permitido es 7500 psi).

- (b) 1. Una sección diferente, como una I o una T , podría emplearse. 2. Aumentar el radio de curvatura. 3. Aumentar el diámetro de la prensa

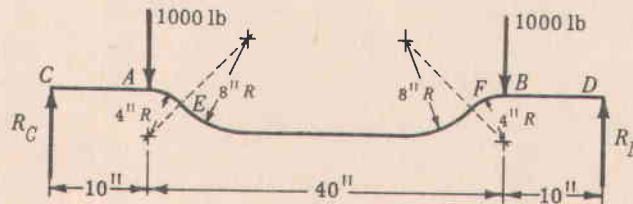


Fig. 4-16

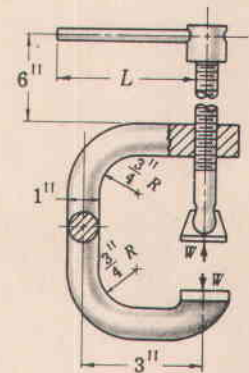


Fig. 4-17

17. Un gancho de grúa tiene una sección, la cual, para efectos de análisis, se considera trapezoidal. La tracción máxima (y corte) se presenta en el punto P , como muestra la figura 4-18. Determinar (a) la distancia R del centro de curvatura al eje centroidal, (b) el momento de flexión para la sección $A-A$, (c) la distancia del centro de curvatura al eje neutro, (d) el área, (e) el esfuerzo máximo de tracción (punto P), (f) el esfuerzo máximo en el punto Q .

Resp. (a) 4,33", (b) 86.600 lb-pul, (c) 4,0", (d) $10\frac{1}{8}$ pul², (e) 17.500 psi, (f) 9130 psi (compresión)

18. Un eslabón se encuentra torcido, como muestra la figura 4-19, para permitir espacio a las partes adyacentes. Determinar el esfuerzo cortante máximo y especificar su localización (o localizaciones).

Resp. 1970 psi; puntos A y B

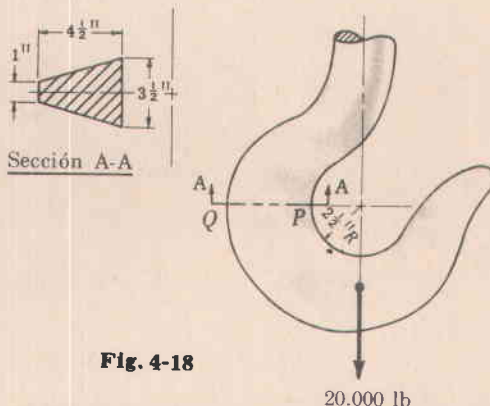


Fig. 4-18

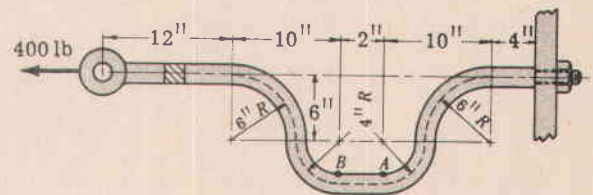


Fig. 4-19

Capítulo 5

Deformación y pandeo de elementos de máquinas

LA RIGIDEZ puede ser el factor determinante, en algunos casos, para el diseño de un elemento de una máquina. El elemento puede ser suficientemente fuerte para evitar una falla por esfuerzo, pero puede carecer de la rigidez adecuada para una operación satisfactoria. Los temas siguientes analizarán la rigidez desde el punto de vista de la deformación axial, la deformación torsional, la deformación por flexión, la deformación debida al corte, y el pandeo debido al efecto de columna.

LA DEFORMACION AXIAL δ debida a una carga axial F se basa en la ley de Hooke,

$$s = \left(\frac{\delta}{L}\right)(E) = \frac{F}{A}$$

de la cual

$$\delta = \frac{FL}{AE}$$

donde

δ = deformación axial, pul (cm)

L = longitud axial del elemento antes de la aplicación de la carga axial, pul (cm)

A = área de la sección transversal, pul² (cm²)

E = módulo de elasticidad, psi (kg/cm²)

LA DEFORMACION TORSIONAL θ° debida a una carga de torsión sobre una sección circular sólida es

$$\theta^\circ = \frac{584 TL}{GD^4}$$

Para un elemento hueco de sección transversal circular, la deformación angular es

$$\theta^\circ = \frac{584 TL}{G(D_o^4 - D_i^4)}$$

donde

θ° = deformación torsional, grados

T = momento de torsión, lb-pul (kg-cm)

D = diámetro del elemento sólido, pul (cm)

D_o = diámetro exterior del elemento hueco, pul (cm)

D_i = diámetro interior del elemento hueco, pul (cm)

L = longitud axial del elemento, entre el punto de aplicación del momento de torsión y el punto de aplicación del momento resistente, pul (cm)

G = módulo de rigidez, psi (kg/cm²)

Para un elemento rectangular sólido la deformación torsional es

$$\theta^{\circ} = \frac{57,3 TL}{abc^3 G}$$

donde

b = lado largo del rectángulo, pul (cm)

c = lado corto del rectángulo, pul (cm)

a = factor dependiente de la relación b/c , como sigue:

$b/c = 1,000$	1,500	1,750	2,000	2,500	3,000	4,000	6,000	8,000	10,000	∞
$a = 0,141$	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

G = módulo de rigidez, psi (kg/cm²)

L = longitud del elemento, pul (cm)

LA DEFORMACION LATERAL debida a la flexión puede determinarse resolviendo la ecuación diferencial de la curva elástica del eje neutro,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$$

donde

M = momento de flexión, lb-pul (kg-cm)

I = momento rectangular de inercia, pul⁴ (cm⁴)

E = módulo de elasticidad, psi (kg/cm²)

y = deformación, pul (cm)

x = distancia del extremo del miembro a la sección en donde se determina la deformación, pul (cm)

Una solución analítica directa de esta ecuación por medio de doble integración es bastante tediosa para cargas múltiples y para vigas que tienen cambios en la sección transversal. Las soluciones pueden obtenerse más fácilmente por medio de métodos tales como: El método del momento de las áreas, la viga conjugada, el uso de funciones escalón, la aplicación del teorema de Castigliano o mediante integración gráfica.

EL METODO DEL MOMENTO DE LAS AREAS

para determinar la deformación de una viga debida a la flexión, se basa en la proposición de que la distancia vertical de un punto cualquiera A sobre la curva elástica de una viga medida desde la tangente hasta cualquier otro punto B sobre la misma curva, es igual al momento del área del diagrama M/EI comprendida entre los puntos A y B con respecto a la ordenada trazada en A . Ver figura 5-1.

$$\Delta = A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + \dots$$

donde

A_1 = área de la parte I del diagrama M/EI

$\bar{x}_1$ = distancia de la ordenada en A al centro de gravedad de A_1

A_2 = área de la porción II del diagrama M/EI

$\bar{x}_2$ = distancia de la ordenada en A al centro de gravedad de A_2 .

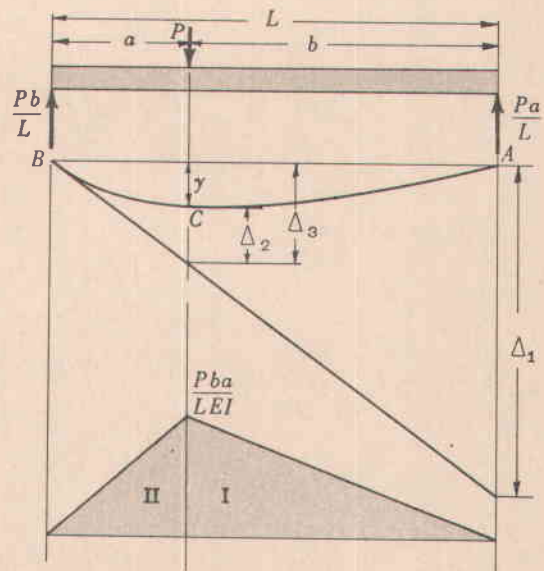


Fig. 5-1

Una viga simple de longitud L con una carga concentrada P localizada a una distancia a del soporte izquierdo y a una distancia b del derecho puede usarse para ilustrar el procedimiento anterior. Con referencia a la figura 5-1, para determinar la deformación y bajo la carga P deben seguirse los siguientes pasos:

1. Dibujar la curva elástica.
2. Dibujar una tangente a la curva elástica en el punto B localizado en la reacción izquierda.
3. Dibujar el diagrama M/EI .
4. Determinar Δ_1 sumando los momentos de las áreas de la sección I y de la sección II con respecto al soporte derecho:

$$\Delta_1 = \left(\frac{Pb^2a}{2LEI} \right) \left(\frac{2b}{3} \right) + \left(\frac{Pba^2}{2LEI} \right) \left(b + \frac{a}{3} \right) = \frac{Pb^3a}{3LEI} + \frac{Pb^2a^2}{2LEI} + \frac{Pba^3}{6LEI}$$

5. Determinar Δ_2 que es igual al momento de la sección II con respecto a un eje vertical en el punto C :

$$\Delta_2 = \left(\frac{Pba^2}{2LEI} \right) \left(\frac{a}{3} \right) = \frac{Pba^3}{6LEI}$$

6. Determinar Δ_3 por proporción:

$$\Delta_3 = \frac{a \Delta_1}{L} = \frac{Pb^3a^2}{3L^2EI} + \frac{Pb^2a^3}{2L^2EI} + \frac{Pba^4}{6L^2EI}$$

7. Entonces

$$y = \Delta_3 - \Delta_2 = \frac{Pb^3a^2}{3L^2EI} + \frac{Pb^2a^3}{2L^2EI} + \frac{Pba^4}{6L^2EI} - \frac{Pba^3}{6LEI}$$

En el ejemplo anterior debe notarse que las áreas de las secciones I y II son positivas. Si alguna parte del diagrama M/EI es negativa, el momento de dicha parte debe tomarse como negativo.

EL METODO DE LA VIGA CONJUGADA para determinar la deformación lateral debida a la flexión de una viga se basa en la similitud matemática existente entre los diagramas de cargas, fuerzas cortantes y momentos flectores y los diagramas de carga con M/EI , pendiente y deformación:

$$f(x) = w = \frac{dV}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}, \quad f(x) = \frac{M}{EI} = \frac{d\alpha}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Debido a la similitud de las ecuaciones anteriores, la base de la solución se encuentra en los siguientes principios:

1. La "fuerza cortante" en la viga conjugada es equivalente a la pendiente en la viga real.
2. El "momento flector" en la viga conjugada es equivalente a la deformación en la viga real.

No obstante, la viga conjugada debe establecerse de modo que queden satisfechas las condiciones de contorno. Donde la pendiente de la viga original no es cero, debe existir una "fuerza cortante" en la viga conjugada. Si la carga es tal que no existe el "corte", al cargar la viga conjugada debe introducirse una "fuerza cortante". En la misma forma, si la deformación no es cero, debe existir un "momento". Si la carga es tal que no existe el "momento", al cargar la viga conjugada debe introducirse un "momento".

Para demostrar el procedimiento anterior, consideremos una viga en voladizo con una sección transversal constante y una carga concentrada P en el extremo, como muestra la figura 5-2. Los pasos siguientes determinarán la deformación en el extremo de la viga:

- a. Dibujar el diagrama de momentos flectores.
- b. Cargar la viga conjugada de modo que la intensidad de la carga en cualquier sección sea igual a la ordenada de M/EI .

- c. Para satisfacer las condiciones de contorno debe existir un valor de la pendiente, o "corte", en la sección de la viga conjugada sometida a la carga P , representado por la reacción " R ". Para que exista una deformación o "momento" en la reacción, debe existir un "momento" (" M ") aplicado en el extremo derecho de la viga.
- d. La "carga" triangular distribuida sobre la viga conjugada puede entonces considerarse equivalente al área de este triángulo, $PL^2/2EI$, concentrada en el centroide del triángulo.
- e. Sumando "fuerzas" verticales, la "reacción" en el extremo derecho de la viga es $PL^2/2EI$.
- f. Tomando momentos en el extremo derecho de la viga conjugada tenemos,

$$-\frac{PL^2}{2EI} \left(\frac{2L}{3} \right) + "M" = 0$$

o " M " = $PL^3/3EI$, que es la deformación en el extremo derecho de la viga.

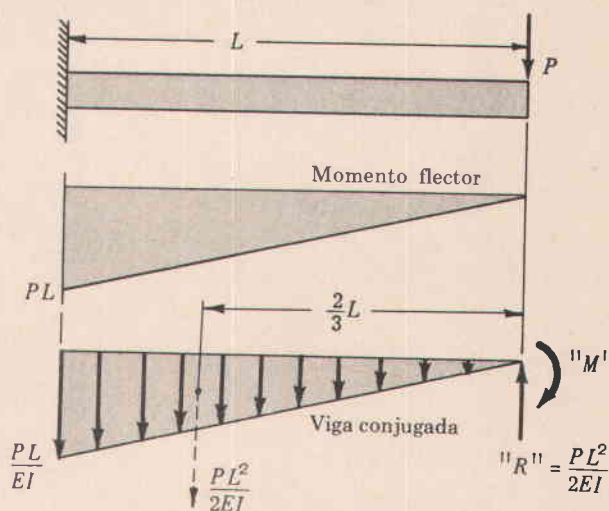


Fig. 5-2

LA APLICACION DE FUNCIONES ESCALON para determinar la deformación de una viga debida a la flexión requiere la evaluación de dos constantes de integración únicamente, para cualquier número de cargas o cambios de sección que tenga la viga. Al aplicar el método corriente de la doble integración se escribe la ecuación M/EI para cada sección de la viga y deben evaluarse dos constantes de integración para cada sección.

El uso de funciones escalón suministra un medio de escribir matemáticamente una expresión simple para M/EI que es válida para cualquier sección de la viga, la cual, después de la doble integración conduce a una expresión única para la deformación, válida para cualquier sección de la viga.

Una función escalón, como se usará posteriormente, se define mediante la siguiente notación:

H_a es una función escalón donde

$$H_a = 0 \text{ si } x < a$$

$$H_a = 1 \text{ si } x \geq a$$

H_b es una función escalón donde

$$H_b = 0 \text{ si } x < b$$

$$H_b = 1 \text{ si } x \geq b$$

El producto de dos funciones escalón es entonces, para $b > a$,

$$H_a H_b = 0 \text{ si } x < b$$

$$H_a H_b = 1 \text{ si } x \geq b$$

Un dibujo de las funciones escalón anteriores se muestra en la figura 5-3.

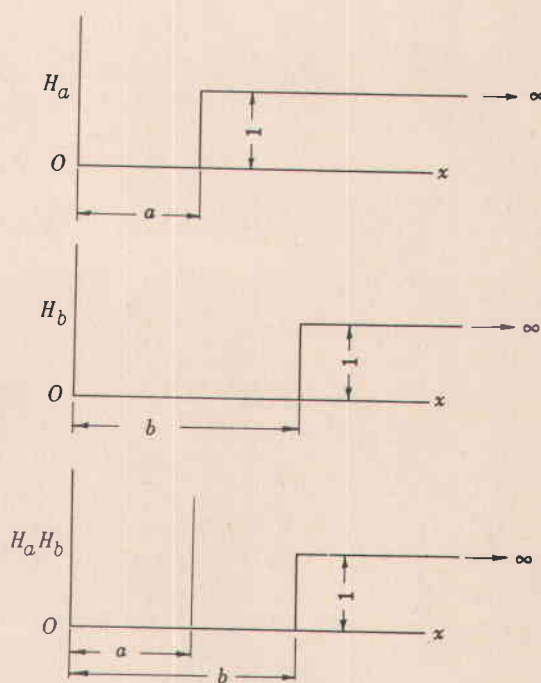


Fig. 5-3

El procedimiento matemático para integrar una función escalón multiplicada por una función $f(x)$ es

$$\int_0^x H_a f(x) dx = H_a \int_a^x f(x) dx$$

Ejemplo 1. Sea $f(x) = x^2$.

$$\int_0^x H_a x^2 dx = H_a \int_a^x x^2 dx = \left[H_a \frac{x^3}{3} \right]_a^x + C = H_a \frac{x^3 - a^3}{3} + C$$

donde C = constante de integración.

Ejemplo 2. Cuando $b > a$,

$$\begin{aligned} \int_0^x H_b H_a (x-a) dx &= H_b \int_b^x (x-a) dx \\ &= H_b \left[\frac{(x-a)^2}{2} \right]_b^x + C = H_b \frac{(x-a)^2 - (b-a)^2}{2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 3. El método para manejar los cambios de sección por medio de funciones escalón se demuestra como sigue: la figura 5-4 muestra una viga con tres secciones con momentos de inercia diferentes. F_1 y F_2 son cargas pendientes y existen rodamientos fijos en R_L y en R_R . La ecuación de momentos válida para cualquier sección es

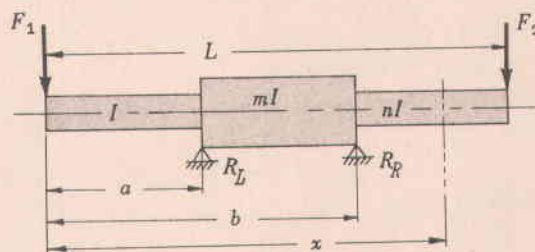


Fig. 5-4

$$M = -F_1 x + R_L (x-a) H_a + R_R (x-b) H_b$$

Ahora, $1/I_x$, el recíproco del momento de inercia en cualquier sección, puede escribirse

$$\frac{1}{I_x} = \frac{1}{I} \left[1 - H_a + \frac{H_a}{m} - \frac{H_b}{m} + \frac{H_b}{n} \right]$$

de la cual

$$\begin{aligned} IE \frac{d^2 y}{dx^2} &= \left[-F_1 x + R_L (x-a) H_a + R_R (x-b) H_b \right] \left[1 + H_a \left(\frac{1}{m} - 1 \right) + H_b \left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right] \\ &= -F_1 x + R_L (x-a) H_a + R_R (x-b) H_b - F_1 x H_a \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \\ &\quad + R_L (x-a) H_a H_a \left(\frac{1}{m} - 1 \right) + R_R (x-b) H_b H_a \left(\frac{1}{m} - 1 \right) \\ &\quad - F_1 x H_b \left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) + R_L (x-a) H_a H_b \left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \\ &\quad + R_R (x-b) H_b H_b \left(-\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \end{aligned}$$

La doble integración puede completarse como se explicó anteriormente, notando que $H_a H_a = H_a$ y $H_a H_b = H_b$.

LAS DEFORMACIONES DEBIDAS AL CORTE pueden ser significativas, por ejemplo en elementos de máquinas que son cortos en comparación con su profundidad, o en elementos huecos de gran diámetro. En tales casos la deformación

debida al corte debe añadirse a la deformación debida a la flexión. Esto puede ser de importancia considerable cuando se calculan deformaciones para determinar la velocidad crítica de elementos en rotación. Una expresión para la deformación y_1 debida al corte puede determinarse considerando un elemento diferencial en el eje centroidal de un elemento sometido a una carga transversal, como se muestra en la figura 5-5.

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{s_s \text{ (en el eje neutro)}}{G} + C_1 = \frac{VQ_{\max}}{IbG} + C_1$$

(Ver capítulo 2 para la discusión de $\frac{VQ}{Ib}$.)

donde C_1 es una constante que tiene en cuenta el ángulo de rotación de las secciones transversales con respecto a la línea de deformación nula. (Todas las secciones transversales rotan el mismo ángulo.) Integrando,

$$y_1 = \frac{KVx}{AG} + C_1x + C_2 \quad \text{donde } K = \frac{QA}{Ib}$$

$K = 4/3$ para sección transversal circular,

$K = 3/2$ para sección transversal rectangular.

(Para la figura 5-5, $C_1 = 0$. Ver figura 5-19 para una ilustración de C_1 .)

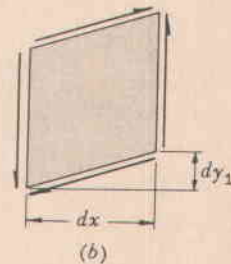
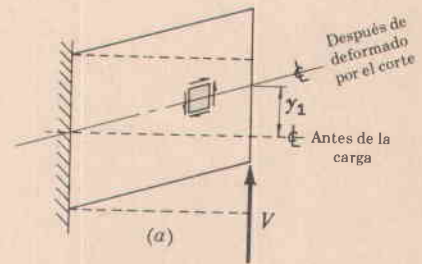


Fig. 5-5

EL TEOREMA DE CASTIGLIANO puede usarse para determinar la deformación de elementos sencillos, así como de estructuras más complejas. Este teorema se basa en las relaciones entre energía y deformación. Por ejemplo, la energía de deformación U de un elemento de longitud L en tracción simple es

$$U = \frac{F^2L}{2AE}$$

y tomando la derivada parcial de esta expresión con respecto a F , podemos determinar la deformación δ del elemento en la dirección de la fuerza aplicada F :

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{FL}{AE} = \delta$$

También, tomando la derivada parcial de la energía torsional de deformación, podemos determinar el ángulo de torsión de un elemento con sección transversal circular cuando está sometido a un momento de torsión T :

$$U = \frac{T^2L}{2GJ} \quad \text{y} \quad \frac{\partial U}{\partial T} = \frac{TL}{GJ} = \theta \text{ (radianes)}$$

Tanto en las expresiones anteriores como en las siguientes se supone que el material del sistema sigue la Ley de Hooke. La energía de deformación en una viga recta sometida a un momento de flexión M es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

La energía de deformación en una viga curva sometida a un momento de flexión M es

$$U = \int \frac{M^2 d\phi}{2AeE}$$

La energía de deformación en un elemento recto sometido a una fuerza cortante transversal V es

$$U = \int \frac{KV^2 dx}{2AG}$$

La energía de deformación en una viga curva sometida a una fuerza cortante transversal V es

$$U = \int \frac{KV^2 ds}{2AG} = \int \frac{KV^2 R d\phi}{2AG}$$

Con referencia a la figura 5-6, la energía diferencial almacenada en la sección diferencial, debida al momento flector M , la fuerza normal P , y la fuerza cortante V , puede escribirse

$$dU = \frac{M^2 d\phi}{2AeE} + \left(\frac{P^2 R d\phi}{2AE} - \frac{MP d\phi}{AE} \right) + \frac{KV^2 R d\phi}{2AG}$$

donde $\frac{M^2 d\phi}{2AeE}$ = energía de deformación debida al momento de flexión actuando aisladamente.

$\frac{P^2 R d\phi}{2AE}$ = energía de deformación debida a la fuerza normal P actuando aisladamente.

$-\frac{MP d\phi}{AE}$ = energía de deformación resultante del hecho de que P tiende a rotar las caras del elemento contra el par resistente M .

Notar que en el caso de la figura 5-6, este término es negativo ya que la fuerza P tiende a aumentar el ángulo entre las dos caras, mientras los pares M tienden a disminuir el ángulo entre las dos caras de la sección. Si se invirtiera el sentido de P , entonces tanto P como los pares M tenderían a disminuir el ángulo entre las dos caras.

$\frac{KV^2 R d\phi}{2AG}$ = energía de deformación debida a la fuerza cortante V .

La aplicación de las expresiones anteriores resuelve problemas de deformación basados en el teorema de Castigliano que establece que la derivada parcial de la energía de deformación con respecto a cualquier fuerza (o par) da el desplazamiento (o ángulo de giro) correspondiente a la fuerza (o par). En otras palabras, si la energía total de deformación de un sistema se expresa como una función de una o más fuerzas, entonces la deformación en la dirección de cualquier fuerza seleccionada puede determinarse tomando la derivada parcial de la energía total de deformación con respecto a la fuerza particular seleccionada. También, si la energía total de deformación es función de un par así como de una o más fuerzas, entonces la derivada parcial de la energía total de deformación con respecto al par da el ángulo de rotación de la sección sobre la cual actúa el par. El teorema de Castigliano puede usarse también para encontrar la deformación en un punto en el cual no existe carga en la dirección de la deformación deseada, adicionando una carga Q en el punto seleccionado y en la dirección en la cual se busca la deformación. Entonces la derivada parcial $\partial U / \partial Q$ da la deformación deseada cuando se hace Q igual a cero.

LA INTEGRACION GRAFICA es otro método para obtener una curva de deformación de un eje sometido a cargas de flexión. Se ilustra el método por medio del siguiente ejemplo simplificado, con los pasos siguientes. Referirse a la figura 5-7.

1. Dividir el área en secciones, con ordenadas y_1, y_2 , etc., en los puntos medios de x_1, x_2 , etc., para localizar los puntos 1, 2, etc., (x_1 no necesita ser igual a x_2 , aun cuando generalmente se toman iguales para simplificar los dibujos).
2. Desde los puntos 1, 2, etc., proyectar los puntos 1', 2', etc., sobre cualquier línea vertical AB . Desde cualquier punto O' sobre el eje horizontal (que determina así la distancia H), dibujar rayos $O' - 1'$, $O' - 2'$, etc.

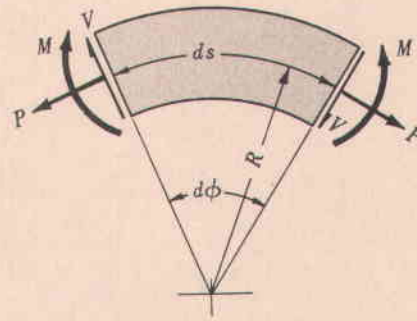


Fig. 5-6

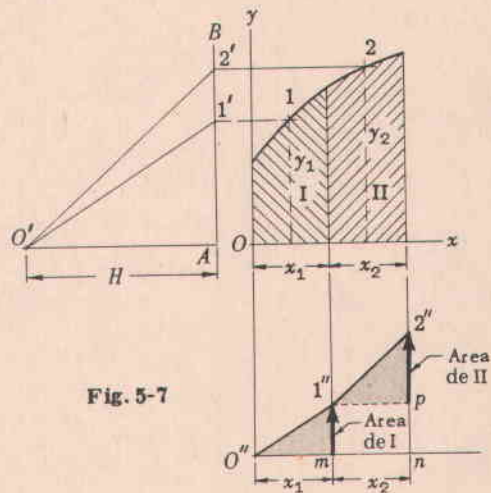


Fig. 5-7

3. Dibujar la línea $O'' - 1''$ paralela a $O' - 1'$ y la línea $O'' - 2''$ paralela a $O' - 2'$. La línea $m - 1''$ es proporcional al área I y la línea $p - 2''$ al área II, o, la línea $n - 2''$ es proporcional a la suma de las áreas I y II.
4. La prueba se obtiene de las propiedades de los triángulos semejantes. Considerando los triángulos $O' - A - 1'$ y $O'' - m - 1''$:

$$\frac{A - 1'}{O' - A} = \frac{m - 1''}{O'' - m} \quad \text{o} \quad \frac{y_1}{H} = \frac{m - 1''}{x_1} \quad \text{o} \quad m - 1'' = \frac{x_1 y_1}{H}$$

o el área $x_1 y_1 = H(m - 1'')$. Así, la distancia vertical $m - 1''$ es proporcional al área I, la cual se aproxima mediante $(x_1 y_1)$. Si la distancia x_1 es pequeña, la aproximación es muy cercana al área verdadera. Así, mientras más pequeñas son las divisiones, más cercana al área verdadera es la aproximación.

5. En forma similar,

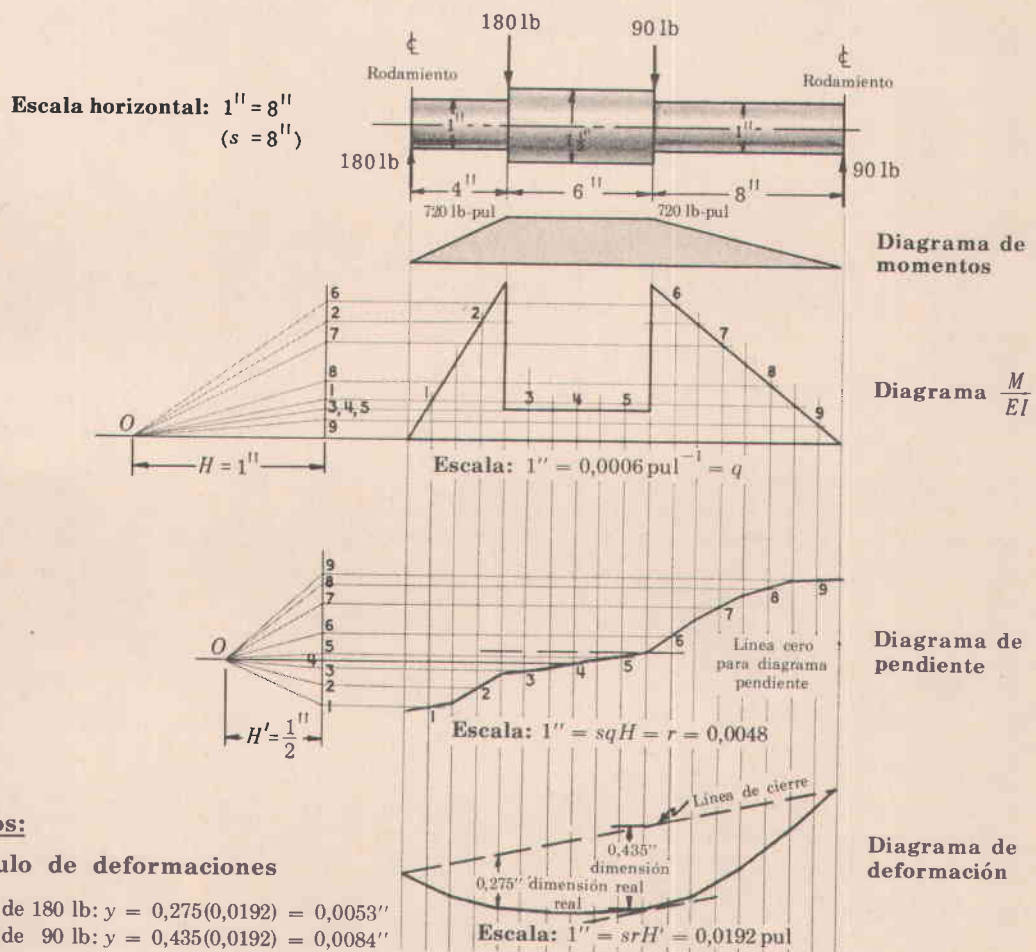
$$p - 2'' = \frac{x_2 y_2}{H}$$

o el área $x_2 y_2 = H(p - 2'')$. Así, el segmento total $n - 2''$ es la suma de las dos áreas mostradas.

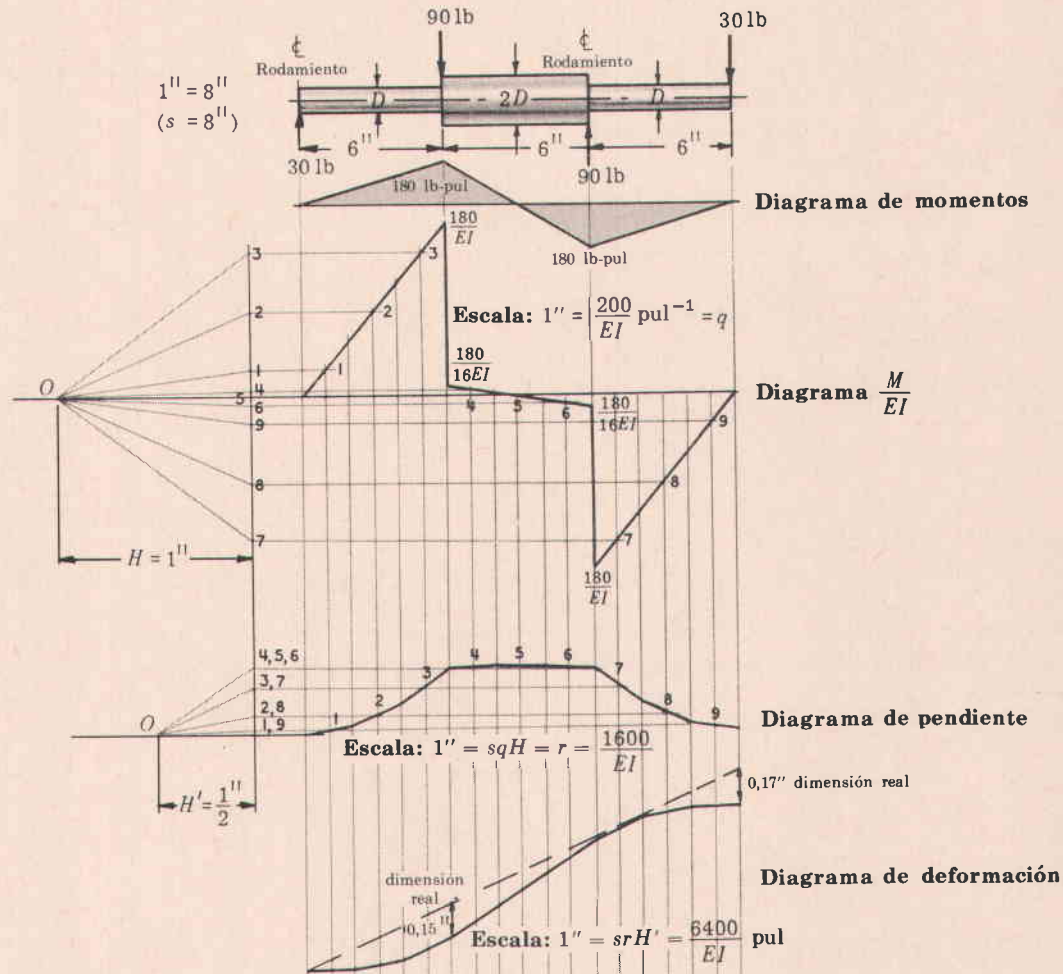
6. El procedimiento anterior se ilustra con dos casos:

- (a) Viga soportada en los extremos, diámetros dados. Ver figura 5-8(a).
 (b) Viga con una carga pendiente, diámetros desconocidos. Ver figura 5-8(b).

Ejemplo (a). Determinar la deformación oajo cada carga. Utilizar la doble integración gráficamente.



Ejemplo (b). Determinar el diámetro D para limitar a 0,001 pulgada la deformación en el punto donde actúa la carga de 90 libras. El momento de inercia de las secciones de diámetro D es I .



Resultados:

Deformación en el punto donde actúa la carga de 90 lb y = $(0,15)(6400/EI)$.

Si la deformación en el punto donde actúa la carga de 90 lb está limitada a 0,001'',
 $I = 0,032 \text{ pul}^4$ para $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$, o $D = 0,90 \text{ pul}$.

Fig. 5-8(b)

LA ACCION DE COLUMNA debida a la carga axial de las partes de una máquina se presenta con frecuencia. Si la carga axial es de tracción, entonces la aplicación de $S = P/A$ es adecuada. Si la carga axial es de compresión, entonces debe aplicarse una ecuación apropiada de columna.

La ecuación de Euler para la carga crítica de una columna esbelta de sección trasversal uniforme es

$$F_{cr} = \frac{C\pi^2 EA}{(L/k)^2}$$

donde

F_{cr} = carga crítica que produce pandeo.

C = constante que depende de las condiciones de los extremos (ver figura 5-9 para valores).

E = módulo de elasticidad, psi (kg/cm²)

A = área de la sección trasversal, pul²(cm²)

L = longitud de la columna, pul (cm)

k = radio mínimo de giro, el cual es $\sqrt{I/A}$ pul (cm),

donde I es el momento de inercia mínimo alrededor del eje de flexión.

Para una sección circular, $k = D/4$.

Para una sección rectangular, $k = h \sqrt{3}/6$, donde h es la dimensión más pequeña del rectángulo.

La carga crítica para columnas de longitud moderada y sección trasversal constante se da en muchas fórmulas empíricas, una de las cuales es la de J. B. Johnson:

$$F_{cr} = s_y A \left(1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E} \right)$$

donde

s_y = límite de fluencia, psi (kg/cm²). Los demás símbolos son los mismos definidos para la fórmula de Euler.

El valor de C depende de las condiciones de los extremos, figura 5-9. Aun cuando se dan valores teóricos de C mayores que uno, se recomienda tener mucho cuidado al estimar el empotramiento de los extremos. Cuando las condiciones de los extremos son inciertas, el valor de C no debería sobrepasar a 2, aun para el caso en que se piense que ambos extremos están empotrados. En general, puede ser apropiado un valor máximo de $C = 1$, y cuando existe bastante flexibilidad de un extremo podría ser aconsejable un valor de $C = \frac{1}{4}$.

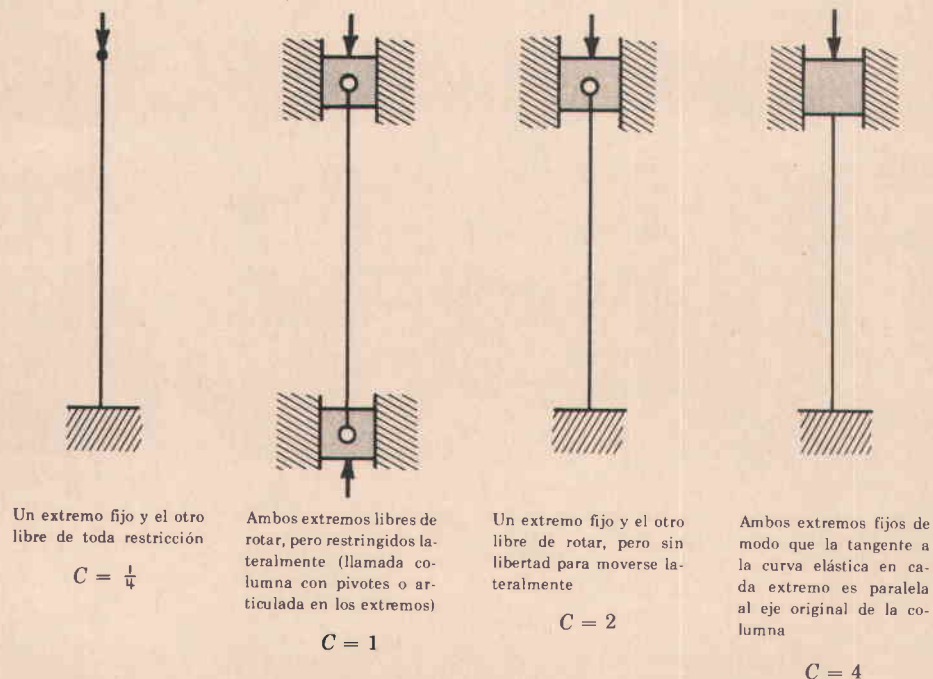


Fig. 5-9

La carga segura se obtiene dividiendo la carga crítica por un factor de seguridad N :

$$\text{Carga segura } F, \text{ ecuación de Euler: } F = \frac{F_c \tau}{N} = \frac{C\pi^2 EA}{N(L/k)^2}$$

$$\text{Carga segura } F, \text{ ecuación de J. B. Johnson: } F = \frac{s_y A}{N} \left(1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E} \right)$$

El valor de L/k que determina cuándo debe usarse la ecuación de Euler o la de J. B. Johnson se encuentra igualando los valores dados para la carga crítica en ambas fórmulas:

$$\frac{C\pi^2 EA}{(L/k)^2} = s_y A \left(1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E} \right) \quad \text{de la cual} \quad L/k = \sqrt{\frac{2C\pi^2 E}{s_y}}$$

El valor de L/k por encima del cual debe usarse la ecuación de Euler y por debajo del cual debe usarse la fórmula de J. B. Johnson, para algunos valores representativos es:

C	E		s_y		$(L/k)^2$	(L/k)
$\frac{1}{4}$	$30 \times 10^6 \text{ psi}$	$2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$	80.000 psi	5625 kg/cm ²	1849	43
			70.000	4922	2113	46
			60.000	4218	2465	50
			50.000	3515	2958	54
			40.000	2812	3697	61
1	$30 \times 10^6 \text{ psi}$	$2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$	80.000 psi	5625 kg/cm ²	7394	86
			70.000	4922	8451	92
			60.000	4218	9860	99
			50.000	3515	11.832	109
			40.000	2812	14.789	121
2	$30 \times 10^6 \text{ psi}$	$2,1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$	80.000 psi	5625 kg/cm ²	14.789	121
			70.000	4922	16.902	130
			60.000	4218	19.719	140
			50.000	3515	23.663	154
			40.000	2812	29.579	172

Si L/k es menor que el dado por $\sqrt{2C\pi^2 E/s_y}$, usar la fórmula de J. B. Johnson, que es válida hasta $L/k = 0$.

Cuando la acción de columna se combina con otros efectos como torsión y flexión se usan los Esfuerzos Equivalentes de Columna. El esfuerzo equivalente es un esfuerzo ficticio relacionado con el esfuerzo en el límite de fluencia en la misma forma que la carga real está relacionada con la carga crítica. El esfuerzo equivalente de columna para una carga real F , deducido de la ecuación de Euler es

$$s_{eq} = \frac{F}{A} \left(\frac{s_y (L/k)^2}{C\pi^2 E} \right) = \frac{F}{A} \alpha \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{s_y (L/k)^2}{C\pi^2 E}$$

Notar que el esfuerzo equivalente depende del esfuerzo en el límite de fluencia, mientras la carga crítica es independiente de dicho punto. Si en una columna de longitud y proporciones dadas, se cambia el material, no cambia la carga crítica pero sí cambia el esfuerzo equivalente. La relación entre la carga real y la carga crítica es, sin embargo, la misma que la relación entre el esfuerzo equivalente y el esfuerzo en el límite de fluencia.

El esfuerzo equivalente de columna para una carga real F , deducido de la ecuación de J. B. Johnson, es

$$s_{eq} = \frac{F}{A} \left(\frac{1}{1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E}} \right) = \frac{F}{A} \alpha \quad \text{donde} \quad \alpha = \frac{1}{1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E}}$$

En las ecuaciones para el esfuerzo equivalente, son válidas las siguientes relaciones, con los símbolos definidos anteriormente:

$$\frac{F_c \tau}{F} = \frac{s_y}{s_{eq}} = N$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir una expresión para la energía elástica de deformación debida a la flexión en una viga recta.

Solución:

El cambio de ángulo $d\alpha$ entre dos planos transversales separados por una distancia dx en una viga recta sometida a un momento de flexión M es $d\alpha = Mdx/EI$. La energía de deformación en la sección de longitud dx es

$$dU = \frac{M d\alpha}{2} = \frac{M^2 dx}{2EI} \quad \text{o} \quad U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

2. Deducir una expresión para la energía elástica de deformación debida a la flexión en una viga curva.

Solución:

El cambio de ángulo $d\alpha$ entre dos planos transversales separados por un ángulo $d\phi$ en una viga curva sometida a un momento de flexión M es $d\alpha = M d\phi / AeE$, donde e es la distancia del eje centroidal al eje neutro, siempre medida desde el eje centroidal hacia el centro de curvatura. La energía de deformación en la sección entre los dos planos es

$$dU = \frac{M d\alpha}{2} = \frac{M^2 d\phi}{2AeE} \quad \text{o} \quad U = \int \frac{M^2 d\phi}{2AeE}$$

3. Demostrar que la deformación debida a la flexión, en el punto donde actúa la carga P , localizada en el extremo de una viga en voladizo de longitud L , es $PL^3/3EI$, usando, (a) doble integración, (b) el método del momento de las áreas, (c) el teorema de Castigliano.

Solución:

(a) Usando doble integración.

La ecuación de la curva elástica es

$$EI \frac{d^2y}{dx^2} = M = -Px$$

donde x se mide de la carga hacia el soporte. Integrando una vez se tiene

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{-Px^2}{2} + C_1$$

Como la pendiente es cero en $x = L$, $C_1 = PL^2/2$ y

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{-Px^2}{2} + \frac{PL^2}{2}$$

La segunda integración da

$$EIy = \frac{-Px^3}{6} + \frac{PL^2x}{2} + C_2$$

Como $y = 0$ en $x = L$, $C_2 = -PL^3/3$ y

$$EIy = \frac{-Px^3}{6} + \frac{PL^2x}{2} - \frac{PL^3}{3}$$

y para $x = 0$,

$$y = \frac{-PL^3}{3EI}$$

(b) Usando el método de los momentos de las áreas, figura 5-10.

- (1) Dibujar la viga, mostrando la carga P .
- (2) Dibujar la curva elástica y trazar una tangente a la curva en el punto B .
- (3) Dibujar el diagrama M/EI .
- (4) La deformación y se obtiene entonces tomando el momento del área de M/EI entre los puntos A y B con respecto al punto A . El brazo del momento de esta área es $2L/3$. El área es $-PL^2/2EI$. Entonces

$$y = \left(\frac{2L}{3}\right) \left(\frac{-PL^2}{2EI}\right) = \frac{-PL^3}{3EI}$$

(c) Usando el teorema de Castigliano.

La energía de deformación almacenada en una viga recta sometida a un momento de flexión M es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI}$$

Como el momento es $-Px$,

$$U = \int_0^L \frac{(-Px)^2 dx}{2EI} = \frac{P^2 L^3}{6EI}$$

Entonces la deformación se obtiene tomando la derivada parcial $\frac{\partial U}{\partial P}$: $y = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2PL^3}{6EI} = \frac{PL^3}{3EI}$

El valor positivo de la deformación significa que ésta está en la dirección de la carga, la cual es hacia abajo en este problema.

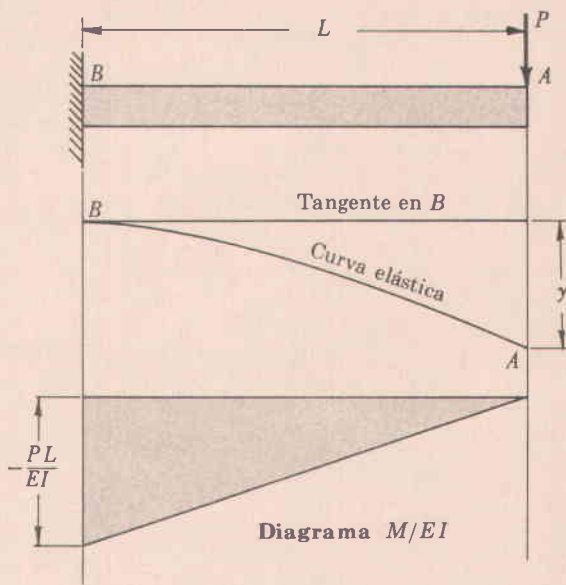


Fig. 5-10

4. Demostrar que la deformación producida en el punto de aplicación de la carga, debida a la flexión de una viga simplemente apoyada que tiene una carga concentrada P en el centro de la luz es $PL^3/48EI$ (a) usando el método del momento de las áreas, (b) usando el método de la viga conjugada, (c) usando funciones escalón, (d) usando el teorema de Castigliano.

Solución:

- (a) Dibujar la curva elástica y el diagrama M/EI como se muestra en la figura 5-11. Luego se traza una tangente a la curva elástica en su punto medio A , el cual en este caso es el punto de máxima deformación. Sabiendo que la pendiente bajo la carga es cero, se simplifica el procedimiento para este problema.

La deformación Δ se determina entonces tomando el momento del área del diagrama M/EI entre los puntos A y B con respecto al punto B .

El área del diagrama M/EI entre los puntos A y B es

$$\frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI}\right) \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{16EI}$$

El brazo de momento al centroide del área triangular desde el punto B es $(2/3)(L/2) = L/3$. Entonces

$$\Delta = \left(\frac{PL^2}{16EI}\right) \left(\frac{L}{3}\right) = \frac{PL^3}{48EI}$$

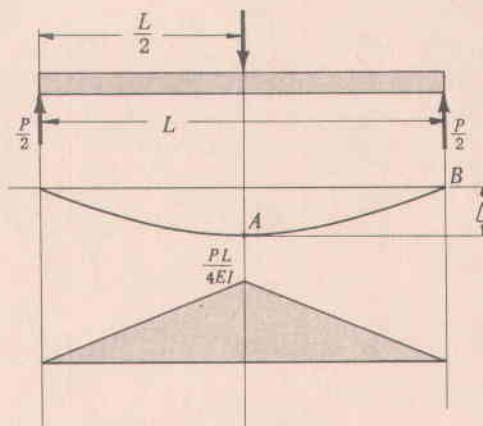


Fig. 5-11

- (b) Usando el método de la viga conjugada, dibujar la viga conjugada y cargarla de modo que la intensidad de la carga en cualquier sección sea igual a la ordenada del diagrama M/EI , como muestra la figura 5-12. Considerar las cargas sobre la viga conjugada debidas al área A y al área B como cargas concentradas en sus propios centroides. Las magnitudes de estas áreas son

$$A = B = \frac{1}{2} \left(\frac{PL}{4EI} \right) \frac{L}{2} = \frac{PL^2}{16EI}$$

Las reacciones en los extremos izquierdo y derecho pueden determinarse. En este caso ambas son iguales debido a la simetría de la carga, y pueden encontrarse igualando la suma de "cargas" verticales a cero.

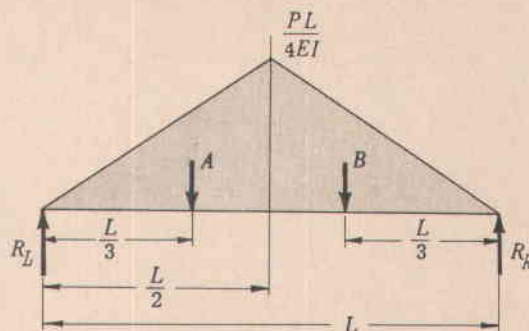


Fig. 5-12

$$R_L = R_R = \frac{PL^2}{16EI}$$

Ahora, la deformación en cualquier sección de la viga original es igual al momento de flexión de la viga conjugada en dicha sección. El momento de flexión de la viga conjugada, o la deformación de la viga original en su punto medio es

$$M_{L/2} = \left(\frac{PL^2}{16EI} \right) \left(\frac{L}{2} \right) - \left(\frac{PL^2}{16EI} \right) \left(\frac{L}{2} - \frac{L}{3} \right) = \frac{PL^3}{48EI}$$

- (c) El empleo de funciones escalón en este caso es simple ya que la viga tiene sección uniforme. La ecuación de momentos puede escribirse

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M = \frac{P}{2} x - P \left(x - \frac{L}{2} \right) H_{L/2}$$

donde la función escalón: $H_{L/2} = 0$ para $x < L/2$, $H_{L/2} = 1$ para $x \geq L/2$.

La primera integración da

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4} - \frac{P(x-L/2)^2}{2} H_{L/2} + C_1$$

notando que

$$\int_0^x P(x-L/2) H_{L/2} dx = PH_{L/2} \int_{L/2}^x (x-L/2) dx = \frac{P(x-L/2)^2}{2} H_{L/2}$$

Una condición de contorno para determinar C_1 es: $dy/dx = 0$ cuando $x = L/2$; entonces $C_1 = -PL^2/16$ y

$$EI \frac{dy}{dx} = \frac{Px^2}{4} - \frac{P(x-L/2)^2}{2} H_{L/2} - \frac{PL^2}{16}$$

La segunda integración da

$$EI y = \frac{Px^3}{12} - \frac{P(x-L/2)^3}{6} H_{L/2} - \frac{PL^2}{16} x + C_2$$

Una condición de contorno para determinar C_2 es: $y = 0$ cuando $x = 0$; así, $C_2 = 0$. Entonces, sustituyendo $L/2$ por x , la deformación en $x = L/2$ es

$$EI y = \frac{PL^3}{96} - \frac{PL^3}{32} = -\frac{PL^3}{48} \quad y \quad y = -\frac{PL^3}{48EI}$$

(d) Usando el teorema de Castigliano, podemos escribir la ecuación de la energía de deformación

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^{L/2} \frac{M^2 dx}{2EI} + \int_{L/2}^L \frac{M^2 dx}{2EI} = \int_0^{L/2} \frac{(Px/2)^2 dx}{2EI} + \int_{L/2}^L \frac{[Px/2 - P(x-L/2)]^2 dx}{2EI}$$

de la cual $U = \frac{P^2 L^3}{96EI}$. La deformación en el punto de aplicación de la carga P es $\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{48EI}$

5. Determinar la deformación vertical, debida a la flexión, del punto P de una viga en voladizo cargada con una fuerza horizontal F , como muestra la figura 5-13(a). Despreciar la deformación en el miembro vertical.

Solución:

Un problema de este tipo puede resolverse con el teorema de Castigliano si se supone una carga vertical Q en el punto donde debe encontrarse la deformación, como muestra la figura 5-13(b). La energía de deformación es

$$\begin{aligned} U &= \int_0^L \frac{(Fh + Qx)^2 dx}{2EI} \\ &= \frac{F^2 h^2 L + FhQL^2 + Q^2 L^3/3}{2EI} \end{aligned}$$

La deformación vertical es

$$\delta_v = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{FhL^2 + 2QL^3/3}{2EI}$$

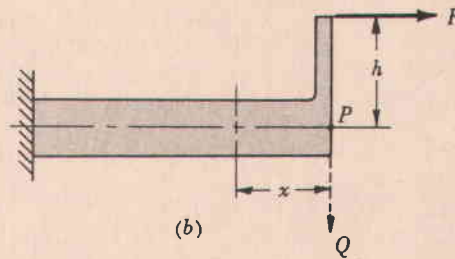
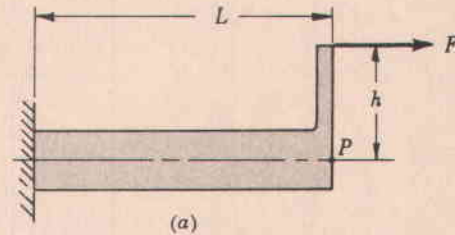


Fig. 5-13

Ahora, haciendo $Q = 0$, se tiene la deformación vertical en el punto P :

$$\delta_v = \frac{FhL^2}{2EI}$$

6. Un eje está soportado por dos cojinetes anti-rozamiento en A y C , con cargas de 30 lb que actúan en los puntos B y F , como muestra la figura 5-14. La parte del eje entre B y C tiene un diámetro $2D$ comparado con el diámetro D de los segmentos del eje comprendidos entre A y B y entre C y F . Simultáneamente, y en conexión con el cálculo de una velocidad crítica, se requiere determinar la deformación del eje en los puntos B y F . Usar el método del momento de las áreas y considerar las deformaciones debidas únicamente a la flexión. (Ver el capítulo sobre ejes para un mayor análisis sobre deformaciones.)

Solución:

- (1) Dibujar la curva elástica que pasa a través de los puntos de deformación cero en A y C , y trazar la tangente en el punto A .
- (2) Dibujar el diagrama M/EI notando que el momento de inercia de la sección de diámetro $2D$ es 16 veces mayor que el de las secciones de diámetro D . La I se refiere a los segmentos del eje con el diámetro menor.
- (3) Determinar Δ_1 tomando el momento de las áreas del diagrama M/EI entre los puntos A y F con respecto al punto F .

$$\Delta_1 = \left(\frac{180}{EI}\right)\left(\frac{6}{2}\right)(4) + \left(\frac{180}{16EI}\right)(6)(9) + \left(\frac{180}{EI}\right)\left(\frac{6}{2}\right)(14) = \frac{10.327,5}{EI}$$

- (4) Determinar Δ_2 tomando el momento de las áreas del diagrama M/EI entre los puntos A y C con respecto a C.

$$\Delta_2 = \left(\frac{180}{16EI}\right)(6)(3) + \left(\frac{180}{EI}\right)\left(\frac{6}{2}\right)(8) = \frac{4522,5}{EI}$$

- (5) Determinar Δ_3 por proporción:

$$\Delta_3 = \frac{18}{12} \Delta_2 = \frac{6783,75}{EI}$$

$$\text{entonces } \gamma_1 = \Delta_1 - \Delta_3 = \frac{3543,75}{EI}$$

- (6) Determinar Δ_5 por proporción:

$$\Delta_5 = \frac{\Delta_3}{3} = \frac{2261,25}{EI}$$

- (7) Determinar Δ_4 :

$$\Delta_4 = \left(\frac{180}{EI}\right)\left(\frac{6}{2}\right)(2) = \frac{1080}{EI}$$

$$\text{entonces } \gamma_2 = \Delta_5 - \Delta_4 = \frac{1181,25}{EI}$$

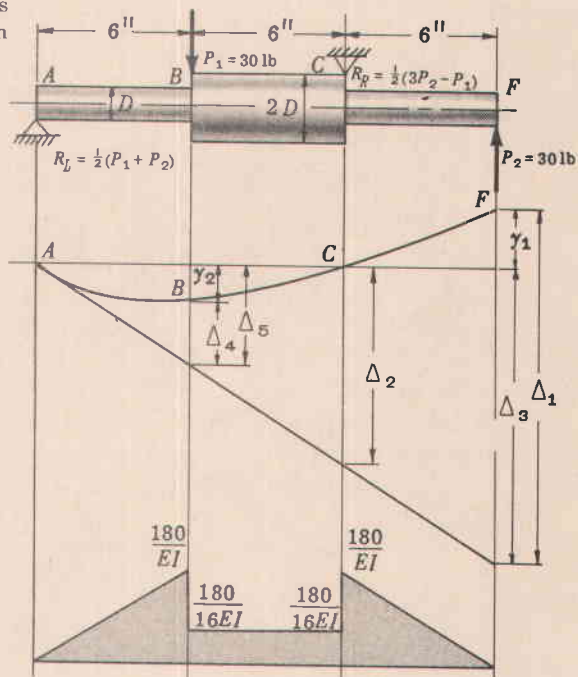


Fig. 5-14

7. Resolver el problema 6 usando el teorema de Castigliano.

Solución:

La energía total de deformación U debida a la flexión es

$$U = \int \frac{M^2 dx}{2EI} = U_1 + U_2 + U_3$$

donde U_1 = energía de $x = 0$ a $x = 6$

U_2 = energía de $x = 6$ a $x = 12$

U_3 = energía de $x = 12$ a $x = 18$.

$$U_1 = \int_0^6 \frac{(R_L x)^2 dx}{2EI} = \left[\frac{R_L^2 x^3}{6EI} \right]_0^6 = \frac{36R_L^2}{EI} = \frac{36}{EI} \left(\frac{P_1 + P_2}{2} \right)^2$$

$$\text{Ahora se halla } U_3: \quad U_3 = \int_{12}^{18} \frac{P_2^2 (18-x)^2 dx}{2EI} = \frac{36P_2^2}{EI}$$

Si I es el momento de inercia de una sección de diámetro D , entonces el momento de inercia de la sección de $x = 6$ a $x = 12$, cuyo diámetro es $2D$, es $16I$. La energía de deformación en la parte central es

$$U_2 = \int_6^{12} \frac{[R_L x - P_1(x-6)]^2 dx}{2E(16I)}$$

Integrando, sustituyendo $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ por R_L y agrupando términos,

$$U_2 = \frac{72}{32EI} \left[7 \left(\frac{P_2 - P_1}{2} \right)^2 + 9P_1 \left(\frac{P_1 + P_2}{2} \right) - 6P_1^2 \right]$$

La energía total de deformación es $U = U_1 + U_2 + U_3$

$$U = \frac{36}{EI} \left(\frac{P_1 + P_2}{2} \right)^2 + \frac{72}{32EI} \left[7 \left(\frac{P_2 - P_1}{2} \right)^2 + 9P_1 \left(\frac{P_1 + P_2}{2} \right) - 6P_1^2 \right] + \frac{36P_2^2}{EI}$$

La deformación producida por P_1 es

$$\frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{18}{EI} (P_1 + P_2) + \frac{9}{4EI} (P_2 - P_1) = \frac{1080}{EI} + \frac{101,25}{EI} = \frac{1181,25}{EI}$$

La deformación en el punto de aplicación de P_2 es

$$\frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{18}{EI} (P_1 + P_2) + \frac{72}{32EI} \left[14 \left(\frac{P_2 - P_1}{2} \right) \left(\frac{1}{2} \right) + \frac{9P_1}{2} \right] + \frac{72P_2}{EI} = \frac{1080}{EI} + \frac{303,75}{EI} + \frac{2160}{EI} = \frac{3543,75}{EI}$$

8. (a) Usando el método de los momentos de las áreas, mostrar que la máxima deformación por flexión de un elemento de longitud L simplemente apoyado y que soporta una carga uniformemente distribuida de w lb por pul (kg por cm), como se muestra en la figura 5-15(a), es $5wL^4/384EI$. (b) Igual a (a) pero usando el teorema de Castigliano.

Solución:

(a) Usando el método de los momentos de las áreas.

1. Dibujar la curva elástica, como muestra la figura 5-15(b). Trazar una tangente horizontal a la curva elástica en el punto M . Entonces, la deformación y es el momento del área del diagrama de momentos entre los puntos M y B , con respecto a B , dividido por EI .
2. Dibujar el diagrama de momentos, como muestra la figura 5-15(c).
3. Para cambiar, dibujamos el diagrama de momentos por partes, figura 5-15(d), ilustrando este procedimiento el cual en algunos casos puede ser adecuado para simplificar la determinación de las áreas y de sus centroides.
4. En este caso sólo tratamos con los momentos de las secciones I y II.

$$\text{Área de la sección I} = \left(\frac{wL^2}{4} \right) \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{wL^3}{16}$$

$$\text{Área de la sección II} = \left(\frac{wL^2}{8} \right) \left(\frac{L}{2} \right) \left(\frac{1}{3} \right) = \frac{wL^3}{48}$$

La distancia del centroide de la sección I al punto B es $(2/3)(L/2) = L/3$.

La distancia del centroide de la sección II al punto B es $(3/4)(L/2) = 3L/8$.

$$\begin{aligned} \text{Entonces } EIy &= \left(\frac{wL^3}{16} \right) \left(\frac{L}{3} \right) - \left(\frac{wL^3}{48} \right) \left(\frac{3L}{8} \right) \\ &= \frac{5wL^4}{384} \end{aligned}$$

$$y = \frac{5wL^4}{384EI}$$

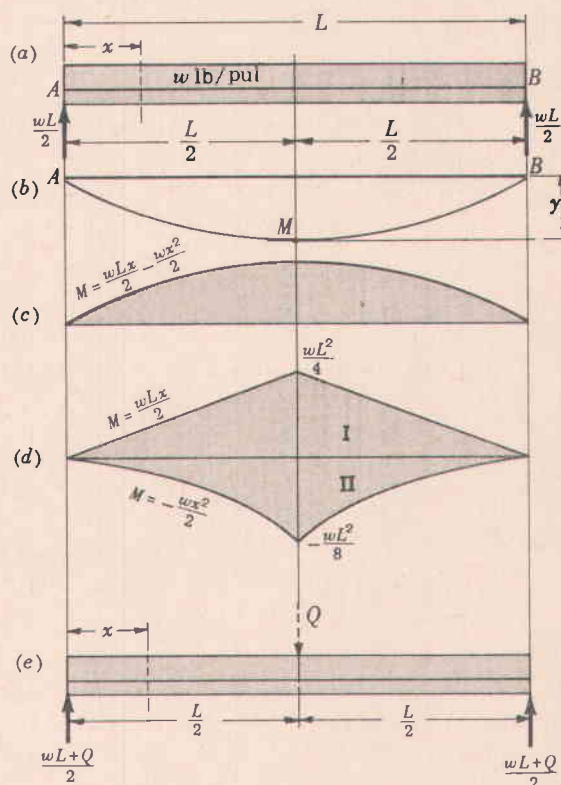


Fig. 5-15

(b) Usando el teorema de Castigliano.

1. En el punto donde debe determinarse la deformación debe imaginarse una carga Q , como muestra la figura 5-15(e).

2. La energía de deformación por flexión es $\int \frac{M^2 dx}{2EI}$. Para la mitad izquierda de la viga, la energía de deformación es

$$U_1 = \int_0^{L/2} \frac{[\frac{1}{2}(wL+Q)x - \frac{1}{2}wx^2]^2 dx}{2EI}$$

Como la energía de deformación en la parte izquierda es la misma que en la derecha, la energía total de deformación en la viga es $U = 2U_1$:

$$U = 2 \int_0^{L/2} \frac{[\frac{1}{2}(wL+Q)x - \frac{1}{2}wx^2]^2 dx}{2EI} = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{wL+Q}{2} \right)^2 \frac{L^3}{24} - \frac{(wL+Q)wL^4}{128} + \frac{w^2 L^5}{640} \right]$$

$$\gamma = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{1}{EI} \left[(wL+Q) \frac{L^3}{48} - \frac{wL^4}{128} + 0 \right]$$

Cuando $Q = 0$,

$$\gamma = \frac{1}{EI} \left[\frac{wL^4}{48} - \frac{wL^4}{128} \right] = \frac{5wL^4}{384EI}$$

o si W es la carga total wL , $\gamma = \frac{5WL^3}{384EI}$.

9. Determinar la deformación horizontal del punto A de una viga curva de acero de 2" de diámetro, con 4" de radio interior de curvatura y cargada como muestra la figura 5-16. Considerar únicamente la flexión.

Solución:

Para cualquier ángulo ϕ el momento de flexión con respecto al eje de gravedad es $M = P(5 \sin \phi)$. Por tanto, la energía de deformación debida a la flexión es

$$\begin{aligned} U &= \int_0^\pi \frac{M^2 d\phi}{2AeE} = \int_0^\pi \frac{(5P \sin \phi)^2 d\phi}{2AeE} \\ &= \frac{25}{4} \frac{\pi P^2}{AeE} \end{aligned}$$

La deformación en el sentido de la carga P es

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{25}{2} \frac{\pi P}{AeE}$$

El valor de e , la distancia del eje centroidal al eje neutro para una sección transversal circular, es

$$e = R - \frac{(\sqrt{r_o} + \sqrt{r_i})^2}{4} = 5 - \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{4})^2}{4} = 0,0505$$

La deformación en el sentido de la carga P es

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial P} &= \frac{25}{2} \frac{\pi P}{AeE} = \frac{25\pi(175)}{2\pi(0,0505)(30 \times 10^6)} \\ &= 0,001442'' \end{aligned}$$

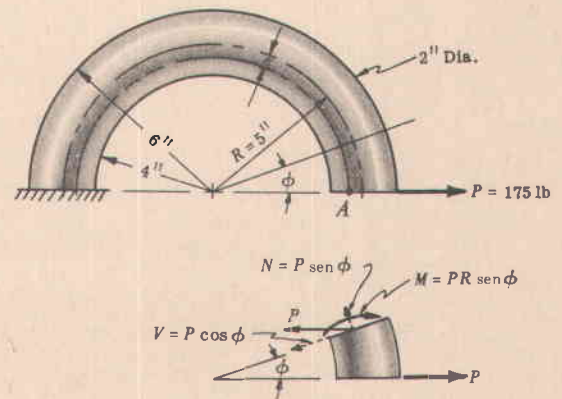


Fig. 5-16

10. En el problema 9, determinar la deformación debida a (a) el esfuerzo cortante y (b) los efectos combinados de la flexión, el esfuerzo cortante, y la componente normal.

Solución:

- (a) En cualquier sección el valor de la fuerza cortante transversal V es $V = P \cos \phi$. La energía de deformación es

$$U = \int_0^\pi \frac{KV^2 R d\phi}{2AG} \quad (\text{donde } K = \frac{4}{3} \text{ para una sección transversal circular})$$

$$= \int_0^\pi \frac{4(P \cos \phi)^2 (5) d\phi}{3(2)(\pi)(12)(10^6)} = \frac{0,0884P^2}{10^6} \int_0^\pi (\cos \phi)^2 d\phi = \frac{0,0884P^2}{10^6} \left[\frac{\sin 2\phi}{4} + \frac{\phi}{2} \right]_0^\pi = \frac{0,0884P^2}{10^6} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

La deformación debida al corte en el sentido de la fuerza es

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{0,0884P\pi}{10^6} = \frac{0,0884(175)\pi}{10^6} = 0,0000486''$$

comparada con una deformación de 0,001442'' debida solamente a la flexión.

- (b) La componente normal de P que produce alargamiento axial en cualquier sección es $N = P \sin \phi$.

La rotación de una sección debida a la fuerza normal N encuentra oposición en el momento $M = PR \sin \phi$.

La energía de deformación debida a la componente normal de la carga en presencia de flexión es

$$U = \int_0^\pi \left[\frac{N^2 R}{2AE} - \frac{MN}{AE} \right] d\phi = \int_0^\pi \frac{5(P \sin \phi)^2 d\phi}{2\pi(30 \times 10^6)} - \int_0^\pi \frac{(5P \sin \phi)(P \sin \phi) d\phi}{\pi(30 \times 10^6)}$$

$$= \frac{0,0265 P^2}{10^6} \int_0^\pi (\sin \phi)^2 d\phi - \frac{0,053 P^2}{10^6} \int_0^\pi (\sin \phi)^2 d\phi$$

$$= \frac{0,0265 P^2}{10^6} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{0,053 P^2}{10^6} \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{[0,0265(175) - 0,053(175)]\pi}{10^6} = -0,0000145''$$

Entonces la deformación neta debida a los efectos combinados de flexión, corte y fuerza normal es

$$\delta = 0,001442 + 0,0000486 - 0,0000145 = 0,0014761'' \text{ ó } 0,0015''.$$

11. Determinar el desplazamiento horizontal a lo largo de la línea de carga del marco mostrado en la figura 5-17. El momento de inercia es el mismo en todas las secciones. Considerar la deformación debida únicamente a la flexión.

Solución:

Usando el teorema de Castigliano, la energía de deformación del marco es la suma de la energía en los tres elementos. Para los elementos 1 y 3 la energía es la misma.

$$U = 2 \int_0^h \frac{M^2 dy}{2EI} = 2 \int_0^h \frac{(Fy)^2 dy}{2EI} = 2 \left(\frac{F^2 h^3}{6EI} \right)$$

$$U_2 = \int_0^L \frac{(Fh)^2 dx}{2EI} = \frac{F^2 h^2 L}{2EI} \quad \text{para el miembro 2}$$

$$\text{Total } U = 2 \left(\frac{F^2 h^3}{6EI} \right) + \frac{F^2 h^2 L}{2EI}$$

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \frac{2Fh^3}{3EI} + \frac{Fh^2 L}{EI} = \Delta L \quad \text{en la dirección de } F.$$

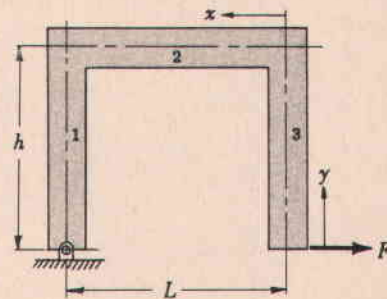


Fig. 5-17

12. Para el marco de una máquina mostrado en la figura 5-18, determinar las deformaciones horizontal y vertical del extremo inferior del elemento 1, debidas a la fuerza horizontal F aplicada. Considerar cargas axiales y de flexión.

Solución:

La energía de deformación para cargas axiales y de flexión en las diferentes partes del marco es

$$U_1 = \int_0^h \frac{(Fy)^2}{2EI} dy + \int_0^h \frac{Q^2 dy}{2AE}$$

$$U_2 = \int_0^L \frac{(Qx + Fh)^2}{2EI} dx + \int_0^L \frac{F^2 dx}{2AE}$$

$$U_3 = \int_0^h \frac{(QL + Fy)^2}{2EI} dy + \int_0^h \frac{Q^2 dy}{2AE}$$

La energía total de deformación es $U = U_1 + U_2 + U_3$.

$$U = \left(\frac{F^2 h^3}{6EI} + \frac{Q^2 h}{2AE} \right) + \left(\frac{Q^2 L^3}{6EI} + \frac{QL^2 Fh}{2EI} + \frac{F^2 h^2 L}{2EI} + \frac{F^2 L}{2AE} \right) + \left(\frac{Q^2 L^2 h}{2EI} + \frac{QLFh^2}{2EI} + \frac{F^2 h^3}{6EI} + \frac{Q^2 h}{2AE} \right)$$

La deformación horizontal se determina tomando la derivada parcial de U con respecto a F , igualando Q a cero.

$$\frac{\partial U}{\partial F} = \delta_x = \frac{Fh^2}{EI} \left(\frac{2h}{3} + L \right) + \frac{FL}{AE}$$

La deformación vertical se determina tomando la derivada parcial de U con respecto a Q , después de haber igualado Q a cero.

$$\frac{\partial U}{\partial Q} = \delta_y = \frac{FLh}{2EI} (L + h)$$

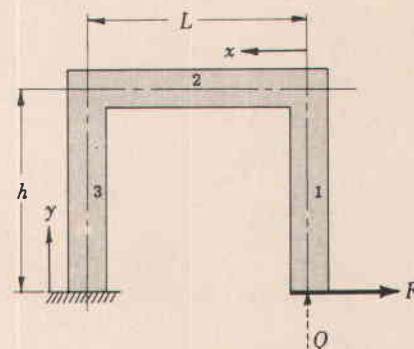


Fig. 5-18

13. Deducir la ecuación de deformación por cargas cortantes para una viga con varias cargas y cambios de sección, la cual es de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{KV}{AG}$$

Solución:

1. Consideremos una viga con fuerzas aplicadas en A, B, C, y D, como muestra la figura 5-19(a). En este momento no se pone ninguna restricción que prevenga a los puntos de la viga la deformación. (Se muestran cargas concentradas, pero el procedimiento puede extenderse a cargas variables, en forma similar.)

2. La deformación debida al corte se determinará considerando únicamente la deformación de la superficie neutra. Esto elimina la necesidad de considerar el alabeo que se presenta a lo largo de la sección. Los elementos diferenciales de las secciones transversales en el eje neutro se deslizan en una dirección perpendicular a la superficie neutra de la viga original. Entonces todos los planos que contienen estos elementos en la superficie neutra permanecen paralelos ya que son perpendiculares a la superficie neutra de la viga original.

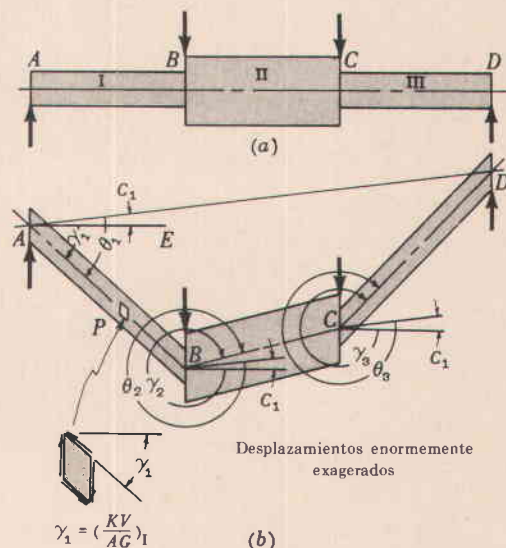


Fig. 5-19

3. Debido al corte, las partes del elemento se deformarán cada una en relación con las otras, como se muestra (exageradamente) en la figura 5-19(b).
4. Si se sabe que los extremos A y D no se deforman, puede trazarse la línea de deformación nula (o línea de base) AD .
5. Trazar la línea AE perpendicular a la sección en A para tomarla como referencia.
6. El ángulo entre la línea de deformación nula AD y la línea de referencia AE es C_1 .
7. El ángulo entre la línea de deformación nula y la línea central de un elemento se denomina θ . $\theta_1 = C_1 + \gamma_1$, $\theta_2 = C_1 + \gamma_2$, $\theta_3 = C_1 + \gamma_3$. Como todos estos ángulos son pequeños (cerca de cero o a 360°), podemos escribir

$$\tan \theta_1 = C_1 + \tan \gamma_1, \quad \tan \theta_2 = C_1 + \tan \gamma_2, \quad \tan \theta_3 = C_1 + \tan \gamma_3$$

8. La tangente de θ es la pendiente de la línea central con respecto a la línea de deformación nula.

$$\tan \theta_1 = (dy/dx)_I, \quad \tan \theta_2 = (dy/dx)_{II}, \quad \tan \theta_3 = (dy/dx)_{III}$$

9. Como el esfuerzo cortante es proporcional a la deformación,

$$s_s = \frac{KV}{A} = (\tan \gamma)G, \quad \text{o} \quad \tan \gamma = \frac{KV}{AG}$$

En donde, K es una constante para la sección transversal particular empleada ($K = 4/3$ para una sección transversal circular, o $K = 3/2$ para una sección transversal rectangular). Para las diferentes secciones tenemos

$$\tan \gamma_1 = \left(\frac{KV}{AG}\right)_I, \quad \tan \gamma_2 = \left(\frac{KV}{AG}\right)_{II}, \quad \tan \gamma_3 = \left(\frac{KV}{AG}\right)_{III}$$

10. Sustituyendo los valores de (9) y (8) en (7), obtenemos

$$\text{Sec. I: } \left(\frac{dy}{dx}\right)_I = C_1 + \left(\frac{KV}{AG}\right)_I, \quad \text{Sec. II: } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{II} = C_1 + \left(\frac{KV}{AG}\right)_{II}, \quad \text{Sec. III: } \left(\frac{dy}{dx}\right)_{III} = C_1 + \left(\frac{KV}{AG}\right)_{III}$$

11. Dibujar un diagrama convencional de fuerzas cortantes al usar las ecuaciones en (10). Si la fuerza cortante es (+), sustituirla como tal en las ecuaciones; si la fuerza cortante es (—), reemplazarla como tal en las ecuaciones. Una deformación positiva significa una deformación hacia abajo y una deformación negativa significa una deformación hacia arriba.

14. Determinar la deformación debida únicamente al corte en el sentido de la carga aplicada P , para la figura 5-20, (a) aplicando el teorema de la energía de deformación de Castigliano, (b) aplicando la ecuación de la fuerza cortante transversal combinada con una función escalón. Observar que existe una deformación nula debida al corte, entre los soportes fijos.

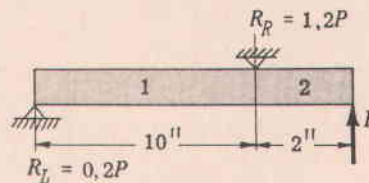


Fig. 5-20

Solución:

- (a) La energía total de deformación almacenada en el elemento es la suma de las energías de deformación en las secciones 1 y 2.

$$U = U_1 + U_2 = \int_0^{10} \frac{KV^2}{2AG} dx + \int_{10}^{12} \frac{KV^2}{2AG} dx = \int_0^{10} \frac{K(0,2P)^2}{2AG} dx + \int_{10}^{12} \frac{K(-P)^2}{2AG} dx = \frac{1,2KP^2}{AG}$$

$$\text{La deformación vertical en } P \text{ es } \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2,4KP}{AG}$$

- (b) La deformación en P puede obtenerse también por integración de $\frac{dy}{dx} = \frac{KV}{AG} + C_1$.

Se observa que el valor de V entre las dos reacciones es $+0,2P$, y que el valor de V es $-P$ entre la reacción derecha y la carga P . Usando una función escalón, el valor de V puede expresarse

$$V = 0,2P - 1,2PH_{10} \quad \text{donde } H_{10} = 0 \text{ para } x < 10, H_{10} = 1 \text{ para } x \geq 10.$$

$$\text{Entonces } \frac{dy}{dx} = \frac{K(0,2P - 1,2PH_{10})}{AG} + C_1$$

$$y = \frac{KP}{AG} \int (0,2 - 1,2 H_{10} + C_1) dx = \frac{KP}{AG} [0,2x - 1,2 H_{10}(x-10) + C_1x + C_2]$$

De la condición de contorno, $y = 0$ cuando $x = 0$, $C_2 = 0$.

De la condición de contorno, $y = 0$ cuando $x = 10$, $0 = \frac{KP}{AG}(2 + 10C_1)$ y $C_1 = -0.2$.

La ecuación general de deformación por corte es $y = \frac{KP}{AG}[0.2x - 1.2 H_{10}(x - 10) - 0.2x]$.

La deformación por corte en $x = 12''$ es $y = \frac{2.4 KP}{AG}$.

15. Determinar la deformación debida únicamente al corte producido por la carga P para el elemento mostrado en la figura 5-21, cuando existe un cambio en el área de la sección transversal de A a $2A$ en el punto medio del elemento, (a) usando el método de la energía de deformación, (b) usando la ecuación de la deformación por fuerza cortante, (c) lo mismo que en (b) pero usando funciones escalón.

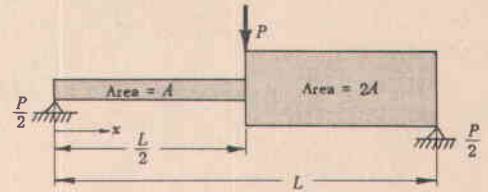


Fig. 5-21

Solución:

- (a) La energía total de deformación debida al corte es

$$U = \int_0^{L/2} \frac{K(P/2)^2 dx}{2AG} + \int_{L/2}^L \frac{K(-P/2)^2 dx}{2(2A)G} = \frac{KP^2}{8AG} \left(\frac{L}{2}\right) + \frac{KP^2}{16AG} \left(\frac{L}{2}\right)$$

La deformación por corte bajo la carga P es $y = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{KPL}{8AG} + \frac{KPL}{16AG} = \frac{3KPL}{16AG}$

- (b) Usando la ecuación de la fuerza cortante transversal.

1. Para $0 \leq x \leq \frac{L}{2}$, $\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{KV}{AG}$ donde $V =$ fuerza cortante $= P/2$.

Integrando $\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{K(P/2)}{AG}$, obtenemos (1) $y = (C_1 + \frac{KP}{2AG})x + C_2$.

2. Para $\frac{L}{2} \leq x \leq L$, $\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{KV}{(2A)G}$ donde $V =$ fuerza cortante $= -P/2$.

Integrando $\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{K(-P/2)}{(2A)G}$, obtenemos (2) $y = (C_1 - \frac{KP}{4AG})x + C_3$.

3. Las condiciones de contorno son:

a. cuando $x = 0$, $y = 0$; así, de la ecuación (1), $0 = (C_1 + KP/2AG)0 + C_2$ o $C_2 = 0$.

b. cuando $x = L$, $y = 0$; así, de la ecuación (2), $0 = (C_1 - KP/4AG)L + C_3$.

c. cuando $x = L/2$, y de la ecuación (1) = y de (2):

$$(C_1 + KP/2AG)L/2 + 0 = (C_1 - KP/4AG)L/2 + C_3$$

Resolviendo para C_1 y C_3 , $C_1 = -\frac{KP}{8AG}$ y $C_3 = \frac{3KPL}{8AG}$.

La deformación en $x = L/2$ puede encontrarse de la ecuación (1) con las constantes insertadas en ella:

$$y = \left(-\frac{KP}{8AG} + \frac{KP}{2AG}\right)\frac{L}{2} + 0 = \frac{3KPL}{16AG}$$

- (c) Usando una función escalón.

La ecuación de la pendiente es, de $\frac{dy}{dx} = \frac{KV}{AG} + C_1$, $\frac{dy}{dx} = \frac{K}{AG} \frac{P}{2} - \frac{3KP}{4AG} H_{L/2} + C_1$ con la función escalón $H_{L/2} = 0$ para $x < L/2$ y $H_{L/2} = 1$ para $x \geq L/2$. Integrando,

$$y = \frac{KP}{2AG} \left[x - \frac{3}{2} H_{L/2} \left(x - \frac{L}{2} \right) \right] + C_1 x + C_2$$

Cuando $x = 0$, $y = 0$, lo que da $C_2 = 0$; cuando $x = L$, $y = 0$, lo que da $C_1 = -KP/8AG$. La deformación en $x = L/2$ es

$$y = \frac{KP}{2AG} \left(\frac{L}{2} - 0 \right) - \frac{KP}{8AG} \left(\frac{L}{2} \right) + 0 = \frac{3KPL}{16AG}$$

16. Para el eje hueco cargado como muestra la figura 5-22, comparar la deformación en el sitio de la carga debida a la fuerza cortante transversal con la deformación debida a la flexión.

Solución:

- (a) La deformación debida a la fuerza cortante transversal es

$$0 \leq x \leq 2$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{KV}{AG} = C_1 + \frac{K(800)}{AG}$$

Integrando,

$$(1) \quad y = C_1x + \frac{K(800)}{AG}x + C_2$$

$$2 \leq x \leq 6$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{KV}{AG} = C_1 + \frac{K(-400)}{AG}$$

Integrando,

$$(2) \quad y = C_1x - \frac{K(400)}{AG}x + C_3$$

Las condiciones de contorno son:

1. cuando $x = 0$, $y = 0$
2. cuando $x = 6''$; $y = 0$
3. y de (1) = y de (2) cuando $x = 2''$

donde $C_1 = 0$, $C_2 = 0$, $C_3 = 2400K/AG$.

Entonces, haciendo $C_1 = C_2 = 0$ en la ecuación (1) y resolviendo para la deformación en $x = 2''$,

$$y = 0 + \frac{K(800)(2)}{AG} + 0 = \frac{1600K}{AG}$$

donde K es el factor aplicado al esfuerzo cortante medio para encontrar el esfuerzo cortante máximo en el eje neutro.

$$\text{Ahora } K\left(\frac{V}{A}\right) = \frac{VQ}{Ib} \quad \text{o} \quad K = \frac{QA}{Ib}$$

donde

Q = momento del área que está por encima del eje neutro

$$= \left(\frac{\pi D_o^2}{8}\right) \frac{2}{3} \frac{D_o}{\pi} - \left(\frac{\pi D_i^2}{8}\right) \frac{2}{3} \frac{D_i}{\pi}$$

$$A = \frac{\pi(D_o^2 - D_i^2)}{4}, \text{ área de la sección transversal}$$

$$I = \frac{\pi(D_o^4 - D_i^4)}{64}, \text{ momento de inercia de la sección transversal}$$

$$b = D_o - D_i; \quad D_o = \text{diámetro externo, } 8''; \quad D_i = \text{diámetro interior, } 6''.$$

$$\text{Sustituyendo en } K = \frac{QA}{Ib}, \quad K = 1,97. \text{ Entonces } y = \frac{1600K}{AG} = \frac{1600(1,97)}{\frac{\pi}{4}(8^2 - 6^2)(12 \times 10^6)} = 11,9 \times 10^{-6} \text{ pul.}$$

- (b) Deformación debida a la flexión en el punto de aplicación de la carga

$$y = \frac{Pfx}{6LEI}(L^2 - f^2 - x^2) = \frac{(1200)(4)(2)}{6(6)(30 \times 10^6)(\pi/64)(D_o^4 - D_i^4)}(6^2 - 4^2 - 2^2) = 1,035 \times 10^{-6} \text{ pul.}$$

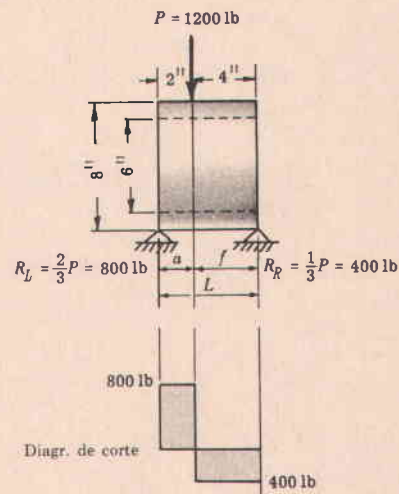
- (c) Relación de la deformación por corte a la deformación por flexión en el punto de aplicación de la carga

$$\frac{11,9 \times 10^{-6}}{1,035 \times 10^{-6}} = 11,5.$$

- (d) Deformación total en el punto de aplicación de la carga

$$11,9 \times 10^{-6} + 1,035 \times 10^{-6} = 12,935 \times 10^{-6} \text{ pul.}$$

- (e) Notar que el esfuerzo de flexión es bastante pequeño: $s = \frac{Mc}{I} = \frac{1600(8/2)}{(\pi/64)(8^4 - 6^4)} = 46,6 \text{ psi.}$



(f) Deformación por corte trasversal usando el teorema de Castigliano:

$$U = \int_0^2 \frac{KV^2 dx}{2AG} = \int_0^2 \frac{K(2P/3)^2 dx}{2AG} + \int_2^6 \frac{K(-P/3)^2 dx}{2AG} = \frac{2KP^2}{3AG}$$

$$\text{Deformación en el punto de aplicación de la carga } \gamma = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{4KP}{3AG} = \frac{4K(1200)}{3AG} = \frac{1600K}{AG}$$

Notar que esta deformación es la misma obtenida en (a).

17. Determinar la deformación por corte en el punto medio entre los soportes debida a una carga trasversal de 100 lb por pul. Referirse a la figura 5-23. Resolver por los siguientes métodos:

- (a) Teorema de Castigliano.
(b) Ecuación de corte trasversal.
(c) Función escalón.

Solución:

(a) Solución usando el teorema de Castigliano.

La energía de corte está dada por

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{KV^2 dx}{2AG} \\ &= \int_0^{12} \frac{K(1125 + \frac{1}{2}Q - 100x)^2 dx}{2AG} \\ &\quad + \int_{12}^{24} \frac{K(1125 - \frac{1}{2}Q - 100x)^2 dx}{2AG} \\ &\quad + \int_{24}^{30} \frac{K(3000 - 100x)^2 dx}{2AG} \end{aligned}$$

donde se ha aplicado una carga Q en el punto donde quiere encontrarse la deformación. Integrando,

$$U = \frac{-K}{600AG} \left[(\frac{1}{2}Q - 75)^3 - (1125 + \frac{1}{2}Q)^3 - (\frac{1}{2}Q + 1275)^3 + (75 + \frac{1}{2}Q)^3 - (600)^3 \right]$$

$$\gamma = \frac{\partial U}{\partial Q} = \frac{-K}{400AG} \left[(\frac{1}{2}Q - 75)^2 - (1125 + \frac{1}{2}Q)^2 - (\frac{1}{2}Q + 1275)^2 + (75 + \frac{1}{2}Q)^2 \right]$$

Cuando $Q = 0$, la deformación en Q es $\gamma = 7200K/AG$.

$$\text{Para una sección rectangular de } 2'' \times 1'', \gamma = \frac{7200K}{AG} = \frac{7200(3/2)}{2(12 \times 10^6)} = 450 \times 10^{-6} \text{ pul.}$$

(b) Solución usando la ecuación de corte trasversal. Figura 5-23(b).

$$0 \leq x \leq 24$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = C_1 + \frac{KV}{AG} = C_1 + \frac{K(1125 - 100x)}{AG}$$

Integrando,

$$\gamma = C_1x + \frac{K}{AG}(1125x - 50x^2) + C_2$$

$$24 \leq x \leq 30$$

$$\frac{d\gamma}{dx} = C_1 + \frac{KV}{AG} = C_1 + \frac{K(1125 - 100x + 1875)}{AG}$$

Integrando,

$$\gamma = C_1x + \frac{K}{AG}(3000x - 50x^2) + C_3$$

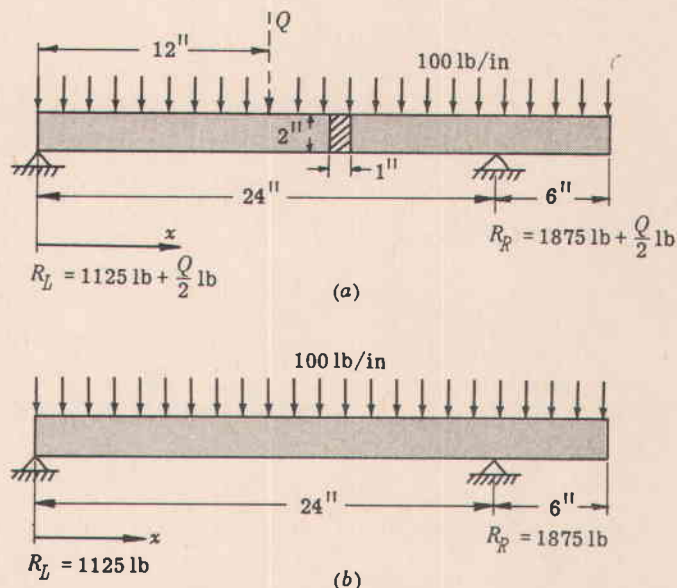


Fig. 5-23

Condiciones de contorno: $x = 0, y = 0$; $x = 24'', y = 0$ para ambas ecuaciones de deformación.

Sustituyendo las condiciones de contorno en las dos ecuaciones se obtiene $C_1 = 75K/AG$, $C_2 = 0$, $C_3 = -45.000K/AG$. La deformación en $x = 12''$ se encuentra de

$$y = C_1x + \frac{K}{AG}(1125x - 50x^2) + C_2 = \frac{75K}{AG}(12) + \frac{K}{AG}[1125(12) - 50(12)^2] + 0 = \frac{7200K}{AG}$$

(c) **Solución usando una función escalón.**

La ecuación de la fuerza cortante, usando una función escalón H_{24} , donde $H_{24} = 0$ para $x < 24''$ y $H_{24} = 1$ para $x \geq 24''$, es $V = 1125 - 100x + 1875H_{24}$.

La ecuación de deformación por corte es $\frac{dy}{dx} = \frac{K}{AG}V + C_1 = \frac{K}{AG}(1125 - 100x + 1875H_{24}) + C_1$.

Integrando, $y = \frac{K}{AG}[1125x - 50x^2 + 1875(x - 24)H_{24}] + C_1x + C_2$.

De las condiciones de contorno ($x = 0, y = 0$) y ($x = 24, y = 0$), tenemos $C_1 = 75K/AG$, $C_2 = 0$. La deformación en $x = 12''$ es

$$y = \frac{K}{AG}[1125(12) - 50(12)^2 + 0] + \frac{75K}{AG}(12) + 0 = \frac{7200K}{AG}$$

18. Determinar la deformación por fuerza cortante en P_1 y P_2 para la viga mostrada en la figura 5-24, la cual se encuentra cargada con $P_1 = 30$ libras y $P_2 = 30$ libras. Usar la ecuación de deformación por corte $dy/dx = C_1 + KV/AG$.

Solución:

$$0 \leq x \leq 6$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{K(30)}{AG}$$

Integrando,

$$(1) y = C_1x + \frac{30K}{AG}x + C_2$$

$$6 \leq x \leq 12$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{K(0)}{4AG}$$

Integrando,

$$(2) y = C_1x + 0 + C_3$$

$$12 \leq x \leq 18$$

$$\frac{dy}{dx} = C_1 + \frac{K(-30)}{AG}$$

Integrando,

$$(3) y = C_1x - \frac{30K}{AG}x + C_4$$

Condiciones de contorno:

$$x = 0, y = 0$$

$$x = 6, y \text{ de (1)} = y \text{ de (2)}$$

$$x = 12, y = 0 \text{ de (3) y (2)}.$$

Sustituyendo las condiciones de contorno en (1), (2) y (3) se obtiene

$$C_1 = -\frac{15K}{AG}, C_2 = 0, C_3 = \frac{180K}{AG}, C_4 = \frac{540K}{AG}$$

Así, de la ecuación (1), la deformación en el punto de aplicación de la carga P_1 es

$$y = -\frac{15K}{AG}x + \frac{30K}{AG}x + 0 = \frac{15K}{AG}x$$

y para $x = 6''$,

$$y = +\frac{90K}{AG} \quad (\text{el signo más indica deformación en el sentido positivo, esto es, hacia abajo}).$$

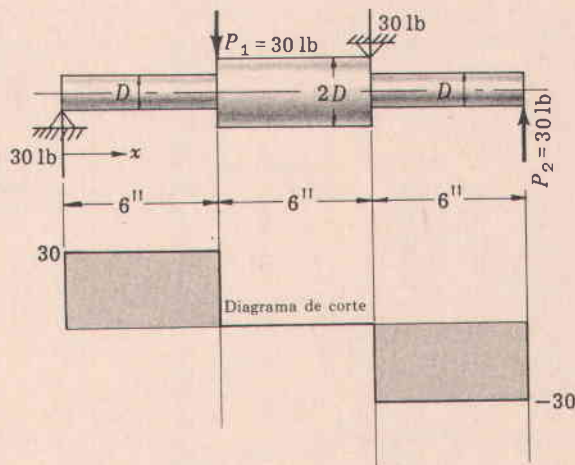


Fig. 5-24

La deformación en el punto de aplicación de la carga P_2 es, de la ecuación (3),

$$y = -\frac{15K}{AG}x - \frac{30K}{AG}x + \frac{540K}{AG} = -\frac{45K}{AG}x + \frac{540K}{AG}$$

y para $x = 18''$, $y = -270K/AG$ (el signo negativo indica una deformación hacia arriba).

19. Resolver el problema anterior usando el teorema de Castigliano. Ver la figura 5-25.

Solución:

La reacción izquierda es $\frac{1}{2}(P_1 + P_2)$ y la derecha $\frac{1}{2}(3P_2 - P_1)$.

La energía de deformación es

$$U = \int_0^6 \frac{K \left[\frac{1}{2}(P_1 + P_2) \right]^2 dx}{2AG} + \int_6^{12} \frac{K \left[\frac{1}{2}(P_1 + P_2) - P_1 \right]^2 dx}{2(4A)G} + \int_{12}^{18} \frac{K(-P_2)^2 dx}{2AG}$$

$$\text{Integrando, } U = \frac{K(P_1 + P_2)^2(6)}{8AG} + \frac{K(P_2 - P_1)^2(6)}{32AG} + \frac{K(P_2)^2(6)}{2AG}$$

$$\text{Deformación por corte en } P_1: y = \frac{\partial U}{\partial P_1} = \frac{3K}{2AG}(P_1 + P_2) - \frac{3K}{8AG}(P_2 - P_1) + 0$$

y para $P_2 = P_1 = 30 \text{ lb}$, $y = +\frac{90K}{AG}$ (el signo más indica una deformación en el sentido de P_1 , esto es, hacia abajo).

$$\text{Deformación por corte en } P_2: y = \frac{\partial U}{\partial P_2} = \frac{3K}{2AG}(P_1 + P_2) + \frac{3K}{8AG}(P_2 - P_1) + \frac{6K}{AG}P_2$$

y para $P_1 = P_2 = 30 \text{ lb}$, $y = +\frac{270K}{AG}$ (el signo más indica una deformación en el sentido de P_2 , esto es, hacia arriba).

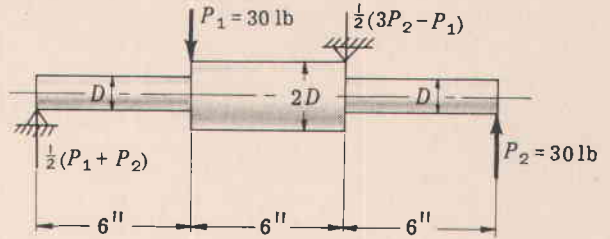


Fig. 5-25

20. Determinar la deformación debida al corte en el centro de una viga de sección transversal constante. La carga es uniforme y la viga está simplemente apoyada en sus extremos. Usar el teorema de Castigliano. Referirse a la figura 5-26.

Solución:

Introducir una carga concentrada Q en el punto en el cual se va a determinar la deformación. La energía de deformación por corte es

$$U = \int_0^{L/2} \frac{K}{2AG} \left(\frac{wL}{2} + \frac{Q}{2} - wx \right)^2 dx + \int_{L/2}^L \frac{K}{2AG} \left(\frac{wL}{2} - \frac{Q}{2} - wx \right)^2 dx$$

$$= -\frac{K}{6AGw} \left[\left(\frac{Q}{2} \right)^3 - \left(\frac{wL}{2} + \frac{Q}{2} \right)^3 + \left(-\frac{wL}{2} - \frac{Q}{2} \right)^3 - \left(-\frac{Q}{2} \right)^3 \right]$$

$$y = \frac{\partial U}{\partial Q} = -\frac{K}{6AGw} \left[\frac{3Q^2}{8} - \frac{3}{2} \left(\frac{wL}{2} + \frac{Q}{2} \right)^2 - \frac{3}{2} \left(-\frac{wL}{2} - \frac{Q}{2} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(-\frac{Q}{2} \right)^2 \right]$$

y para $Q = 0$, $y = KwL^2/8AG$.

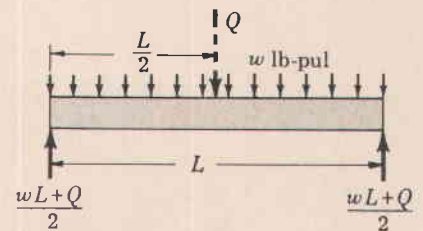


Fig. 5-26

21. Dos rotores deben montarse sobre tres cojinetes y acoplarse entre sí como se ilustra en la figura 5-27(a). Se necesita que, después de instalados, el momento de flexión en el eje B (en el cojinete central) sea cercano a cero. El procedimiento de instalación se muestra en la figura 5-27 (b). El eje B se montará en sus cojinetes. El eje A se montará en su cojinete (No. 1) temporalmente soportado en el acoplamiento. El soporte para el cojinete No. 1 se ajustará verticalmente para darle el valor apropiado al ángulo ϕ , entre las caras de las mitades del acoplamiento. Las mitades del acoplamiento se unirán fuertemente mediante pernos y el soporte temporal será retirado. Determinar el valor necesario del ángulo ϕ .

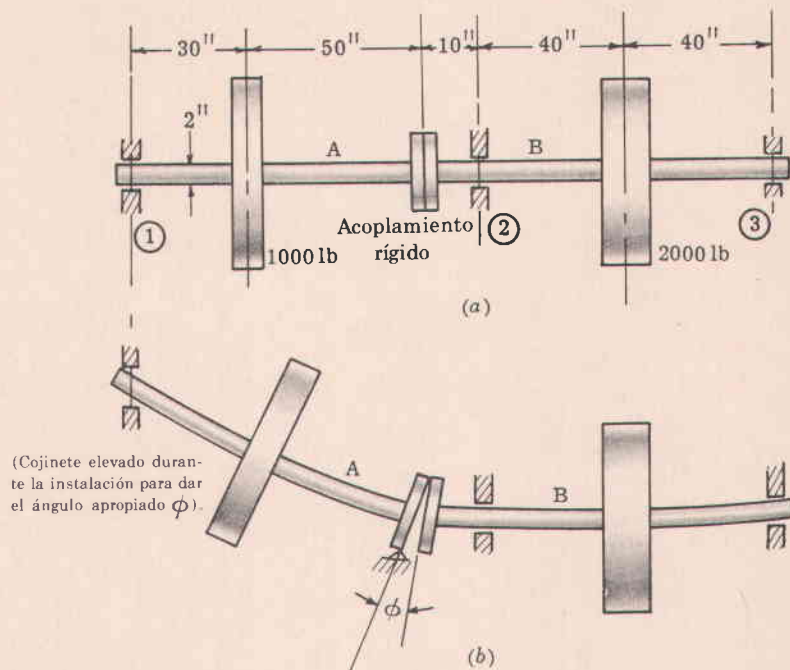


Fig. 5-27

Solución:

(a) Los diagramas de cuerpo libre de los dos rotores serán como se muestra en la figura 5-28. M_C es el momento establecido en el acoplamiento cuando es unido con los pernos. F es la fuerza vertical que una mitad del acoplamiento ejerce sobre la otra.

(b) Tomando momentos alrededor del extremo izquierdo del eje A,

$$M_C + 80F = (1000)(30).$$

El momento de flexión en el eje B en el cojinete No. 2 debe ser cero:

$$M_C - 10F = 0.$$

(c) Resolviendo las ecuaciones anteriores simultáneamente,

$$F = 333,3 \text{ lb,}$$

$$M_C = 3333 \text{ lb-pul.}$$

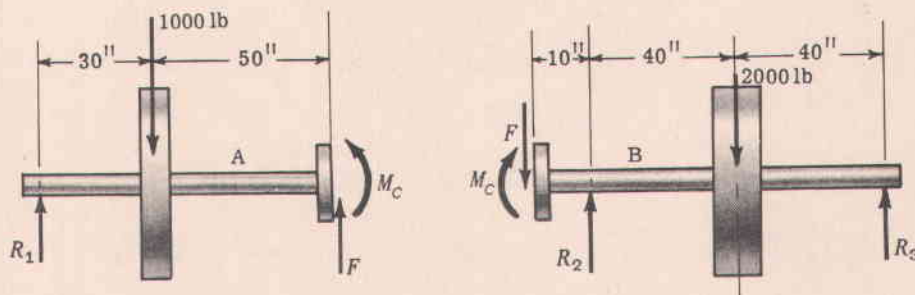


Fig. 5-28

- (d) Estudiemos ahora la curva elástica del eje A antes y después de unir con pernos las mitades del acoplamiento. La figura 5-29 muestra los diagramas de cargas, momento de flexión y deformaciones para este eje, antes de colocar los pernos.

La pendiente de la curva de deformación en el extremo del acoplamiento es $Z_1/80$. Por el teorema de los momentos de las áreas calculamos

$$Z_1 EI = (18.750)(50/2)(30 + 50/3) + (18.750)(30/2)(20) = 27,50 \times 10^6$$

Por tanto, el ángulo $\gamma_1 \approx \frac{Z_1}{80} = \frac{27,50 \times 10^6}{80EI}$ radianes (tan $\gamma_1 \approx \gamma_1$ ya que el ángulo es pequeño).

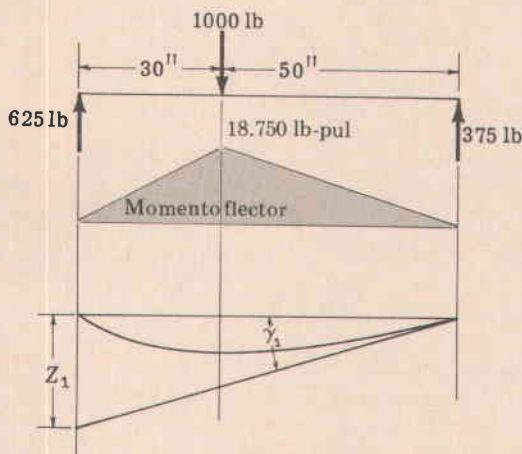


Fig. 5-29

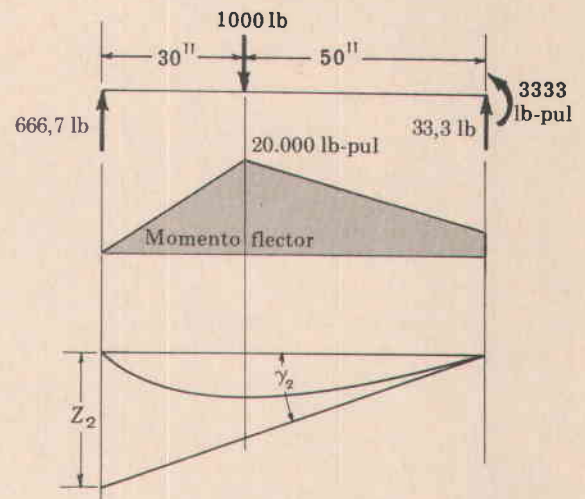


Fig. 5-30

La figura 5-30 muestra los diagramas de cargas, momentos de flexión, y deformaciones para el eje A, después de colocar los pernos.

El cálculo por el teorema de los momentos de las áreas da $Z_2 EI = 34,61 \times 10^6$; entonces

$$\gamma_2 = \frac{34,61 \times 10^6}{80EI} \text{ radianes}$$

- (e) El ángulo a través del cual debe rotarse la mitad del acoplamiento unida al eje A al colocar los pernos es

$$\gamma_2 - \gamma_1 = \left(\frac{(34,61 - 27,50) 10^6}{80EI} \right) \frac{180}{\pi} \text{ grados}$$

Como $E = 3 \times 10^7$ psi para el acero e $I = \pi 2^4/64$ pul⁴, $\gamma_2 - \gamma_1 = 0,215^\circ$.

- (f) Estudiemos ahora la curva elástica para el eje B antes y después de unir con pernos. La figura 5-31 muestra la situación antes de colocar los pernos. La porción del eje a la izquierda del cojinete izquierdo es recta y forma un ángulo γ_3 con la línea central del cojinete.

Después de colocados los pernos, la situación es como muestra la figura 5-32. La parte del eje a la izquierda del cojinete izquierdo es ahora curva y una tangente trazada en el extremo izquierdo forma un ángulo γ_4 con la línea central del cojinete. No obstante, como no ha cambiado el diagrama de momentos flectores entre los cojinetes, una tangente en el cojinete izquierdo aún forma un ángulo γ_3 con la línea central del cojinete. El ángulo que debe girar el acoplamiento al colocar los pernos es $(\gamma_4 - \gamma_3)$.

Pero $EI(\gamma_4 - \gamma_3) = \text{área del diagrama de}$

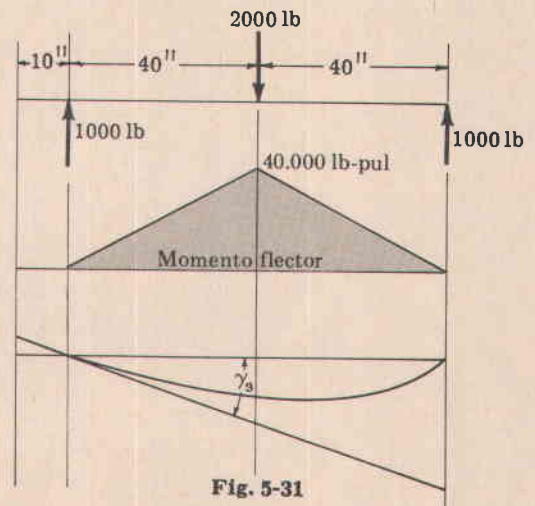


Fig. 5-31

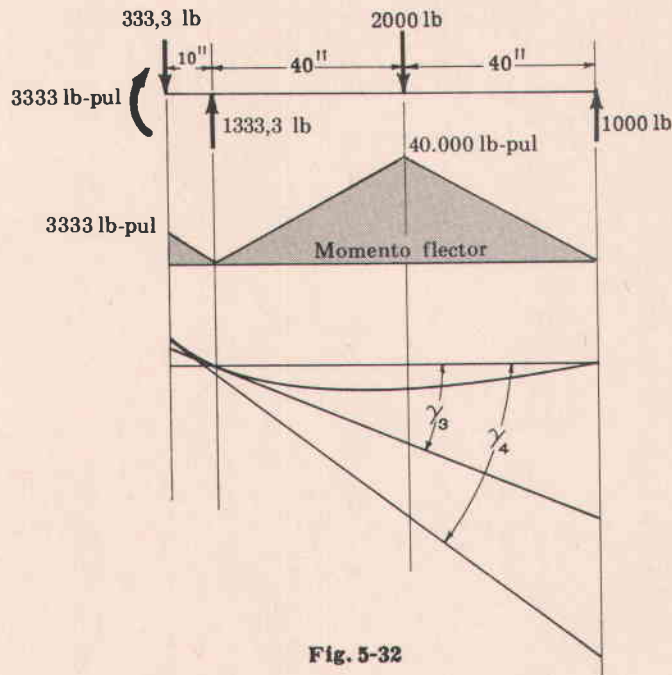


Fig. 5-32

momentos flectores entre el extremo izquierdo del eje y el cojinete izquierdo.

$$\gamma_4 - \gamma_3 = \frac{(3333/2)(10)}{EI} \left(\frac{180}{\pi} \right) = 0,041 \text{ grados}$$

(g) Finalmente, el ángulo entre las mitades del acoplamiento antes de poner los pernos debería ser

$$\phi = 0,215 + 0,041 = 0,256 \text{ grados}$$

22. Una sección ahusada de un eje como la mostrada en la figura 5-33(a) se analiza a veces en una forma más conveniente si se reemplaza por una sección escalonada, como muestra la figura 5-33(b). Para tener rigideces aproximadamente equivalentes, los diámetros de los escalonamientos deben determinarse en la siguiente forma:

$$(D'_1)^4 = \frac{D_0^4 + D_1^4}{2},$$

$$(D'_2)^4 = \frac{D_1^4 + D_2^4}{2},$$

$$(D'_3)^4 = \frac{D_2^4 + D_3^4}{2}$$

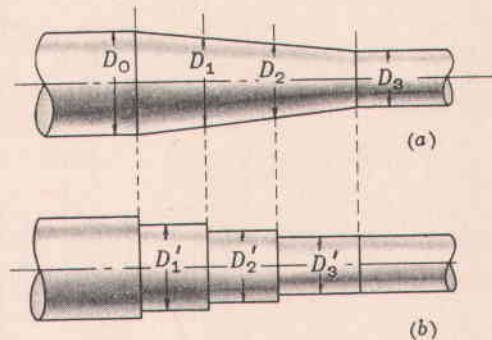


Fig. 5-33

23. En la vecindad de ensanchamientos y ranuras, no es efectivo todo el material para producir rigidez en el eje. Una regla aproximada es ignorar el material sombreado, como muestra la figura 5-34.

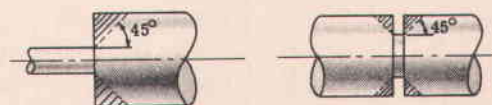


Fig. 5-34

24. Una barra rectangular tiene una sección transversal de $2'' \times 3''$ y $40''$ de largo. El límite de fluencia del material usado es 50.000 psi. En los extremos se aplican cargas axiales. Determinar: (a) la relación L/k ; (b) cuál de las fórmulas (de Euler o de J. B. Johnson) debe usarse; (c) la carga crítica si los extremos son relativamente rígidos; (d) la carga axial segura para un factor de seguridad $N = 3$; (e) el esfuerzo equivalente de compresión.

Solución:

$$(a) \quad \frac{L}{k} = \frac{40}{\sqrt{I(\min)/A}} = \frac{40}{\sqrt{(bh^3/12)/bh}} = 69,3 \text{ para } h = 2''$$

- (b) El valor de L/k por debajo del cual debe usarse la fórmula de J. B. Johnson y por encima del cual debe usarse la de Euler es

$$\frac{L}{k} = \sqrt{\frac{2C\pi^2 E}{s_y}} = \sqrt{\frac{2(1)(\pi^2)(30)(10^6)}{50.000}} = 109$$

Por tanto, debe usarse la fórmula de J. B. Johnson. Observar que C se ha tomado igual a 1, aun cuando los extremos se consideran relativamente rígidos.

- (c) La carga crítica es

$$F_{cr} = s_y A \left[1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E} \right] = 50.000 (6) \left[1 - \frac{50.000(69,3)^2}{4(1)(\pi^2)(30)(10^6)} \right] = 239.000 \text{ lb.}$$

- (d) La carga axial segura es $F = F_{cr}/N = 239.000/3 = 79.700 \text{ lb.}$

- (e) El esfuerzo equivalente de compresión es $s_{eq} = \frac{F}{A} \left[\frac{1}{1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E}} \right] = 16.700 \text{ psi.}$

Notar que el esfuerzo anterior es el mismo que se habría obtenido de

$$\frac{s_y}{s_{eq}} = N, \quad \frac{50.000}{s_{eq}} = 3, \quad \text{o} \quad s_{eq} = 16.700 \text{ psi.}$$

Notar también que utilizando simplemente F/A se tendría un esfuerzo de $79.000/6 = 13.800 \text{ psi}$, el cual no tiene ningún significado por presentarse el efecto de columna.

25. El vástago del pistón de un cilindro de aire debe diseñarse para una carga axial de 6000 lb. El vástago extendido tiene una longitud de $20''$. Aun cuando un extremo del vástago está sujetado más o menos rígidamente al pistón y el otro extremo está articulado a un elemento que está restringido en una guía, debe usarse un valor de $C = 1$. Determinar el tamaño del vástago que debe utilizarse para un factor de seguridad de 2,5 con un material cuyo límite de fluencia es 40.000 psi.

Solución:

- (a) Al principio no puede determinarse si se emplea la ecuación de Euler o la de J. B. Johnson, ya que se desconoce el diámetro. Un procedimiento de tanteos es el adecuado. Ensayamos la ecuación de Euler y la verificamos al final, para lo cual la usamos en la forma de esfuerzo equivalente.

El esfuerzo permisible es $s_{eq} = s_y/N = 40.000/2,5 = 16.000 \text{ psi.}$

$$s_{eq} = \frac{F}{A} \left[\frac{s_y (L/k)^2}{C\pi^2 E} \right] \quad \text{o} \quad 16.000 = \frac{6000}{\frac{1}{4}\pi D^2} \left[\frac{40.000 (20/\frac{1}{4}D)^2}{(1)\pi^2 (30 \times 10^6)} \right]$$

de la cual $D = 0,802''$. Ensayar con $D = 13/16''$.

- (b) Verificación de L/k : $\frac{L}{k} = \frac{L}{\frac{1}{4}D} = \frac{20}{\frac{1}{4}(13/16)} = 98,5$

Para $C = 1$, $E = 30 \times 10^6 \text{ psi}$ y un límite de fluencia de 40.000 psi, debe usarse la ecuación de Euler si L/k es mayor que 121. Por tanto, debería haberse usado la ecuación de J. B. Johnson.

- (c) Usando la fórmula de J. B. Johnson, $D = 0,833''$. Usar $D = 7/8''$. Verificación final:

$$\frac{L}{k} = \frac{L}{\frac{1}{4}D} = \frac{20}{\frac{1}{4}(7/8)} = 91,4.$$

26. Un tornillo de rosca cuadrada de 1" tiene 15" de largo entre la tuerca y el cuello. La carga axial es de 5000 lb y el momento de torsión en el tornillo entre la tuerca y el cuello es 1000 lb-pul. Usando $C = 1$ y despreciando la rosca, determinar el factor de seguridad si se utiliza un acero cuyo límite de fluencia en tracción es 50.000 psi. (Considerar que la carga es permanente.)

Solución:

(a) El diámetro del núcleo de un tornillo de rosca cuadrada de 1" es 0,783". $\frac{L}{k} = \frac{15}{0,783/4} = 76,6$.

- (b) El valor de L/k que determina si se usa la fórmula de J. B. Johnson o la de Euler es:

$$\frac{L}{k} = \sqrt{\frac{2C\pi^2 E}{s_y}} = \sqrt{\frac{2(1)(\pi^2)(30)(10^6)}{50.000}} = 109$$

Por tanto, debe usarse la fórmula de J. B. Johnson con $L/k = 76,6$.

- (c) El esfuerzo equivalente de compresión es

$$s_{eq} = \frac{F}{A} \left[\frac{1}{1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E}} \right] = \frac{5000}{\frac{1}{4}\pi (0,783)^2} \left[\frac{1}{1 - \frac{50.000(76,6)^2}{4(1)(\pi^2)(30)(10^6)}} \right] = 13.900 \text{ psi}$$

(d) El esfuerzo cortante debido a la torsión es $s_s = \frac{Tc}{J} = \frac{1000(0,783/2)}{(\pi/32)(0,783)^4} = 10.600 \text{ psi}$

(e) El esfuerzo cortante máximo es $\tau(\max) = \sqrt{(s_{eq}/2)^2 + s_s^2} = \sqrt{(13.900/2)^2 + (10.600)^2} = 12.650 \text{ psi}$.

(f) El límite de fluencia en corte es cercano a 0,5 $s_y = 0,5(50.000) = 25.000 \text{ psi}$.

El factor de seguridad es $25.000/12.650 = 1,98$.

27. Igual al problema 26, excepto que la carga se aplica repetidamente desde cero hasta el máximo. Tomar como factor efectivo de concentración de esfuerzos K_f para la rosca en carga axial 2,8 y para la rosca en torsión tomar $K_f' = 2,0$ (supuesto). El límite de fatiga del material para flexión con inversión es 32.000 psi.

Solución:

- (a) En el problema 26, el esfuerzo equivalente máximo en compresión es 13.900 psi y el esfuerzo máximo en torsión es 10.600 psi.

- (b) El esfuerzo normal equivalente debido a la carga variable, con un esfuerzo máximo de 13.900 psi, un esfuerzo medio de 6950 psi y un esfuerzo variable de 6950 psi es

$$s_e = s_m + \frac{s_y K_f s_v}{s_n ABC} = 6950 + \frac{(50.000)(2,8)(6950)}{(32.000)(0,7)(0,85)(1)} = 58.000 \text{ psi}$$

donde $A = 0,7$ (carga axial), $B = 0,85$ (efecto de tamaño), $C = 1$ (por usar factores efectivos de concentración de esfuerzos.)

- (c) El esfuerzo cortante equivalente debido a la carga variable, con un máximo de 10.600 psi, un esfuerzo medio de 5300 psi, y un esfuerzo variable de 5300 psi, es

$$s_{eS} = s_{mS} + \frac{s_y K_f' s_{vS}}{s_n ABC} = 5300 + \frac{(50.000)(0,6)(2,0)(5300)}{(32.000)(0,6)(0,85)(1)} = 24.800 \text{ psi}$$

- (d) El esfuerzo cortante equivalente debido a la carga variable es

$$\tau_e = \sqrt{(s_e/2)^2 + (s_{eS})^2} = \sqrt{(58.000/2)^2 + (24.800)^2} = 38.200 \text{ psi}$$

- (e) El esfuerzo seguro de diseño τ_e , tratándolo como un esfuerzo estático es

$$\frac{s_{ys}}{N} = \frac{0,5(50.000)}{N} = 38.300 \text{ psi}$$

de la cual $N = 0,65$. Un valor recomendable para un diseño seguro puede ser 1,5, es decir que el diseño propuesto no es satisfactorio.

Notar que en este problema hay dos esfuerzos "equivalentes". Uno de ellos debido a un esfuerzo de compresión equivalente y el otro debido a la carga variable.

28. Para la fórmula de Euler, deducir la relación del esfuerzo equivalente de columna.

Solución:

$$F_{cr} = \frac{C\pi^2 EA}{(L/k)^2}, \quad \frac{F_{cr}}{NA} = \frac{C\pi^2 E}{N(L/k)^2}, \quad \frac{F}{A} = \frac{C\pi^2 E}{N(L/k)^2}$$

donde N es el factor de seguridad, A es el área, y la carga segura es $F = F_{cr}/N$.

$$\text{Colocar } N = \frac{s_y}{s_{eq}} \text{ en la última ecuación y resolver para } s_{eq} = \frac{F}{A} \left[\frac{s_y (L/k)^2}{C\pi^2 E} \right].$$

29. Para la fórmula de J. B. Johnson, deducir la relación del esfuerzo equivalente de columna.

Solución:

$$F_{cr} = s_y A \left[1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E} \right], \quad \frac{F_{cr}}{NA} = \frac{s_y}{N} \left[1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E} \right], \quad \frac{F}{A} = \frac{s_y}{N} \left[1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E} \right]$$

donde N es el factor de seguridad, A es el área, y la carga segura es $F = F_{cr}/N$.

$$\text{Colocar } N = \frac{s_y}{s_{eq}} \text{ en la última ecuación y resolver para } s_{eq} = \frac{F}{A} \left[\frac{1}{1 - \frac{s_y (L/k)^2}{4C\pi^2 E}} \right].$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

30. Demostrar que la deformación por flexión en el extremo de una viga en voladizo de longitud L , debida a una carga uniformemente distribuida de w lb por unidad de longitud es $wL^4/8EI$.
(a) usando el método del momento de las áreas, (b) usando el teorema de Castigliano.

31. Usando una función escalón, establecer la ecuación para $EI(d^2y/dx^2)$ y por medio de integración doble demostrar que la deformación máxima de una viga en voladizo de longitud L , debida a una carga concentrada P colocada a una distancia a del extremo libre y a una distancia b del extremo fijo es $\frac{Pb^2}{6EI}(2b + 3a)$.

32. Determinar la deformación vertical debida a la flexión en el punto $x = a$, para un elemento horizontal de longitud L , cuando está sometido a una fuerza horizontal F que actúa a la izquierda y a una distancia h sobre el eje neutro, en la sección $x = a$, como muestra la figura 5-35.
(a) Usar el método de la viga conjugada.
(b) Usar una función escalón y aplicar doble integración.

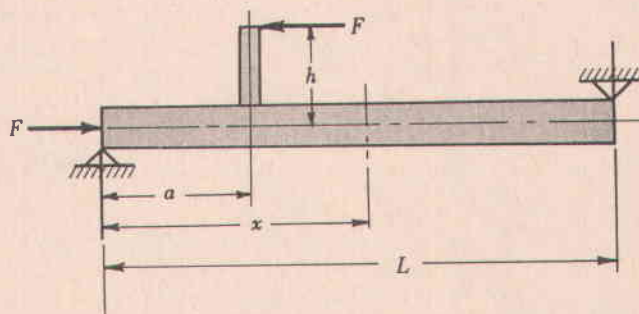


Fig. 5-35

$$\text{Resp. } y = \frac{Fha}{3EIL}(L - a)(L - 2a)$$

33. Un eje de acero de 2 pul de diámetro está libremente apoyado sobre dos cojinetes separados 30 pul. El eje opera a 1800 rpm y soporta un volante en el punto medio entre los cojinetes. ¿Cuál debe ser el peso del volante si se quiere operar el eje al 50% de su velocidad crítica? Usar el método de la viga conjugada para la deformación. Resp. $y = 0,00271$ pul. (Ver capítulo 8 para velocidades críticas.) Peso del volante = 113,5 lb
34. Un eje de diámetro constante está simplemente apoyado en sus extremos. La distancia entre sus soportes es 20 pul y tiene una masa de 50 lb localizada 4 pul a la derecha del cojinete izquierdo. El eje debe operar a 1800 rpm y se sabe que la velocidad crítica mínima, o velocidad de alabeo que daría una operación satisfactoria es de 2500 rpm. ¿Cuál es el diámetro mínimo que podría usarse de modo que la velocidad crítica mínima sea 2500 rpm? Resp. Deformación en el sitio de la carga = $3412/EI$. Diámetro mínimo del eje = 0,81 pul
35. Un eje de acero, libremente soportado en sus extremos, está hecho de tres secciones. La primera, de 12" de largo, tiene un diámetro constante. La segunda sección, de 24" de largo, tiene un diámetro dos veces mayor que el de la primera. La tercera sección, de 12" de largo, tiene un diámetro igual al de la primera sección. En los sitios donde los diámetros cambian se aplican cargas iguales de 200 lb. Demostrar que la deformación bajo cada carga concentrada es $0,0929/D^4$, donde D es el diámetro de las secciones extremas.
36. Un eje de acero, soportado libremente sobre cojinetes separados 2 pies, soporta una carga concentrada de 200 lb situada a 8 pul del cojinete derecho y una carga de 100 lb situada a 10 pul del cojinete izquierdo. El diámetro del eje es constante. Demostrar que la deformación bajo la carga de 100 lb es $0,00244/I$ y bajo la carga de 200 lb es $0,00228/I$.
37. Un eje de acero de 4" está soportado sobre cojinetes separados 5 pies y soporta un disco de 3000 lb situado a $1\frac{1}{2}$ pies del cojinete izquierdo. El eje tiene un orificio de 2 pul que se extiende desde el cojinete derecho hasta la línea central del disco de 3000 lb. Determinar la deformación en el punto del disco. Resp. 0,027 pul
38. Un eje, de sección transversal constante y 2" de diámetro, está libremente soportado por dos cojinetes separados 30". El eje soporta dos masas, cada una de 400 lb. Una masa está localizada 9", hacia la izquierda del cojinete derecho. Determinar la deformación bajo cada masa y la velocidad crítica del eje.
Resp. $y = 0,0124''$, velocidad crítica = 1680 rpm (Ver capítulo 8.)

39. El eje de acero de una máquina tiene 24" de longitud entre cojinetes. A partir del cojinete izquierdo y en una distancia de 8" el diámetro es de 2". El resto del eje tiene un diámetro de 3". Una carga concentrada de 1000 lb está situada a 10" del cojinete izquierdo, y una de 2000 lb a 15" de dicho cojinete. ¿Cuál es la deformación en el punto de aplicación de cada carga?
 Resp. $y = 0,011''$ bajo la carga de 1000 lb, $y = 0,0094''$ bajo la carga de 2000 lb
40. Un eje de 4" de diámetro se encuentra soportado libremente por cojinetes que están separados 48". En su centro existe un engranaje cuyo peso es 3000 lb. Un orificio de 2" de diámetro en el centro de la sección transversal se extiende 18" desde el cojinete izquierdo hacia el engranaje. En este punto el diámetro del orificio se reduce a $1\frac{1}{2}''$, y el agujero continúa a lo largo de la longitud restante del eje. Determinar la deformación bajo el engranaje por tres métodos diferentes, y calcular la velocidad crítica del eje.
 Resp. $y = 0,0189''$. Velocidad crítica = 1365 rpm (Ver capítulo 8.)
41. Un eje de acero, de 30" de largo, está soportado por cojinetes en sus extremos. El diámetro del eje es 2" desde el cojinete izquierdo hasta un punto situado 12" a la derecha de él. El resto del eje tiene un diámetro de $1\frac{1}{2}''$. Dos cargas de 400 lb cada una se encuentran sobre el eje, la primera de ellas en el sitio del cambio de sección y la segunda en el punto medio de la porción más corta del eje. Usar el método de la viga conjugada para determinar la deformación en el punto de acción de cada una de las cargas.
 Resp. $y = 0,0381''$ bajo la carga izquierda, $y = 0,0374''$ bajo la carga derecha
42. Un eje de acero, simplemente apoyado sobre cojinetes separados 45", debe tener un diámetro D sobre las 15" centrales y $0,75D$ en los extremos. El eje soportará una carga de 4000 lb en los puntos de cambio de diámetro. Si las deformaciones estáticas en los puntos de localización de las cargas no deben exceder de 0,001", ¿cuál debe ser el diámetro del eje y cuál la deformación máxima en él?
 Resp. $D = 6,15''$, $y(\max) = 0,00108''$ en el centro del eje
43. Un eje de acero está simplemente apoyado sobre dos cojinetes separados 30". Para las primeras 10" desde el cojinete izquierdo el diámetro del eje es 3"; para las siguientes 8" el diámetro es $2\frac{1}{2}''$; y para las 12" restantes el diámetro es 2". Una carga de 700 lb está colocada en un punto a 10" hacia la derecha del cojinete izquierdo. Determinar la deformación estática en el punto de acción de la carga de 700 lb. ¿Cuál será la velocidad crítica del eje?
 Resp. $y = 0,0056''$. La velocidad crítica será 2500 rpm (Ver capítulo 8.)
44. Un eje de 2" de diámetro y 60" de longitud, recibe un momento de torsión de 10.000 lb-pul proveniente de una polea situada en su extremo izquierdo. Un engranaje situado en el punto medio del eje entrega 6000 lb-pul y otro engranaje situado en el extremo derecho entrega el momento de torsión para el balance. Calcular la deformación torsional máxima del eje para estas condiciones, despreciando el efecto de las ranuras de las cuñas. Utilizar $G = 11,5 \times 10^6$ psi. Resp. 1,335"
45. Determinar la ecuación de la deformación debida al corte en una viga de longitud L , simplemente apoyada. La carga es uniforme y su valor es w lb/pul (kg/cm)
 Resp. $y = \frac{Kw}{2AG}(Lx - x^2)$, $y(\max) = \frac{KwL^2}{8AG}$ con $x = \frac{L}{2}$
46. Un eje hueco de 6" d.e. $\times$ 5 $\frac{1}{2}$ " d.i. $\times$ 30" de largo, está soportado en sus extremos y carga cuatro rotores del mismo peso y espaciados 6" entre centros, como muestra la figura 5-36(a). Cada rotor pesa 80 lb, dentro de las cuales se incluye $\frac{1}{4}$ del peso del eje. Entonces, para la carga que se muestra en la figura 5-36(b), determinar: (a) la deformación del eje debida al momento flector, en los rotores extremos y en los centrales; (b) la deformación del eje debida al corte, en los rotores extremos y en los centrales.
 Resp. (a) $y = 1,44 \times 10^{-4}$ pul en los rotores extremos, por flexión
 $y = 2,31 \times 10^{-4}$ pul en los rotores centrales, por flexión
 (b) $y = 0,354 \times 10^{-4}$ pul en los rotores extremos, por corte
 $y = 0,532 \times 10^{-4}$ pul en los rotores centrales, por corte

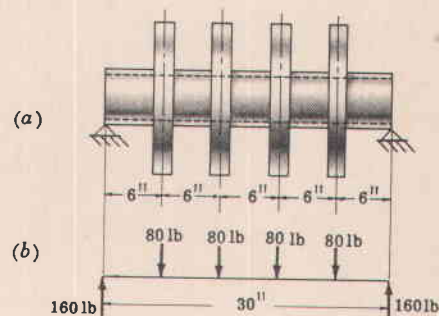
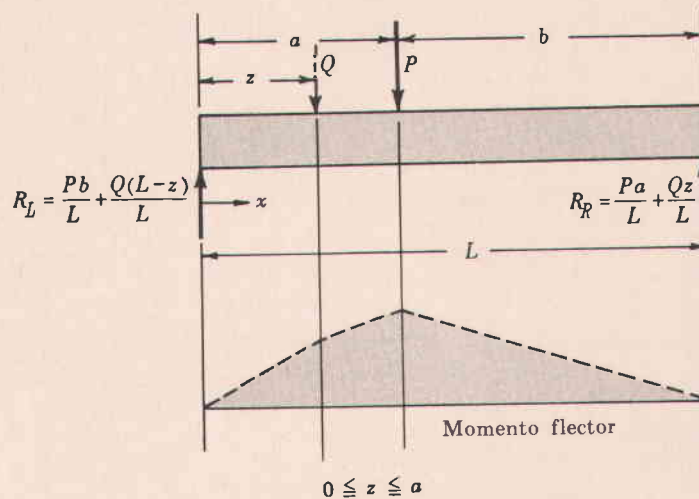


Fig. 5-36

47. Utilizando el teorema de Castiglino, deducir la ecuación general de la deformación debida a la flexión en cualquier punto de una viga simplemente apoyada, de sección transversal uniforme, que soporta una carga P aplicada como muestra la figura 5-37. Sugerencia: Considerar una carga concentrada imaginaria Q aplicada a una distancia z del soporte izquierdo. La distancia z es variable, aun cuando se considera como un valor fijo al determinar la energía de deformación. La distancia z está limitada a $0 \leq z \leq a$ en el diagrama de momentos mostrado.



$$\text{Resp. } y = \frac{Pbz}{6LEI} [L^2 - b^2 - z^2].$$

Esta ecuación es válida para $0 \leq z \leq a$. En forma similar puede determinarse la ecuación para el tramo a la derecha de P .

Fig. 5-37

PROBLEMAS SOBRE COLUMNAS

48. ¿Cuál es la carga permisible de compresión para una barra de $1'' \times 2''$ y $20''$ de largo, para un factor de seguridad de 4? El límite de fluencia del material es 40.000 psi. $C = 1$.
 Resp. Para $L/k = 69,4$, se aplica la fórmula de J.B. Johnson. $F = 16.750$ lb
49. Similar al problema anterior, pero con $C = \frac{1}{4}$.
 Resp. Para $L/k = 69,4$, se aplica la ecuación de Euler. $F = 7670$ lb
50. El vástago del pistón de un cilindro de aire tiene $60''$ de longitud. Determinar el tamaño de vástago requerido, para una carga axial de 2000 lb, si el material es acero con un límite de fluencia de 40.000 psi. Tomar un factor de seguridad = 4 y $C = 1$.
 Resp. Se aplica la ecuación de Euler. $D = 1,58''$. Usar $1\frac{5}{8}''$
51. Un tornillo de rosca cuadrada de $1''$ tiene una longitud de $40''$ entre el cuello y la tuerca. La carga axial es de 2000 lb y el momento de torsión entre la tuerca y el cuello es de 1000 lb-pul. Usando $C = 1$ y despreciando la rosca y las concentraciones de esfuerzos, determinar el factor de seguridad. Límite de fluencia en tracción del acero empleado, 510.000 psi. El diámetro del núcleo es $0,783''$.
 Resp. Se aplica la ecuación de Euler. Esfuerzo equivalente de columna = 12.900 psi. El factor de seguridad para un límite de fluencia en corte de 25.000 psi es 1,93

Capítulo 6

Diseño de elementos de máquinas sometidos a la acción de cargas variables

EL DISEÑO DE ELEMENTOS DE MAQUINAS POR SU RESISTENCIA es uno de los pasos necesarios al establecer las proporciones de un elemento de una máquina. Los pasos corrientes en el diseño de máquinas son: la determinación de una disposición cinemática, un análisis de fuerzas, la selección de los materiales y el proporcionamiento de las partes. El proporcionamiento de las partes puede estar controlado por la resistencia, la rigidez, la velocidad crítica, la rata de corrosión, la fabricación, la facilidad de fundición, la estabilidad, etc.

LA RESISTENCIA DE UN ELEMENTO DE UNA MAQUINA está influenciada por factores tales como la concentración de esfuerzos, la fatiga o carga variable, el choque, el acabado de su superficie, y el tamaño de la parte.

LA CONCENTRACION DE ESFUERZOS puede tener su origen en cualquier discontinuidad (elevador de esfuerzos) tal como un orificio, un cambio brusco en la sección transversal, una ranura, un canal o un defecto superficial. Un ejemplo típico de un elevador de esfuerzos se muestra en la figura 6-1, en la cual en un elemento en tracción se ha abierto un orificio de diámetro d . El valor del esfuerzo máximo que se presenta en el borde del orificio puede imaginarse como el esfuerzo normal nominal multiplicado por un factor de concentración de esfuerzos K_t .

$$s(\max) = K_t \frac{P}{A}$$

donde

P = carga axial total, lb (kg)

A = área neta de la sección transversal que contiene el orificio, pul² (cm²)

K_t = factor teórico de concentración de esfuerzos
(o factor geométrico)

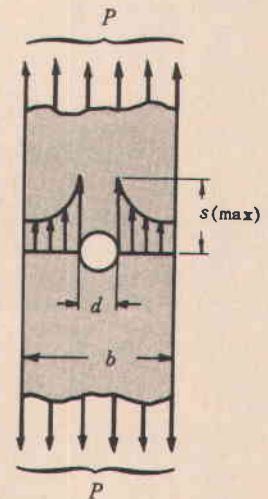


Fig. 6-1

El valor de K_t es difícil de calcular en la mayoría de los casos, y frecuentemente se determina mediante algún procedimiento experimental, tal como el análisis fotoelástico de un modelo plástico de la parte. Bajo cargas estacionarias, los materiales dúctiles no se afectan por elevadores de esfuerzos hasta el punto de que el análisis fotoelástico puede mostrar una redistribución de esfuerzos en la región de los elevadores de esfuerzo debida al flujo plástico del material cuando el esfuerzo máximo llega al límite de fluencia. El efecto de un elevador de esfuerzos sobre un material frágil tal como el hierro fundido, bajo cargas estacionarias, puede ser grave tal como lo indica un análisis fotoelástico, ya que se presenta un flujo plástico muy pequeño o nulo. Bajo cargas repetidas, sin embargo, la resistencia a la fatiga aun en materiales dúctiles puede decrecer enormemente debido a la concentración de esfuerzos.

LA SENSIBILIDAD A LA ENTALLA q del material puede usarse para determinar el factor de reducción de la resistencia a la fatiga o factor real de concentración de esfuerzos K_f en función del factor teórico de concentración de esfuerzos para el caso de cargas repetidas. Los valores de K_t y q pueden encontrarse en "Stress Concentration Factors" de R. E. Peterson, y en la literatura que trata este asunto.

$$q = \frac{K_f - 1}{K_t - 1} \quad \text{o} \quad K_f = 1 + q(K_t - 1)$$

donde

q = valor experimental de la sensibilidad a la entalla debida a la concentración de esfuerzos. Los valores van desde 0 hasta 1,0.

K_t = valor teórico del factor de concentración de esfuerzos. Los valores medios van de 1,0 a 3,0, pero pueden ser superiores a 3,0.

K_f = factor real de concentración de esfuerzos para determinar la reducción de la resistencia a la fatiga del material.

LOS ESFUERZOS VARIABLES PUEDEN CLASIFICARSE como (a) **invertidos**, (b) **repetidos**, (c) **fluctuantes**, y (d) **alternados**, como muestra la figura 6-2. El esfuerzo máximo es el mayor valor algebraico y el esfuerzo mínimo es el menor valor algebraico de un esfuerzo variable. El esfuerzo medio s_m es el promedio del esfuerzo máximo y el mínimo. El esfuerzo variable s_v es el aumento o la disminución del esfuerzo por encima o por debajo del esfuerzo medio

$$s_m = \frac{1}{2} [s(\max) + s(\min)], \quad s_v = \frac{1}{2} [s(\max) - s(\min)]$$

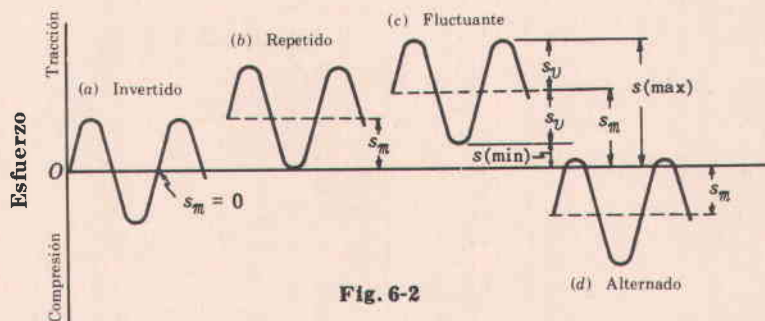


Fig. 6-2

EL LIMITE DE FATIGA de un material se determina experimentalmente rotando una probeta que se mantiene en flexión. En la figura 6-3 se presentan curvas típicas que muestran la resistencia a la fatiga de un material ferroso y de uno no ferroso. Notar que el límite de fatiga de esta probeta particular de acero está bien definido en unas 35.500 psi, mientras que la probeta de aluminio no tiene un límite de fatiga bien definido. El valor del límite de fatiga de 35.500 para la probeta de acero es en carga con inversión, en el cual la fibra extrema es esforzada alternativamente por cantidades iguales en tracción y compresión. Para evitar confusión, el término "límite de fatiga" se usará únicamente para flexión con inversión. Para los otros tipos de carga se usará el término "resistencia a la fatiga" cuando se quiera hacer referencia a la resistencia del material a la fatiga. El valor de la resistencia a la fatiga será diferente del límite de

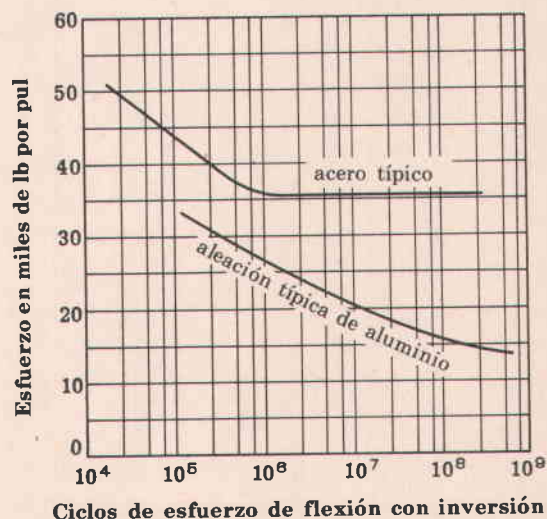


Fig. 6-3

fatiga para otros tipos de carga, y también será diferente si la probeta está sometida a carga variable debida a torsión o a cargas axiales. Una forma de dibujar la resistencia a la fatiga en función del esfuerzo medio para diferentes tipos de carga, la proporciona el diagrama modificado de Goodman que muestra la figura 6-4. Cada material ensayado tiene su propio diagrama de Goodman. Sin embargo, si no se dispone de datos de ensayos, pueden construirse diagramas de Goodman aproximadamente para varios materiales dúctiles suponiendo que el límite de fatiga bajo carga invertida es aproximadamente igual a la mitad de la última resistencia del material. Más recientemente, los datos sobre resistencia a la fatiga se han dibujado en la forma que muestra la figura 6-5. Esta gráfica muestra la relación entre la línea de Goodman y la línea, un poco más conservadora, de Soderberg. En la discusión siguiente se usará la línea de Soderberg como base para el diseño. Aplicando un factor de seguridad apropiado N al límite de fatiga y a la resistencia a la fluencia, puede trazarse la línea CD paralela a la línea de Soderberg AB como muestra la figura 6-6. La línea CD puede considerarse entonces como la línea para un esfuerzo seguro. De la geometría de la gráfica puede demostrarse que

$$\frac{1}{N} = \frac{s_m}{s_y} + \frac{s_v}{s_r}$$

Para convertirla en una ecuación de diseño, el valor experimental del límite de fatiga s_r bajo flexión con inversión debe reducirse por efecto de tamaño, superficie, y tipo de carga variable si es de torsión o axial en vez de flexión. El esfuerzo variable calculado debe aumentarse por medio del factor real de concentración de esfuerzos K_f para materiales dúctiles. Para materiales frágiles el factor teórico de concentración de esfuerzos K_t debe aplicarse al esfuerzo medio y K_f al esfuerzo variable.

$$\frac{1}{N} = \frac{s_m}{s_y} + \frac{K_f s_v}{s_r ABC} \quad \text{para materiales dúctiles en tracción o compresión}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{s_m}{s_y} K_t + \frac{s_v K_f}{s_r ABC} \quad \text{para materiales frágiles}$$

$$\frac{1}{N} = \frac{s_m s}{s_y s} + \frac{K_f s_{vs}}{s_r ABC} \quad \text{para materiales dúctiles en corte}$$

donde

s_y = límite de fluencia en tracción o compresión; debe tener el mismo signo del esfuerzo medio s_m .

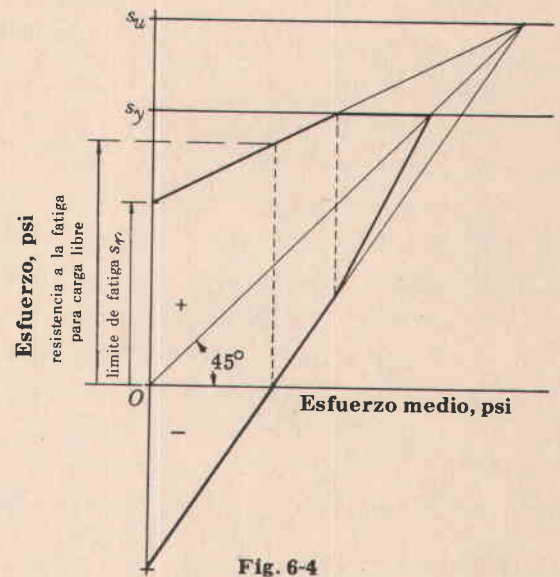


Fig. 6-4

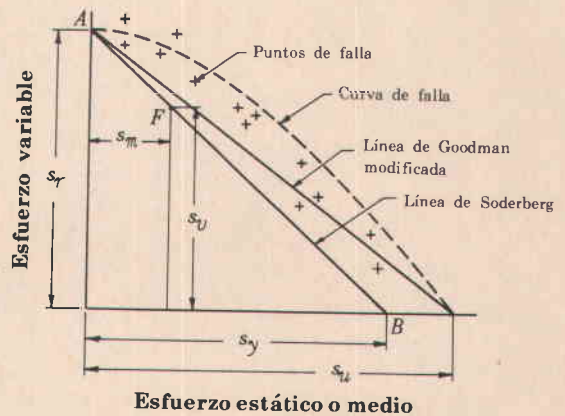


Fig. 6-5

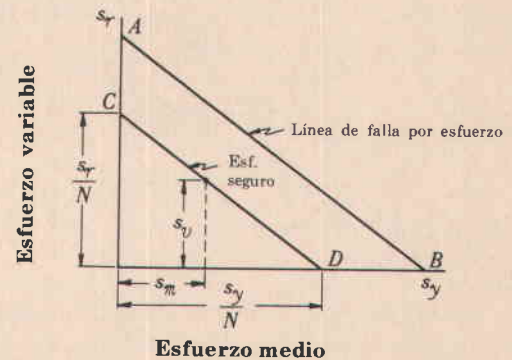


Fig. 6-6

s_m = esfuerzo normal medio, psi (kg/cm²).

s_{ms} = esfuerzo cortante medio, psi (kg/cm²).

s_v = esfuerzo normal variable, psi (kg/cm²).

s_{vs} = esfuerzo cortante variable, psi (kg/cm²).

s_r = límite de fatiga del material en flexión con inversión, psi (kg/cm²).

K_t = factor teórico de concentración de esfuerzos.

K_f = factor real de concentración de esfuerzos basado en la sensibilidad a la entalla del material.

A = factor de corrección para carga diferente a la flexión con inversión.

A = 0,7 para carga axial invertida.

A = 0,6 para carga torsional invertida.

B = factor de corrección por tamaño, ya que la probeta normal del ensayo tiene un diámetro nominal de 0,3 pul.

B = 0,85 para partes cuyo tamaño va de $\frac{1}{2}$ pul a 2 pul.

C = factor de corrección por superficie, ya que la probeta del ensayo es pulida.

Algunos valores de C para una superficie maquinada y para una superficie laminada en caliente se muestran a continuación:

s_u	C Superficie maquinada	C Superficie laminada en caliente
60.000 psi	0,91	0,72
70.000 psi	0,90	0,68
80.000 psi	0,88	0,62
90.000 psi	0,86	0,58
100.000 psi	0,85	0,55
110.000 psi	0,84	0,50
120.000 psi	0,82	0,48
150.000 psi	0,78	0,38
200.000 psi	0,72	0,30

N = factor de seguridad para tener en cuenta factores tales como variaciones en las propiedades del material, incertidumbre de carga, certeza de las hipótesis, mano de obra, posibles reducciones en su vida útil, costo de las paradas para mantenimiento, carencia de datos experimentales, etc. El valor de N va desde cerca de 1,25 hasta 3,0 para diseños ordinarios, dependiendo de que se tengan condiciones bien definidas o de que existan incertidumbres considerables. Pueden usarse valores de N superiores a 3 cuando la incertidumbre es bastante alta y las consecuencias de una falla son muy serias. La selección de N es asunto de juicio.

EL ESFUERZO CORTANTE MAXIMO EQUIVALENTE, $\tau_{es}(\max)$, cuando se tiene un esfuerzo normal variable y un esfuerzo cortante variable, puede determinarse usando la teoría de los esfuerzos combinados. El esfuerzo normal equivalente s_{en} es

$$s_{en} = s_m + \left(\frac{s_y}{s_r}\right) \frac{K_f s_v}{ABC}$$

El esfuerzo cortante equivalente, s_{es} , es

$$s_{es} = s_{ms} + \left(\frac{s_{ys}}{s_r}\right) \frac{K_f s_{vs}}{ABC}$$

Nota: Hacer $A = 0,6$ en esta ecuación cuando se usen materiales dúctiles, y usar $s_{ys} = (0,6)(s_y)$.

El esfuerzo cortante máximo equivalente $\tau_{es}(\max)$, al diseñar con materiales dúctiles, es

$$\tau_{es}(\max) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_{en}\right)^2 + (s_{es})^2}$$

Esta puede igualarse a s_{ys}/N para usarla en una ecuación de diseño,

$$s_{ys}/N = \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_{en}\right)^2 + (s_{es})^2}$$

Notar que debe usarse $s_{ys} = 0,5s_y$ para esta ecuación.

El esfuerzo normal máximo equivalente que debe usarse cuando se diseña con materiales frágiles es

$$s_{en}(\max) = \frac{1}{2}s_{en} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_{en}\right)^2 + (s_{es})^2}$$

Esta puede igualarse a s_y/N para usarla en una ecuación de diseño

$$s_y/N = \frac{1}{2}s_{en} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_{en}\right)^2 + (s_{es})^2}$$

El valor del límite de fluencia en corte, s_{ys} , que debe usarse en la ecuación para el esfuerzo cortante equivalente, s_{es} , puede tomarse como 0,6 veces el límite de fluencia en tracción. Esto está de acuerdo con los ensayos experimentales de corte por torsión. No obstante, el valor del límite de fluencia en corte, s_{ys} , debe tomarse como 0,5 veces el límite de fluencia en tracción al usarlo en la ecuación de diseño. Esta ecuación se basa en la teoría de falla por corte máximo, la cual considera un elemento en tracción simple.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Una varilla de conexión hecha de acero AISI 8650, templado en aceite a 1500°F y normalizado a 1000°F, está sometida a una carga axial con inversión de 40.000 lb. Determinar el diámetro requerido de la varilla, usando un factor de seguridad $N = 2$. Suponer que no hay acción de columna.

Solución:

Las propiedades de este material son: $s_u = 155.000$ psi, $s_y = 132.000$ psi. Suponer que el límite de fatiga para carga en flexión con inversión es la mitad de la última resistencia a la tracción:

$$s_r = \frac{1}{2}(155.000) = 77.500 \text{ psi}$$

El esfuerzo medio es $s_m = 0$.

$$\text{El esfuerzo variable es } s_v = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4(40.000)}{\pi d^2}$$

El factor de corrección para el límite de fatiga en carga axial es $A = 0,7$.

El factor de corrección para el límite de fatiga por efecto de tamaño es $B = 0,85$, estimando $d > \frac{1}{2}$ pul.

Usando el factor de corrección para el límite de fatiga para una superficie maquinada se tiene, $C = 0,8$.

Suponiendo que no hay concentración de esfuerzos, $K_f = 1$.

Remplazando en la ecuación de diseño

$$\frac{1}{N} = \frac{s_m}{s_y} + \frac{K_f s_v}{s_r ABC}, \quad \frac{1}{2} = 0 + \frac{(1)(4)(40.000)}{\pi d^2 (77.500)(0,7)(0,85)(0,8)}, \text{ y } d = 1,66 \text{ pul. Usar } d = 1\frac{3}{4} \text{ pul.}$$

2. Una varilla de acero AISI 1025 laminada en caliente debe someterse a una carga de torsión que varía de -100 lb-pul a 4000 lb-pul. Determinar el diámetro requerido de la varilla, usando un factor de seguridad $N = 1,75$.

Solución:

Las propiedades de este material son: $s_u = 67.000$ psi, $s_y = 45.000$ psi.

Suponer que el límite de fatiga para flexión con inversión es $s_r = \frac{1}{2}(67.000) = 33.500$ psi. Suponer que el límite de fluencia en corte es $0,6$ veces el límite de fluencia en tracción: $s_{ys} = (0,6)(45.000) = 27.000$ psi. Suponer que no hay concentración de esfuerzos, $K_f = 1$.

El factor de corrección para el límite de fatiga en carga torsional es $A = 0,6$. El factor de corrección para el límite de fatiga por tamaño, calculando que $d > \frac{1}{2}$ pul, es $B = 0,85$. El factor de corrección para el límite de fatiga para material laminado en caliente, con $s_u = 67.000$ psi, es $C = 0,68$.

Los esfuerzos medio y variable se basan en los momentos de torsión medio y variable. El momento de torsión medio es

$$T_m = \frac{1}{2} [T(\max) + T(\min)] = \frac{1}{2} [4000 + (-1000)] = 1500 \text{ lb-pul.}$$

El momento de torsión variable es

$$T_v = \frac{1}{2} [T(\max) - T(\min)] = \frac{1}{2} [4000 - (-1000)] = 2500 \text{ lb-pul.}$$

Entonces, para cualquier punto en la superficie externa,

$$s_{ms} = \frac{T_m c}{J} = \frac{16 T_m}{\pi d^3} = \frac{(16)(1500)}{\pi d^3} = \frac{24.000}{\pi d^3}, \quad s_{vs} = \frac{T_v c}{J} = \frac{16 T_v}{\pi d^3} = \frac{(16)(2500)}{\pi d^3} = \frac{40.000}{\pi d^3}$$

Remplazando en la ecuación de diseño

$$\frac{1}{N} = \frac{s_{ms}}{s_{ys}} + \frac{K_f s_{vs}}{s_r A B C}, \quad \frac{1}{1,75} = \frac{24.000}{\pi d^3 (27.000)} + \frac{(1)(40.000)}{\pi d^3 (33.500)(0,6)(0,85)(0,68)}$$

y $d = 1,34$. Usar $d = 1\frac{3}{8}$ pul.

3. Una viga en voladizo, hecha de acero C-1025 estirado en frío y de sección transversal circular, como muestra la figura 6-7, está sometida a una carga que varía de $-F$ a $3F$. Determinar la carga máxima que puede soportar el elemento para una vida indefinida usando un factor de seguridad $N = 2$. Un modelo fotoelástico indica que el factor teórico de concentración de esfuerzos es $K_t = 1,42$ y la sensibilidad a la entalla para un radio de $1/8$ pul para este material es $q = 0,9$. Hacer el análisis en el cambio de sección transversal, únicamente.

Solución:

Para el acero C-1025 estirado en frío:

$$s_u = 80.000 \text{ psi}$$

$$s_y = 68.000 \text{ psi}$$

$$s_r = 40.000 \text{ psi}$$

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0,9(1,42 - 1) = 1,38.$$

$A = 1$, ya que el miembro está cargado en flexión.

$B = 0,85$ factor de corrección por efecto de tamaño.

$C = 0,88$ factor de corrección por efecto de superficie.

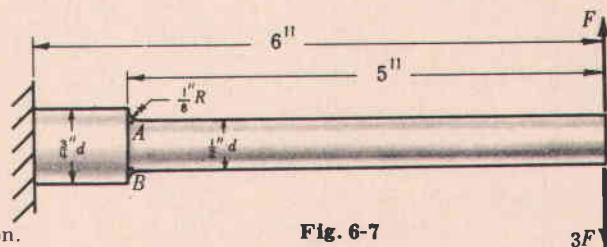


Fig. 6-7

El momento de flexión en el cambio de sección transversal varía de $-5F$ a $15F$. El esfuerzo de flexión en el punto A, en función del momento flector, es

$$s_b = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{32M}{\pi (0,5)^3} = 81,5M$$

$$\text{Entonces } s(\min) = (81,5)(-5F) = -407,5F$$

$$s(\max) = (81,5)(15F) = 1222,5F$$

$$s_m = \frac{1}{2} [1222,5F + (-407,5F)] = 407,5F$$

$$s_v = \frac{1}{2} [1222,5F - (-407,5F)] = 815F$$

Remplazando en $\frac{1}{N} = \frac{s_m}{s_y} + \frac{K_f s_v}{s_r ABC}$, $\frac{1}{2} = \frac{407,5F}{68.000} + \frac{(1,38)(815F)}{(40.000)(0,85)(0,88)}$ y $F = 11,5 \text{ lb}$.

Como asunto de interés, se podría haber analizado el punto B así:

$$s(\min) = -1222,5F \quad s_m = \frac{1}{2} [407,5F + (-1222,5F)] = -407,5F$$

$$s(\max) = +407,5F \quad s_n = \frac{1}{2} [407,5F - (-1222,5F)] = +815F$$

Remplazando en $\frac{1}{N} = \frac{s_m}{s_y} + \frac{K_f s_v}{s_r ABC}$ y notando que s_y debe tener signo negativo, en concordancia con el signo negativo del esfuerzo medio,

$$\frac{1}{2} = \frac{-407,5F}{-68.000} + \frac{(1,38)(815F)}{(40.000)(0,85)(0,88)} \quad \text{de la cual } F = 11,5 \text{ lb.}$$

4. Una varilla de acero C-1025 estirado en frío y de sección transversal circular está sometida a un momento flector variable de 5000 lb-pul a 10.000 lb-pul mientras la carga axial varía de 1000 lb a 3000 lb. El momento máximo de flexión se presenta en el mismo instante en que la carga axial es máxima. Determinar el diámetro requerido de la varilla para un factor de seguridad $N = 2$. Despreciar cualquier concentración de esfuerzos y cualquier efecto de columna. Diseñar con base al esfuerzo cortante máximo.

Solución:

Para el acero C-1025 estirado en frío:

$s_u = 80.000 \text{ psi}$	$B = 0,85$ factor de corrección por efecto de tamaño
$s_y = 68.000 \text{ psi}$	$C = 0,88$ factor de corrección por efecto de superficie
$s_r = 40.000 \text{ psi}$	$A = 1,00$ para flexión
$K_f = 1$	$A = 0,70$ para carga axial

Determinar el esfuerzo normal equivalente.

- (a) Debido a la flexión, los momentos medio y variable son

$$M_m = \frac{1}{2} (5000 + 10.000) = 7500 \text{ lb-pul} \quad \text{y} \quad M_v = \frac{1}{2} (10.000 - 5000) = 2500 \text{ lb-pul}$$

Entonces, debido a la flexión

$$s_m = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{(32)(7500)}{\pi d^3}, \quad s_v = \frac{Mc}{I} = \frac{32M}{\pi d^3} = \frac{(32)(2500)}{\pi d^3}$$

$$\text{y } s_{en} = s_m + \frac{s_y K_f s_v}{s_r ABC} = \frac{(32)(7500)}{\pi d^3} + \frac{(68.000)(1)(32)(2500)}{\pi d^3 (40.000)(1)(0,85)(0,88)} = \frac{134.000}{d^3} \quad \text{debido a flexión}$$

- (b) Debido a la carga axial, las fuerzas media y variable son

$$F_m = \frac{1}{2} (1000 + 3000) = 2000 \text{ lb} \quad \text{y} \quad F_v = \frac{1}{2} (3000 - 1000) = 1000 \text{ lb}$$

Entonces, debido a la carga axial,

$$s_{en} = \frac{(2000)(4)}{\pi d^2} + \frac{(68.000)(4000)}{\pi d^2 (40.000)(0,70)(0,85)(0,88)} = \frac{6690}{d^2} \quad \text{debido a la carga axial}$$

- (c) Esfuerzo normal equivalente $s_{en}(\text{total}) = \frac{134.000}{d^3} + \frac{6690}{d^2}$.

- (d) Igualando el esfuerzo normal equivalente total a s_y/N ,

$$\frac{134.000}{d^3} + \frac{6690}{d^2} = \frac{s_y}{N} = \frac{68.000}{2}$$

de la cual, por tanteos, $d = 1,625 \text{ pul}$.

5. El eje S_1 rota a 1200 rpm en el sentido del reloj y tiene una carga concentrada no balanceada W de 8 lb a un radio de 2 pul en el punto medio de los soportes A y B , como muestra la figura 6-8. Una carga vertical constante W_1 de 1500 lb se aplica por medio de dos cojinetes anti-rozamiento en C y D . Si la resistencia última del material del eje es 60.000 psi y su límite de fluencia es 45.000 psi, determinar el diámetro requerido del eje en la sección A-A para un factor de seguridad de diseño, $N = 2$. Considerar únicamente el punto P .

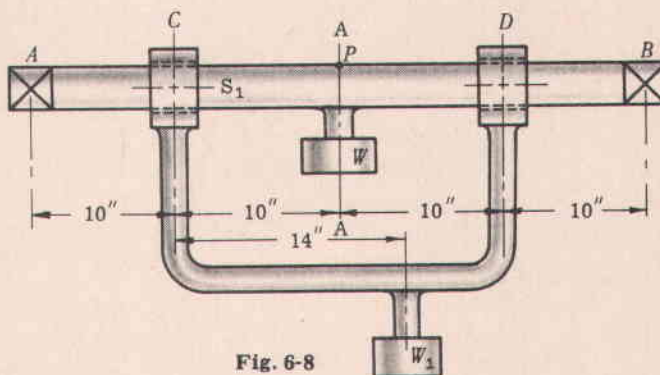


Fig. 6-8

Solución:

- (1) Suponer: Límite de fatiga $= s_u/2 = 30.000$ psi; factor de concentración de esfuerzos $K_f = 1$; factor de corrección del límite de fatiga por tamaño, $A = 0,85$; factor de corrección del límite de fatiga para acabado maquinado, $C = 0,9$.
- (2) Demostrar que el momento de flexión debido a la carga en rotación varía de -6540 lb-pul a 6540 lb-pul.
- (3) Demostrar que el momento de flexión debido a la carga vertical constante es 7500 lb-pul.
- (4) El momento de flexión combinado varía entonces desde 960 lb-pul hasta 14.040 lb-pul.
- (5) Debe notarse ahora que, si consideramos el punto P sobre la fibra externa en el punto medio entre los dos soportes, el momento de 14.040 lb-pul producirá un esfuerzo negativo o de compresión, mientras que el momento de 960 lb-pul producirá un esfuerzo positivo o de tracción.
- (6) Los esfuerzos de flexión máximo, mínimo, medio y variable son

$$s(\max) = \frac{-(32)(14.040)}{\pi d^3} = \frac{-143.000}{d^3}, \quad s_m = \frac{-143.000 + 9775}{2d^3} = \frac{-66.610}{d^3}$$

$$s(\min) = \frac{+(32)(960)}{\pi d^3} = \frac{+9775}{d^3}, \quad s_v = \frac{9775 - (-143.000)}{2d^3} = \frac{76.390}{d^3}$$

- (7) Entonces

$$\frac{1}{N} = \frac{s_m}{s_y} + \frac{K_f s_v}{s_r ABC}, \quad \frac{1}{2} = \frac{-66.610}{-45.000 d^3} + \frac{(1)(76.390)}{(30.000)(1)(0,85)(0,90) d^3}, \quad \text{y } d = 2,12. \text{ Usar } d = 2\frac{1}{4} \text{ pul.}$$

6. Un acero aleado tiene una resistencia última en tracción de 90.000 psi, un límite de fluencia de 60.000 psi y un límite de fatiga bajo flexión con inversión de 30.000 psi. Dibujar un diagrama de Goodman modificado. Indicar sobre el dibujo el esfuerzo de fatiga para carga libre.

Solución:

Dibujar un diagrama de Goodman como el que se muestra en la figura 6-9. La línea NP representa la magnitud de la resistencia a la fatiga para carga libre. Los valores pueden determinarse en un esquema hecho a escala, o de un cálculo simple como sigue.

Por triángulos semejantes ACB y ANT , $\frac{NT}{90.000} = \frac{90.000}{120.000}$ o $NT = 67.500$ psi.

Entonces $MN = 22.500$ psi, y $NP = 45.000$ psi ya que MA es una línea de esfuerzo medio.

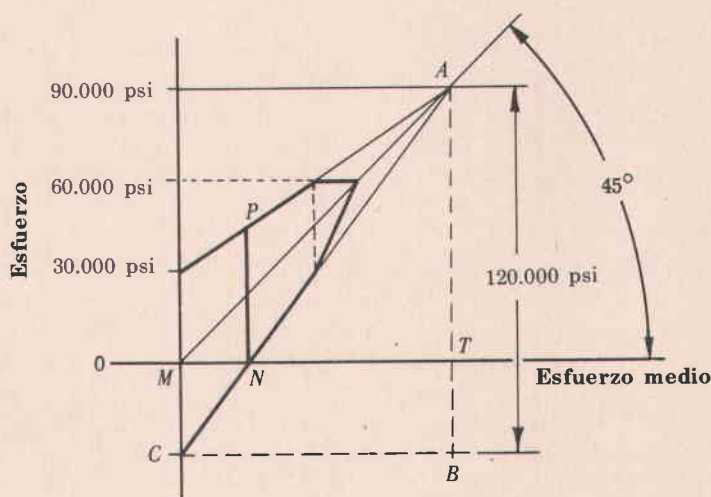


Fig. 6-9

7. Un eje de acero laminado en caliente está sometido a una carga torsional que varía desde 3000 lb-pul en el sentido del reloj hasta 1000 lb-pul en el sentido contrario al reloj, mientras un momento de flexión aplicado en una sección crítica varía de +4000 lb-pul a -2000 lb-pul. El eje tiene sección transversal uniforme y no presenta ninguna ranura en la sección crítica. Determinar el diámetro requerido del eje. El material tiene una resistencia última de 80.000 psi y una resistencia de fluencia de 60.000 psi. Tomar como base para el diseño un factor de seguridad $N = 1,5$. Tomar el límite de fatiga como la mitad del valor de la resistencia última.

Solución:

- (a) Determinar el esfuerzo normal equivalente debido a la flexión.

$$s(\max) = \frac{(32)(4000)}{\pi d^3} \quad s_m = \frac{[(32)(4000)] + [-(32)(2000)]}{2\pi d^3} = \frac{10.200}{d^3}$$

$$s(\min) = \frac{-(32)(2000)}{\pi d^3} \quad s_v = \frac{[(32)(4000)] - [-(32)(2000)]}{2\pi d^3} = \frac{30.600}{d^3}$$

El esfuerzo normal equivalente es $[A = 1, B = 0,85, C = 0,62, K_t = 1]$

$$s_{en} = \frac{10.200}{d^3} + \left[\frac{60.000}{40.000} \right] \left[\frac{30.600}{d^3 (1) (0,85) (0,62)} \right] = \frac{97.300}{d^3}$$

- (b) Determinar el esfuerzo cortante equivalente.

$$s_s(\max) = \frac{(16)(3000)}{\pi d^3} \quad s_{ms} = \frac{(16)(1000)}{\pi d^3} = \frac{5100}{d^3}$$

$$s_s(\min) = \frac{-(16)(1000)}{\pi d^3} \quad s_{vs} = \frac{(16)(2000)}{\pi d^3} = \frac{10.200}{d^3}$$

El esfuerzo cortante equivalente es $[A = 0,6, B = 0,85, C = 0,62, s_{ys} = 0,6s_y]$

$$s_{es} = \frac{5100}{d^3} + \left[\frac{(0,6)(60.000)}{40.000} \right] \left[\frac{10.200}{d^3 (0,6) (0,85) (0,62)} \right] = \frac{(34.100)}{d^3}$$

- (c) Igualar el esfuerzo cortante equivalente máximo a s_{ys}/N , donde $s_{ys} = (0,5)s_y = (0,5)(60.000) = 30.000$ psi

$$\tau_{es}(\max) = \frac{1}{d^3} \sqrt{\left(\frac{97.300}{2} \right)^2 + (34.100)^2} = \frac{30.000}{1,5} \quad \text{o} \quad d = 1,44 \text{ pul.}$$

Nota. Mientras usamos $s_{ys} = 0,6 s_y$ para corte torsional puro, usamos $s_{ys} = 0,5 s_y$ para esfuerzo cortante combinado, de acuerdo con la teoría de falla por corte máximo.

8. Una polea está fijada por medio de una cuña a un eje en el punto medio entre dos cojinetes anti-rozamiento. El momento flector en la polea varía de 1500 lb-pul a 4500 lb-pul mientras el momento de torsión en el eje varía de 500 a 1500 lb-pul. La frecuencia de la variación de las cargas es la misma que la velocidad del eje. El eje está hecho de acero estirado en frío con una resistencia última de 78.000 psi y un límite de fluencia de 58.000 psi. Determinar el diámetro requerido para una duración indefinida. El factor de concentración de esfuerzos por el cuño en flexión y en torsión puede tomarse como 1,6 y 1,3 respectivamente. Usar un factor de diseño $N = 1,5$.

Solución:

- I. Determinar el esfuerzo normal equivalente, s_{en}

(a) Debido a la flexión, $s(\max) = \frac{(32)(4500)}{\pi d^3} = \frac{45.900}{d^3}$ y $s(\min) = \frac{-(32)(1500)}{\pi d^3} = -\frac{15.300}{d^3}$.

(b) Debido a la flexión, $s_m = \frac{45.900 + (-15.300)}{2d^3} = \frac{15.300}{d^3}$ y $s_v = \frac{45.900 - (-15.300)}{2d^3} = \frac{30.600}{d^3}$.

- (c) Suponer $s_r = s_u/2 = 78.000/2 = 39.000$, $A = 1, B = 0,85, C = 0,88$. El esfuerzo normal equivalente es

$$s_{en} = s_m + \left(\frac{s_y}{s_r} \right) \frac{K_f s_v}{ABC} = \frac{15.300}{d^3} + \left(\frac{58.000}{39.000} \right) \frac{(1,6)(30.600)}{(0,85)(0,88)d^3} = \frac{112.600}{d^3}$$

II. Determinar el esfuerzo cortante equivalente, s_{eS} .

(a) Esfuerzos cortantes máximo y mínimo:

$$s_s(\max) = \frac{(16)(1500)}{\pi d^3} = \frac{7635}{d^3}, \quad s_s(\min) = \frac{(16)(500)}{\pi d^3} = \frac{2545}{d^3}.$$

(b) Esfuerzos cortantes medio y variable:

$$s_{mS} = \frac{7635 + 2545}{2d^3} = \frac{5090}{d^3}, \quad s_{vS} = \frac{7635 - 2545}{2d^3} = \frac{2545}{d^3}.$$

(c) $s_{yS} = 0,6s_y = 0,6(58.000) = 34.800$ psi, $A = 0,6$ para torsión, $B = 0,85$, $C = 0,88$. El esfuerzo cortante equivalente es

$$s_{eS} = s_{mS} + \left(\frac{s_{yS}}{s_r}\right) \frac{K_f s_{vS}}{ABC} = \frac{5090}{d^3} + \left(\frac{34.800}{39.000}\right) \frac{(1,3)(2545)}{(0,6)(0,85)(0,88)d^3} = \frac{(11.620)}{d^3}$$

III. Igualando el esfuerzo cortante equivalente máximo a s_{yS}/N ,

$$\tau_{eS}(\max) = \sqrt{\left(\frac{s_{en}}{2}\right)^2 + (s_{eS})^2} = \frac{s_{yS}}{N}, \quad \frac{1}{d^3} \sqrt{\left(\frac{112.600}{2}\right)^2 + (11.620)^2} = \frac{(0,5)(58.000)}{1,5}.$$

$$d^3 = 2,97, \quad d = 1,44 \text{ pul.}$$

9. Un eje de hierro fundido, ASTM-25, con una resistencia última en tracción de 25.000 psi, está sometido a una carga torsional que se invierte completamente. La carga debe aplicarse durante un número indefinido de ciclos. El eje tiene 2" de diámetro y está unido a un eje de 3" de diámetro con un filete de $\frac{1}{2}$ " de radio. El factor de seguridad debe ser 2. ¿Cuál es el momento máximo de torsión que puede aplicarse al eje? Resolver por dos métodos: (1) usando la ecuación de Soderberg, (2) usando $s_s = Tc/J$ directamente.

Solución:

(a) Esfuerzo cortante medio = 0. El esfuerzo cortante variable es

$$s_{vS} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16T}{\pi(2^3)} = \frac{2T}{\pi}, \quad \text{donde } T \text{ es el momento máximo de torsión, lb-pul.}$$

(b) El esfuerzo cortante equivalente s_{eS} sobre una partícula en la superficie es

$$s_{eS} = s_{mS} K_t + K_f s_{vS} \frac{s_{yS}}{s_r ABC}$$

donde s_{mS} = esfuerzo cortante medio = 0. K_t = factor teórico de concentración de esfuerzos, el cual es 1,17 para el diámetro y el radio dados, según se encontró en ensayos fotoelásticos en torsión para la forma especificada. K_f = efecto real de concentración de esfuerzos sobre la fatiga, donde $K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0(1,17 - 1) = 1$.

Los valores de sensibilidad a la entalla q para hierro fundido no se han divulgado específicamente en la literatura, aunque los ensayos realizados sobre hierro fundido indican que la reducción en el límite de fatiga como resultado de hacer ranuras en las probetas de ensayo es cero para una resistencia a la tracción de 20.000 psi y 26% para una resistencia a la tracción de cerca a 43.000 psi. Para material ASTM-25 el factor de sensibilidad q a la entalla se toma igual a cero. (Notar que mientras el efecto de sensibilidad a la entalla es muy bajo para fatiga, es muy alto para carga con impacto.)

 s_{vS} = esfuerzo cortante variable = $2T/\pi$ psi.

s_{ys} = resistencia a la fluencia en corte para hierro fundido. Este valor se toma frecuentemente igual a la resistencia a la fluencia en tracción para hierro fundido, s_{yp} . La resistencia a la fluencia en tracción puede tomarse aproximadamente como el 60% del esfuerzo último de tracción. Así,

$$s_{ys} = s_y = 0,6(25.000) = 15.000 \text{ psi.}$$

s_r = límite de fatiga en flexión para hierro fundido. Este valor tiene una gama más amplia que la encontrada para aceros. Los ensayos que se han divulgado establecen que el límite de fatiga en flexión varía de 0,33 a 0,6 de la resistencia al fallar. Los resultados indican que el límite de fatiga en torsión ha variado de 0,75 a 1,25 del límite de fatiga en flexión. Arbitrariamente se toma el límite de fatiga en flexión como 0,4 de la resistencia última. El límite de fatiga s en flexión es, entonces, $0,4(25.000) = 10.000 \text{ psi}$.

A = 0,75 (el valor más bajo de los anteriores).

B = efecto de tamaño, tomado como 0,85, el mismo que para aceros.

C = acabado superficial = 1.

Remplazando en la ecuación del esfuerzo cortante equivalente se obtiene

$$s_{es} = 0(1,17) + (1)\left(\frac{2T}{\pi}\right) \frac{15.000}{(10.000)(0,75)(0,85)(1)} = 1,5T$$

- (c) El esfuerzo normal equivalente es cero. De la ecuación del esfuerzo combinado, el esfuerzo estático de tracción equivalente máximo es

$$s_n(\text{max}) = \frac{1}{2}s_{en} + \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_{en}\right)^2 + (s_{es})^2} = 0 + \sqrt{0 + (1,5T)^2} = 1,5T \text{ psi}$$

- (d) El esfuerzo estático de tracción permisible es $= s_y/N = 15.000/2 = 7500 \text{ psi}$.

- (e) Igualando (c) y (d), $7500 = 1,5T$ o $T = 5000 \text{ lb-pul}$. Así, el momento admisible de torsión es 5000 lb-pul .

- (f) La solución anterior ilustra el procedimiento de aplicación de la ecuación de Soderberg al trabajar con hierro fundido. Como el esfuerzo se invierte completamente y pueden aplicarse directamente los resultados de ensayos en torsión con inversión, por aplicación de $s_s = Tc/J$, puede obtenerse más rápidamente una solución para este problema particular. $s_s = (s_r)(A)(B)(C)/N$.

$$\frac{(s_r)(A)(B)(C)}{N} = \frac{Tc}{J}, \quad \frac{10.000(0,75)(0,85)(1)}{2} = \frac{T(1)}{\pi(2^4)/32}$$

o sea que el momento permisible de torsión es $T = 5000 \text{ lb-pul}$. En la ecuación anterior, el límite de fatiga en flexión de 10.000 psi se multiplica por $A = 0,75$ para corregir por torsión, por $B = 0,85$, para tener en cuenta el efecto de tamaño, por $C = 1$, por efecto de superficie, y se emplea un factor de diseño $N = 2$. No se aplica factor de concentración de esfuerzos porque el factor de sensibilidad a la entalla para el hierro fundido es cero.

Debe notarse que cuando hay datos de ensayos disponibles, deben utilizarse directamente. Si la carga no se invierte completamente y/o no hay datos de ensayos disponibles, entonces es recomendable usar la ecuación de Soderberg.

10. En la figura 6-10, el eje transmite 10 hp de la polea P al engranaje G a 900 rpm , bajo condiciones de carga estacionarias. El eje está hecho de acero AISI-1035, laminado en caliente. La resistencia última en tracción es 85.000 psi y el límite de fluencia en tracción es 55.000 psi . El diámetro de la polea es $10''$, y el diámetro primitivo del engranaje es también $10''$. El peso de la polea P es 30 lb y el peso del engranaje G es 30 lb . Despreciar el peso del eje. La relación entre las tensiones de la correa es $T_1/T_2 = 2,5$. El ángulo de presión del engranaje es 20° .

Debe determinarse el tamaño del eje usando la ecuación de Soderberg. (La solución hallada empleando el Código de Ejes de ASME se encuentra en la página 121. El diseño por rigidez y velocidad crítica está en las páginas 123-127.)

Solución:

- (a) El momento de torsión M_t sobre el eje se encuentra de

$$M_t/N/63.000 = \text{hp}, \quad M_t(900)/63.000 = 10, \text{ o } M_t = 700 \text{ lb-pul.}$$

(b) Las fuerzas en la correa se encuentran de

$$(T_1 - T_2)(R) = M_t \text{ o } (T_1 - T_2)(5) = 700 \text{ y } T_1/T_2 = 2,5$$

de la cual $T_1 = 233 \text{ lb}$, $T_2 = 93 \text{ lb}$.

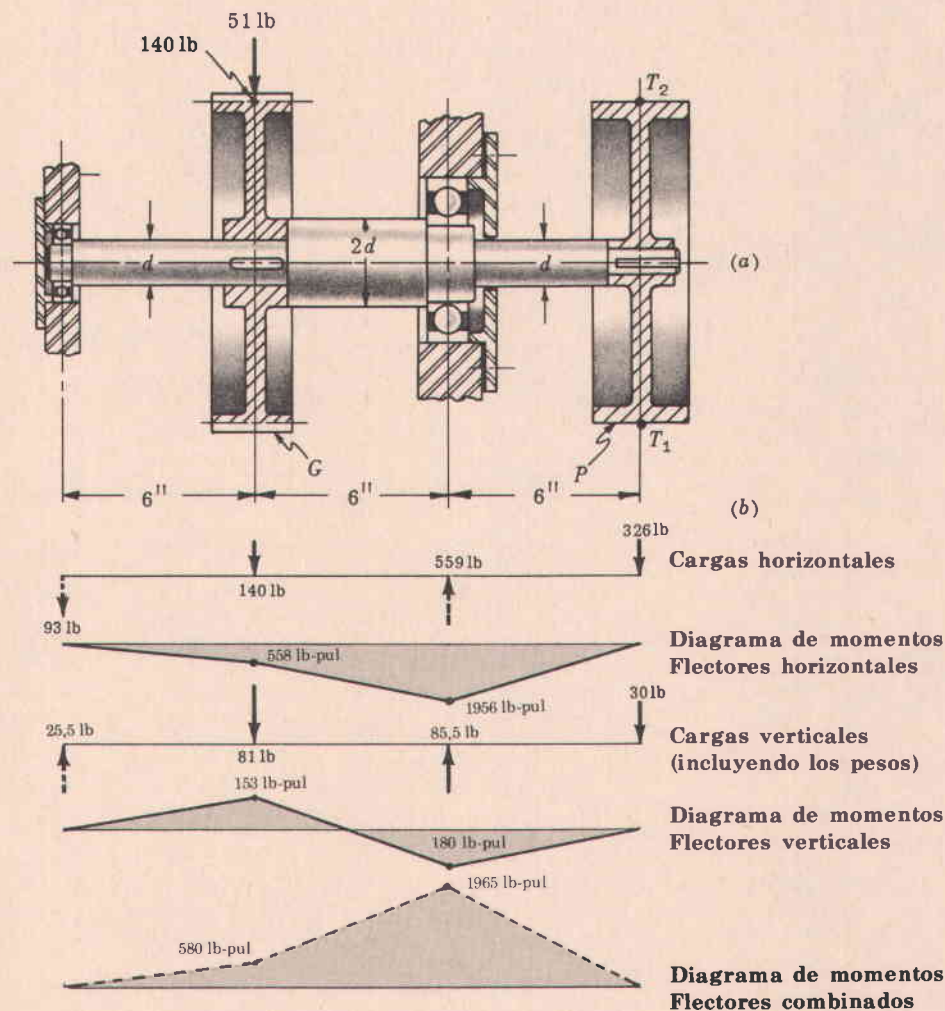


Fig. 6-10

- (c) Fuerza tangencial del engranaje, $F_t = M_t/R = 700/5 = 140 \text{ lb}$.
- (d) Fuerza separadora, $F_r = F_t \tan \phi = 140 \tan 20^\circ = 51 \text{ lb}$.
- (e) Los diagramas de cargas y de momentos flectores se muestran en la figura. Las fuerzas en la correa y en el engranaje se suponen concentradas. Se incluye el peso de la polea y el peso del engranaje.
- (f) Consideremos primero la sección del engranaje. Aun cuando el momento de flexión aquí es menor que en el cojinete derecho, el cuñero puede ser el factor influyente.

El factor de concentración de esfuerzos K_f debido al cuñero en flexión es 1,6

El factor de concentración de esfuerzos en flexión debido al filete donde la porción del eje de diá-

metro d se une con la de diámetro $2d$ depende del radio del filete. Aun si la relación del radio del filete al diámetro del eje d se especifica, para obtener el factor teórico de concentración de esfuerzos, K_t , el factor real de concentración de esfuerzos K_f depende de la sensibilidad a la entalla, la cual es función del radio del filete. Así, es necesario usar una solución de tanteos, aproximando el diámetro d y el radio del filete y verificando con los valores calculados de d . Los valores usados en los cálculos siguientes están de acuerdo con el valor final:

$$r/d = 0,083, \text{ de la cual } r = \frac{1}{16}''$$

Para $r/d = 0,083$, y una relación de diámetros = 2, el factor teórico de concentración de esfuerzos, K_t , en flexión, es 1,86. El factor de sensibilidad a la entalla, q , es 0,78 para aceros aleados con el radio del filete de $\frac{1}{16}''$. Entonces

$$K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0,78(1,86 - 1) = 1,67$$

Por tanto, el radio del filete es tal que produce un efecto peor que el cuñero.

- (g) El momento de flexión es constante, 580 lb-pul, pero una partícula sobre la superficie está sometida a una inversión completa del esfuerzo. Esfuerzo medio = 0. El esfuerzo variable de flexión es

$$s_v = \frac{Mc}{I} = \frac{580(d/2)}{\pi d^4/64} = \frac{5910}{d^3}$$

- (h) El esfuerzo normal equivalente es

$$s_{en} = s_m + K_f s_v \frac{s_y}{s_{rABC}} = 0 + 1,67 \left(\frac{5910}{d^3} \right) \frac{55.000}{(42.500)(1)(0,85)(0,87)} = \frac{17.300}{d^3}$$

- (i) El esfuerzo cortante debido a la torsión es constante, ya que el momento de torsión lo es. El esfuerzo cortante variable es cero. El esfuerzo cortante medio es

$$s_{ms} = \frac{Tc}{J} = \frac{700(d/2)}{\pi d^4/32} = \frac{3570}{d^3}$$

- (j) El esfuerzo cortante equivalente es

$$s_{es} = s_{ms} + K_f s_v \frac{s_{ys}}{s_{rABC}} = \frac{3570}{d^3} + 0$$

- (k) El esfuerzo cortante admisible es

$$\frac{s_{ys}}{N} = \frac{0,5(s_y)}{N} = \frac{0,5(55.000)}{1,5} = 18.300 \text{ psi}$$

- (l) Igualando el esfuerzo cortante admisible al esfuerzo cortante máximo,

$$18.300 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_{en}\right)^2 + (s_{es})^2} = \sqrt{(17.300/2d^3)^2 + (3570/d^3)^2} \quad \text{de la cual } d = 0,796''$$

- (m) A continuación se analizará el eje en el cojinete derecho. Se considerará, específicamente, la sección con diámetro d en el filete, con el momento de flexión en la línea central del cojinete tomado como si actuara en la sección con el filete. El esfuerzo medio de flexión es $s_m = 0$.

El esfuerzo variable de flexión es

$$s_v = \frac{Mc}{I} = \frac{1965(d/2)}{\pi d^4/64} = \frac{20.100}{d^3}$$

El factor de concentración de esfuerzos, K_f , no puede determinarse directamente aquí, pero sí se emplea el mismo procedimiento de ensayo y error que se empleó en la sección del engranaje. Se utilizará un valor alto de $r/d: r/d = 22$. (d resulta alrededor de $\frac{1}{8}''$, y r alrededor de $\frac{1}{4}''$.) Para $r/d \cong 0,22$, $K_t = 1,37$; para $r = \frac{1}{4}''$, $q = 0,95$. Así, $K_f = 1 + q(K_t - 1) = 1 + 0,95(1,37 - 1) = 1,35$. Entonces, el esfuerzo normal equivalente s_{en} es

$$s_{en} = s_m + K_f s_v \frac{s_y}{s_{rABC}} = 0 + 1,35 \left(\frac{20.100}{d^3} \right) \frac{55.000}{(42.500)(1)(0,85)(0,87)} = \frac{47.600}{d^3}$$

(n) El esfuerzo cortante medio debido a la torsión es

$$s_{mS} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(700)}{\pi d^3} = \frac{3570}{d^3}$$

Esfuerzo cortante variable, $s_{vS} = 0$. Por tanto, el esfuerzo cortante equivalente es

$$s_{eS} = s_{mS} + K_f s_{vS} \left(\frac{s_{yS}}{s_r} \right) \frac{1}{ABC} = \frac{3570}{d^3} + 0$$

(o) El esfuerzo cortante permisible es, de acuerdo con (k): 18.300 psi

(p) Del esfuerzo cortante combinado para el esfuerzo equivalente,

$$18.300 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_{en}\right)^2 + (s_{eS})^2} = \sqrt{(47.600/2d^3)^2 + (3570/d^3)^2} \quad \text{o} \quad d = 1,09''. \text{ Usar } d = 1\frac{1}{8}''.$$

(q) La dimensión del eje, d , se determina en esta forma por los esfuerzos que actúan sobre el eje en el cojinete derecho. Las proporciones finales, determinadas por condiciones de resistencia únicamente, usando la ecuación de Soderberg, son: $d = 1\frac{1}{8}''$, $2d = 2\frac{1}{4}''$

11. Un elemento de acero en voladizo, tal como se muestra en la figura 6-11, está sometido a una carga transversal en su extremo, que varía desde 10 lb hacia arriba hasta 30 lb hacia abajo, mientras una carga axial varía de 25 lb (compresión) a 100 lb (tracción). Determinar el diámetro requerido en el cambio de sección para una vida infinita, usando un factor de seguridad de 2. Las propiedades de resistencia del material son:

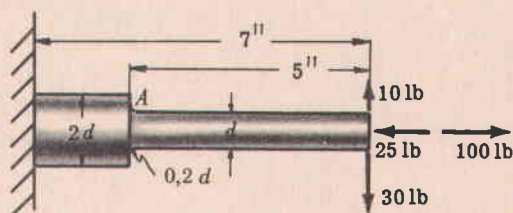


Fig. 6-11

$$\begin{aligned} s_u &= 80.000 \text{ psi (resistencia última),} \\ s_y &= 68.000 \text{ psi (resistencia a la fluencia),} \\ s_n &= 40.000 \text{ psi (límite de fatiga),} \end{aligned}$$

Resultados de ensayos indican que los valores del factor teórico de concentración de esfuerzos para cargas de flexión y axiales son $K_t = 1,44$ y $K_t = 1,63$ respectivamente, en el cambio de sección transversal.

Solución:

Para el punto A, que es crítico, se determina el esfuerzo normal equivalente. Se supone que el esfuerzo normal equivalente en este punto es la suma algebraica del esfuerzo normal equivalente debido a la flexión y del esfuerzo normal equivalente debido a la carga axial.

Debido a la flexión el esfuerzo normal equivalente es

$$(s_{en})_b = s_m + \frac{s_y s_v K_f}{s_r ABC} = \frac{510}{d^3} + \frac{(68.000)(1020)(1,44)}{(40.000)(d^3)(1)(0,85)(0,9)} = \frac{3780}{d^3}$$

$$\text{donde } s(\max) = \frac{(32)(150)}{\pi d^3}, \quad s(\min) = -\frac{(32)(50)}{\pi d^3}, \quad s_m = \frac{(32)(100)}{2\pi d^3} = \frac{510}{d^3}, \quad s_v = \frac{(32)(200)}{2\pi d^3} = \frac{1020}{d^3}$$

Debido a la carga axial, el esfuerzo normal equivalente es

$$(s_{en})_a = \frac{150}{\pi d^2} + \frac{(68.000)(250)(1,63)}{(40.000)(\pi)(d^2)(0,7)(0,85)(0,9)} = \frac{460}{d^2}$$

$$\text{donde } s(\max) = \frac{400}{\pi d^2}, \quad s(\min) = -\frac{100}{\pi d^2}, \quad s_m = \frac{150}{\pi d^2}, \quad s_v = \frac{250}{\pi d^2}$$

Entonces, el esfuerzo normal equivalente total s_{en} en A es

$$s_{en} = \frac{3780}{d^3} + \frac{460}{d^2} = \frac{s_y}{N} = \frac{68.000}{2} \quad \text{de la cual } d = 0,490 \text{ pul.}$$

12. En algunos casos, puede ser más económico diseñar sobre la base de una resistencia a la fatiga para una vida finita, en vez de diseñar para una vida infinita. Como una ilustración supongamos que la varilla de empuje de una bomba de combustible se diseña para un valor no mayor de 100.000 ciclos, mientras está sometida a una carga cíclica de 1750 lb, la cual en cada ciclo se reduce hasta cero (carga libre). Datos de ensayos indican que el material del cual está hecha la varilla tiene una resistencia de fluencia de 55.000 psi y un límite de fatiga de 38.000 psi para carga con inversión, pero tiene una resistencia a la fatiga de 50.000 para carga con inversión a 100.000 ciclos. Con un factor de seguridad igual a 2, determinar el diámetro requerido para la varilla de empuje, tanto para una vida finita de 100.000 ciclos, como para una vida infinita.

Solución:

Como se tiene carga repetida, $s_m = s_v = F/A = 1750/(\frac{1}{4}\pi d^2) = 2230/d^2$.

Suponer $K_t = K_f = 1$, $A = 0,7$, $B = 1$, $C = 0,9$; y remplazar en la ecuación $\frac{1}{N} = \frac{s_m}{s_y} + \frac{K_f s_v}{s_n A B C}$.

(a) Para una vida finita de 100.000 ciclos

$$\frac{1}{2} = \frac{2230}{d^2 (55.000)} + \frac{(1)(2230)}{d^2 (50.000)(0,7)(1)(0,9)} \quad \text{o} \quad d = 0,475 \text{ pul.}$$

(b) Para una vida infinita

$$\frac{1}{2} = \frac{2230}{d^2 (55.000)} + \frac{(1)(2230)}{d^2 (38.000)(0,7)(1)(0,9)} \quad \text{o} \quad d = 0,517 \text{ pul.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

13. Un voladizo de acero torneado de una pulgada de diámetro y 10 pul de largo está cargado en el extremo con una fuerza que varía desde 60 lb hacia abajo hasta 100 lb hacia arriba. En el sitio donde el elemento está unido al soporte hay un filete de $\frac{1}{4}$ " que origina un factor teórico de concentración de esfuerzos, $K_t = 1,32$. El factor de sensibilidad a la entalla, q , puede tomarse igual a 0,92.

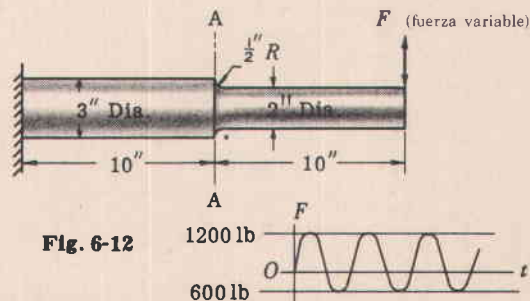
Si el material tiene un esfuerzo último $s_u = 80.000$ psi, un límite de fatiga en flexión con inversión, $s_r = 35.000$ psi y una resistencia de fluencia, $s_y = 60.000$, determinar: (a) esfuerzo máximo de flexión, (b) esfuerzo mínimo de flexión, (c) esfuerzo medio, (d) esfuerzo variable, (e) factor de diseño N .

Resp. (a) 10.200 psi, (b) -6120 psi, (c) 2040 psi, (d) 8160 psi, (e) 2,29

14. Una fuerza aplicada en el extremo de una barra en voladizo varía con el tiempo, en el plano del papel, como muestra la figura 6-12. Aun cuando las proporciones dan las dimensiones máximas mostradas, se desea un factor de seguridad $N = 2,5$.

El material es AISI-1020 con una resistencia última de 64.000 psi, un límite de fatiga de 32.000 psi en flexión con inversión y un límite de fluencia en tracción de 48.000 psi. Para la sección A-A, el factor teórico de concentración de esfuerzos K_t es 1,37 para el diámetro de 2" con un filete de radio $\frac{1}{2}$ ". El factor de sensibilidad a la entalla q para un acero normalizado es 0,95 para el filete de radio $\frac{1}{2}$ ".

Usando un factor $C = 0,90$ por efecto de superficie, un factor $B = 0,85$ por efecto de tamaño, y un factor $A = 1$ ya que no hay carga axial, determinar para la sección A-A: (a) el factor de concentración de esfuerzos K_f , (b) el esfuerzo medio s_m , (c) el esfuerzo variable s_v , (d) el factor de seguridad N , (e) si las proporciones son satisfactorias, (f) en caso de que las proporciones no sean satisfactorias,



qué podría hacerse para dar una solución satisfactoria sin cambiar la sección de 2" de diámetro.

Resp. (a) $K_f = 1,35$, (b) $s_m = 3820$ psi, (c) $s_y = 11.480$ psi, (d) $N = 1,4$. (e) Las proporciones no son satisfactorias. (f) Usar un material mejor con un límite de fatiga mayor. Un radio de curvatura mayor en el filete no da un aumento suficiente en la resistencia para aumentar el factor de seguridad a 2,5. Esto puede verificarse utilizando $K_f = 1$ como valor límite.

15. Determinar la carga máxima para la viga simplemente apoyada, carga cíclicamente, como muestra la figura 6-13. La resistencia última es 100.000 psi, el punto de fluencia en tracción es 75.000 psi, el límite de fatiga para flexión con inversión es 50.000 psi, y el factor de diseño N es 1,3. Usar un factor $B = 0,85$ por efecto de tamaño y un factor $C = 0,90$ por efecto de superficie.

Resp. Para un esfuerzo medio $32W/\pi$ psi y un esfuerzo variable $16W/\pi$ psi, $W = 2850$ lb y $3W = 8550$ lb.

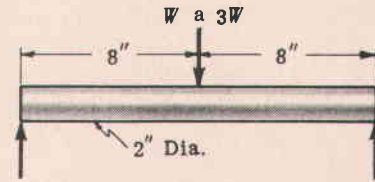


Fig. 6-13

16. Una sección de un eje de diámetro d se une a una sección de un eje de diámetro $1,5d$ con un filete que produce un factor real de concentración de esfuerzos $K_f = 1,22$ para torsión.

El material tiene un límite de fluencia en tracción de 81.500 psi y un límite de fatiga en flexión con inversión de 54.500 psi; el límite de fatiga en torsión con inversión es $0,6(54.500) = 32.700$ psi.

Usando un factor $B = 0,85$ por efecto de tamaño, un factor $C = 0,85$ por superficie, y un factor $A = 0,6$, determinar el tamaño del eje requerido para un momento de torsión que varía de 0 a 20.000 lb-pul en el punto de menor diámetro del eje. Usar un factor de diseño N igual a 2. Resp. $d = 1,93$ "; usar $1\frac{15}{16}$ "

17. Una viga en voladizo de sección transversal circular está sometida a un esfuerzo alternante en un punto situado sobre la fibra externa, en el plano de soporte, que varía de 3000 psi (compresión) a 4000 psi (tracción). Simultáneamente hay un esfuerzo alternante debido a carga axial que varía de 2000 psi (compresión) a 4000 psi (tracción). El material tiene una resistencia última $s_u = 60.000$ psi y una resistencia de fluencia $s_y = 45.000$ psi. Suponer que $K_f = 1$, $B = 0,85$, y $C = 0,9$. Determinar (a) el esfuerzo normal equivalente debido a la carga axial, (b) el esfuerzo normal equivalente debido a la flexión, (c) el esfuerzo normal equivalente total debido a la carga axial y a la flexión. Resp. (a) 9425 psi, (b) 7360 psi, (c) 16.785 psi

18. Un elemento de acero de sección transversal circular está sometido a un esfuerzo de torsión que varía de 0 a 5000 psi y simultáneamente está sometido a un esfuerzo axial que varía de -2000 psi a 4000 psi. Despreciando concentración de esfuerzos y efectos de columna, y suponiendo que el esfuerzo máximo en flexión y en carga axial ocurren simultáneamente, determinar (a) el esfuerzo cortante equivalente máximo, (b) el factor de seguridad de diseño basado en la fluencia en corte. El material tiene un límite de fatiga $s_r = 30.000$ psi y una resistencia de fluencia $s_y = 70.000$ psi. El diámetro del miembro es menor que $\frac{1}{2}$ pulgada; $B = 1$; la superficie tiene un pulimento de espejo, $C = 1$. Resp. (a) $\tau_{es}(\max) = 9100$ psi, (b) $N = 3,85$

19. Un acero SAE-3125 tiene una resistencia última en tracción de 100.000 psi, un límite de fluencia de 64.000 psi, y un límite de fatiga para flexión con inversión de 32.000 psi. Hacer un diagrama de Goodman modificado y de él determinar la magnitud de la resistencia a la fatiga para carga libre en flexión. Resp. 48.600 psi.

20. Una varilla de 2 pul de diámetro está doblada en la forma que muestra la figura 6-14. La fuerza aplicada varía de 0 a un máximo de F libras. La varilla está hecha de un acero con un límite de fluencia en tracción de 60.000 psi y un límite de fatiga de 45.000 psi. ¿Cuál es la carga máxima que puede aplicarse para un factor de seguridad $N = 2$, basado en el límite de fluencia estático? Usar las ecuaciones de Soderberg para esfuerzos variables. Factor de acabado superficial, $C = 0,8$. La carga máxima debe encontrarse de los esfuerzos variables que se presentan en la sección A-A.

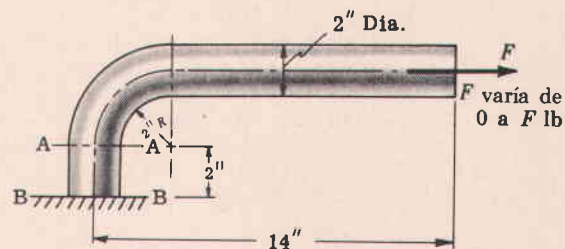


Fig. 6-14

Resp. El esfuerzo máximo en la sección A-A debido a la flexión y considerando la viga como viga curva (ver el capítulo correspondiente) es $5,08 F$. El esfuerzo variable es $2,54 F$ y el esfuerzo medio es $2,54 F$. Como el

esfuerzo máximo se ha encontrado del análisis de una viga curva, $K = 1$. Usando $A = 1$, $B = 0,85$, y $C = 0,8$, la carga máxima F es 3980 lb.

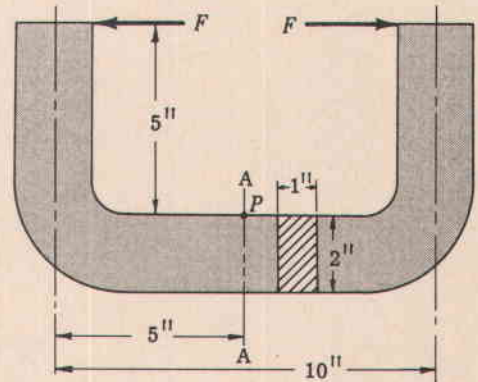
21. Similar al problema 20, excepto que la carga máxima debe encontrarse de los esfuerzos variables que se presentan en la sección B-B.

Resp. El esfuerzo máximo en la sección B-B (para una viga recta) es $7,65F$. Usando la ecuación de Soderberg con $A = 1$, $B = 0,85$ y $C = 0,8$, la carga máxima F es 2650 lb.

22. Una barra plana de acero de $2'' \times 1''$ está doblada en la forma mostrada en la figura 6-15. La carga F varía de 1000 lb a 4000 lb. El material tiene una resistencia última a la tracción de 80.000 psi, un límite de fluencia de 50.000 psi y un límite de fatiga (en flexión con inversión) de 40.000 psi. Determinar:

- el esfuerzo medio de flexión en el punto P
- el esfuerzo variable de flexión en el punto P
- el esfuerzo axial medio en P
- el esfuerzo axial variable en P
- el esfuerzo equivalente de flexión en P usando un factor de acabado superficial, $C = 0,9$
- el esfuerzo equivalente de tracción en P debido a la carga axial, usando $A = 0,7$ por carga axial y $C = 0,9$
- el esfuerzo equivalente total en P
- el factor de seguridad en P basado en los esfuerzos variables
- el esfuerzo máximo de tracción en el punto P usando la carga máxima y determinar el factor de seguridad imaginando la carga constante.

Fig. 6-15



Resp. (a) 22.500 psi
(b) 13.500 psi
(c) 1250 psi

(d) 750 psi
(e) 44.600 psi
(f) 3000 psi

(g) 47.600 psi (tracción)
(h) $N = 1,05$
(i) 38.000 psi, $N = 1,32$

Capítulo 7

Vibraciones en máquinas

LOS MOVIMIENTOS VIBRATORIOS en máquinas se presentan cuando sobre las partes elásticas actúan fuerzas variables. Generalmente, estos movimientos son indeseables, aun cuando en algunos casos (transportadores vibratorios, por ejemplo) se diseñan deliberadamente en la máquina.

EL ANALISIS DE LAS VIBRACIONES requiere el siguiente procedimiento general:

1. Evaluar las masas y la elasticidad de las partes envueltas.
2. Calcular la cantidad de rozamiento envuelta.
3. Idealizar el implemento mecánico real, remplazándolo por un sistema aproximadamente equivalente de masas, resortes y amortiguadores.
4. Escribir la ecuación diferencial de movimiento del sistema idealizado.
5. Resolver la ecuación e interpretar los resultados.

EL SISTEMA IDEAL MAS SENCILLO consiste de una masa única, un resorte único, y un amortiguador, como muestra la figura 7-1. La ecuación diferencial de movimiento para este sistema es

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t)$$

donde

m = masa.

k = constante del resorte (fuerza por unidad de deformación).

c = constante de amortiguamiento (fuerza por unidad de velocidad). (Se supone que la amortiguación es viscosa, es decir que la fuerza resistente es proporcional a la velocidad.)

$F(t)$ = fuerza externa cualquiera, función del tiempo.

x = desplazamiento de la masa desde la posición de equilibrio estático.

$\dot{x}$, $\ddot{x}$ = derivadas, primera y segunda respectivamente, de x con respecto a t .

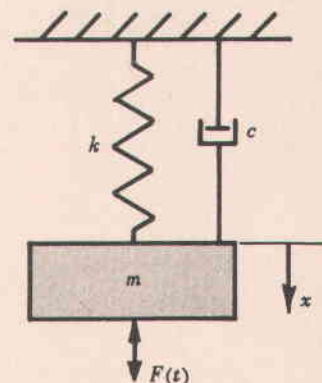


Fig. 7-1

CUALQUIER SISTEMA DE UN SOLO GRADO DE LIBERTAD puede describirse por medio de la misma forma de ecuación diferencial escrita anteriormente, si la fuerza de restitución (fuerza del resorte) es proporcional al desplazamiento y si la fuerza de rozamiento es proporcional a la velocidad. Para el sistema general de un solo grado de libertad podemos escribir

$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = F(t)$$

donde m_e , c_e , k_e son la masa **equivalente**, la constante de amortiguamiento equivalente, y la constante del resorte equivalente, respectivamente. El desplazamiento x puede ser **lineal** o **angular**.

La **función excitadora**, $F(t)$, puede ser de cualquier forma en la práctica. Para este análisis se supone que es sinusoidal:

$$F(t) = F_0 \sin \omega t$$

donde F_0 es la amplitud de la fuerza aplicada externamente y ω es la frecuencia.

LAS VIBRACIONES LIBRES se presentan cuando después de una perturbación inicial, no existe ninguna función externa de excitación, esto es, $F(t) = 0$. La ecuación diferencial es

$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = 0$$

La solución de esta ecuación puede escribirse

$$x = A_1 e^{s_1 t} + A_2 e^{s_2 t}$$

$$\text{donde } s_1 = -\frac{c_e}{2m_e} + \sqrt{\left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2 - \frac{k_e}{m_e}} \quad \text{y} \quad s_2 = -\frac{c_e}{2m_e} - \sqrt{\left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2 - \frac{k_e}{m_e}}$$

y A_1 y A_2 son constantes determinadas por las condiciones iniciales.

En el caso particular en que $(c_e/2m_e)^2 = k_e/m_e$, $s_1 = s_2 = s$ y la solución es $x = (A + Bt)e^{-st}$.

EL AMORTIGUAMIENTO CRITICO se refiere al caso especial que se acaba de mencionar para el

$$\text{cual } \left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2 = \frac{k_e}{m_e}, \text{ y } c_e = (c_e)_c = 2\sqrt{k_e m_e} \text{ es llama-}$$

do el **valor crítico** del coeficiente de amortiguamiento.

Si el amortiguamiento es mayor que el crítico, entonces la solución de la ecuación para vibraciones libres no contiene términos periódicos. La masa, después de la perturbación inicial, regresa hacia la posición de equilibrio pero no oscila.

AMORTIGUAMIENTO MENOR QUE EL CRITICO. Esta es la situación oscilatoria. La solución de la ecuación diferencial para vibraciones

libres puede escribirse en la forma

$$x = e^{-\alpha t} X \sin(\omega_d t + \gamma) \quad \text{donde } \alpha = \frac{c_e}{2m_e}, \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k_e}{m_e} - \left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2}.$$

ω_d es la **frecuencia amortiguada** del sistema. Si el amortiguamiento fuera cero la frecuencia sería $\omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}}$, la cual se llama **frecuencia natural**.

Las constantes X y γ se determinan de las condiciones iniciales.

PARA VIBRACIONES FORZADAS, la solución de la ecuación diferencial es la dada anteriormente para vibraciones libres, adicionada de una integral particular.

La solución puede escribirse en la forma

$$x = e^{-\alpha t} X \sin(\omega_d t + \gamma) + Y \sin(\omega t - \phi)$$

La primera parte de la expresión anterior representa la vibración **transitoria**, la cual desaparece con el tiempo. La segunda parte se llama vibración en **estado estacionario** y es la parte que generalmente presenta más interés para el ingeniero.

LA AMPLITUD EN ESTADO ESTACIONARIO Y es $Y = \frac{F_0}{\sqrt{(k_e - m_e \omega^2)^2 + (c_e \omega)^2}}$. Esta expresión puede escribirse

$$Y = \frac{(F_0/k)}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

donde $r = \omega/\omega_n$ es la relación de frecuencias y $\xi = c_e/(c_e)_c$ es la relación de amortiguamiento

EL FACTOR DE AMPLIFICACION M es

$$M = \frac{Y}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

M es la relación entre la amplitud del desplazamiento en estado estacionario y el desplazamiento que produciría una fuerza estática igual a F_0 .

EL ANGULO DE FASE ϕ puede determinarse de las expresiones

$$\tan \phi = \frac{c_e \omega}{k_e - m_e \omega^2}, \quad \text{sen } \phi = \frac{c_e \omega}{\sqrt{(k_e - m_e \omega^2)^2 + (c_e \omega)^2}}$$

LA FUERZA TRASMITIDA A LA BASE es la suma de la fuerza del resorte y de la fuerza de amortiguamiento:

$$k_e x + c_e \dot{x}$$

Usando la solución en estado estacionario mostrada anteriormente para x , puede demostrarse que la amplitud de la fuerza transmitida es

$$F_{TR} = \frac{F_0 \sqrt{k_e^2 + (c_e \omega)^2}}{\sqrt{(k_e - m_e \omega^2)^2 + (c_e \omega)^2}}$$

LA TRASMISIBILIDAD es la relación entre la amplitud de la fuerza transmitida y la amplitud que se tendría si la masa estuviera anclada a la base (sin resorte y sin amortiguador).

$$\begin{aligned} \text{T. R.} &= \frac{F_{TR}}{F_0} = \frac{\sqrt{k_e^2 + (c_e \omega)^2}}{\sqrt{(k_e - m_e \omega^2)^2 + (c_e \omega)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}} \end{aligned}$$

LA FUNCION EXCITADORA, en la discusión anterior, estaba en la forma de una fuerza periódica aplicada a la masa móvil. Otra situación importante se ilustra en la figura 7-2. Aquí un movimiento periódico de la base produce el movimiento de la masa. Corrientemente, el problema de diseño en esta situación consiste en escoger un resorte y un amortiguador tales que la amplitud del movimiento de la masa sea pequeña en comparación con la amplitud del movimiento de la base.

Si $z(t)$ se toma de modo que sea sinusoidal, esto es

$$z(t) = z \sin \omega t$$

la ecuación diferencial para el movimiento de la masa es

$$m_e \ddot{x} + c_e \dot{x} + k_e x = z \sqrt{k_e^2 + (c_e \omega)^2} \sin(\omega t - \psi)$$

donde ψ es un ángulo de fase.

$$\cos \psi = \frac{k_e}{\sqrt{k_e^2 + (c_e \omega)^2}}, \quad \text{sen } \psi = \frac{-c_e \omega}{\sqrt{k_e^2 + (c_e \omega)^2}}$$

La ecuación diferencial anterior, excepto por el ángulo de fase ψ , es idéntica en su forma a la ecuación

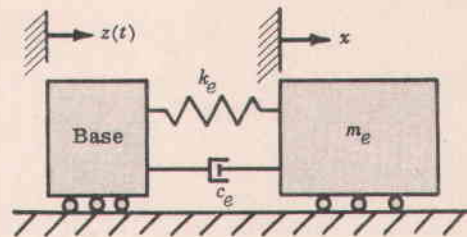


Fig. 7-2

discutida previamente. La solución muestra que la amplitud de la vibración en estado estacionario es

$$Y = \frac{z \sqrt{k_e^2 + (c_e \omega)^2}}{\sqrt{(k_e - m_e \omega^2)^2 + (c_e \omega)^2}}$$

LA TRASMISIBILIDAD es la relación entre la amplitud del movimiento de la masa y el de la base.

$$T.R. = \frac{Y}{z} = \frac{\sqrt{k_e^2 + (c_e \omega)^2}}{\sqrt{(k_e - m_e \omega^2)^2 + (c_e \omega)^2}}$$

LOS SISTEMAS DE MAS DE UN GRADO DE LIBERTAD no pueden describirse mediante una simple ecuación diferencial de segundo orden. Un análisis completo de un sistema tal requeriría, en general, la solución simultánea de un sistema de n ecuaciones de segundo orden, donde n es el número de grados de libertad del sistema.

Sin embargo, existen métodos prácticos relativamente sencillos que permiten determinar la frecuencia más baja de vibración (o frecuencia fundamental). Esta información es de gran importancia para el ingeniero proyectista.

El sistema de dos grados de libertad de la figura 7-3 posee dos modos de vibración. En el primer modo las dos masas se mueven en fase, alcanzando los desplazamientos máximos en el mismo sentido y en el mismo instante. En el segundo modo las masas están fuera de fase, alcanzando los desplazamientos máximos en sentidos opuestos y en el mismo instante.

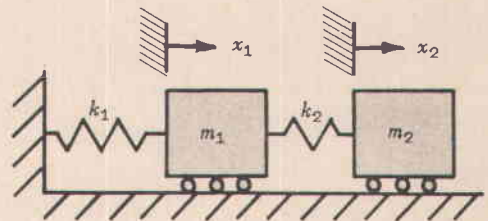


Fig. 7-3

EL METODO DE LA ENERGIA para determinar la frecuencia del primer modo se basa en que, si se desprecia el rozamiento, la energía cinética máxima del sistema debe ser igual a su energía potencial máxima.

Sean X_1 = amplitud del desplazamiento de la masa m_1 y X_2 = amplitud del desplazamiento de la masa m_2 . Supongamos un movimiento sinusoidal de frecuencia ω .

La energía cinética máxima del sistema será

$$E.C. \max. = \frac{1}{2} m_1 X_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 X_2^2 \omega^2$$

La energía potencial máxima almacenada en el resorte será

$$E.P. \max. = \frac{1}{2} k_1 X_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (X_2 - X_1)^2$$

Sin rozamiento,

$$E.C. \max = E.P. \max.$$

$$\text{de la cual} \quad \omega^2 = \frac{k_1 X_1^2 + k_2 (X_2 - X_1)^2}{m_1 X_1^2 + m_2 X_2^2} \quad \text{o} \quad \omega^2 = \frac{k_1 + k_2 (X_2/X_1 - 1)^2}{m_1 + m_2 (X_2/X_1)^2}$$

Esta ecuación daría la primera, o más baja, frecuencia natural de vibración, si se conociera la relación de amplitudes X_2 / X_1 . El procedimiento práctico consiste en *ensayar* una serie de valores para esta relación. El valor que dé el resultado *más bajo* para ω es el más cercano al valor correcto.

LA RESONANCIA se define en varias formas en textos diferentes. El término se refiere generalmente a la operación en la vecindad de la amplitud máxima en vibración forzada. Para

un sistema sin rozamiento significa operación a la frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k_e/m_e}$.

Con amortiguamiento viscoso y una función excitadora de la forma $F_0 \sin \omega t$ aplicada a la masa, la amplitud máxima se obtiene cuando la frecuencia de operación ω es

$$\omega_{\max} \gamma = \omega_n \sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Notar que es diferente a la frecuencia amortiguada ω_d .

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

En ausencia de implementos de amortiguamiento colocados deliberadamente, el factor $\xi = c_e / (c_e)_c$ es generalmente pequeño y ω_n , ω_d y $\omega_{\max} \gamma$ son aproximadamente iguales. Por tanto, ω_n se usa ordinariamente en cálculos de ingeniería. En los problemas siguientes, cuando se menciona la *resonancia*, significará operación a la frecuencia natural ω_n .

Para sistemas de varios grados de libertad, *resonancia* significará operación a cualquiera de las frecuencias naturales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Escribir la ecuación diferencial de las vibraciones libres del sistema que muestra la figura 7-4, en que x se mide a partir de la posición en el que el resorte está sin esfuerzo.

Solución:

Se hace el diagrama de cuerpo libre de la masa y se señalan cuidadosamente todas las fuerzas que actúan en la dirección x . Se aplica la segunda ley de Newton, igualando la suma de las fuerzas externas al producto de la masa por la aceleración.

$$-c\dot{x} - kx = m\ddot{x} \quad \text{o} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

Notar que la fuerza del resorte se ha escrito apropiadamente como $-kx$, ya que su sentido es opuesto al de x . En forma similar, la fuerza de amortiguamiento se ha escrito como $-c\dot{x}$, ya que su sentido es opuesto al de la velocidad $\dot{x}$.

2. Escribir la ecuación diferencial de las vibraciones libres del sistema mostrado en la figura 7-5. Despreciar la masa de la varilla.

Solución:

Existe un movimiento angular. Se sumarán los momentos de las fuerzas externas alrededor de la articulación O y se igualarán al producto de la aceleración angular por el momento de inercia relativo a la articulación.

Para un pequeño desplazamiento θ , la fuerza del resorte es muy cercana a $-ka\theta$ y la fuerza del amortiguador a $-ca\dot{\theta}$. Además, los brazos de momento para estas fuerzas son muy próximos a a . El brazo de momento para la fuerza debida al peso es $b \sin \theta$, el cual se aproximará a $b\theta$. El momento de inercia de la masa relativo a la articulación es mb^2 ; por tanto,

$$-(ca\dot{\theta})a - (ka\theta)a - mg(b\theta) = mb^2\ddot{\theta}$$

$$\text{o} \quad mb^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + (ka^2 + mbg)\theta = 0$$

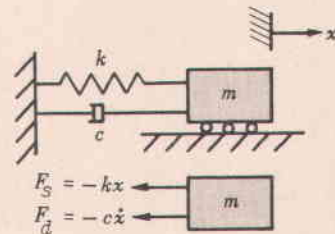
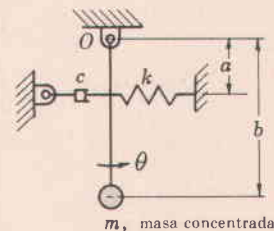


Fig. 7-4



m , masa concentrada

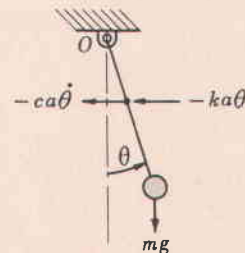


Fig. 7-5

3. Determinar para el sistema del problema 2 (a) la frecuencia natural, (b) la frecuencia amortiguada, (c) el valor crítico del factor de amortiguamiento c .

Solución:

Comparando la ecuación escrita en el problema 2 con la ecuación general para un grado de libertad que se discutió anteriormente, tenemos

$$x = \theta, \quad \dot{x} = \dot{\theta}, \quad \ddot{x} = \ddot{\theta}, \quad m_e = mb^2, \quad c_e = ca^2, \quad k_e = ka^2 + mgb$$

Por tanto

$$(a) \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k_e}{m_e}} = \sqrt{\frac{ka^2 + mgb}{mb^2}} \quad (b) \quad \omega_d = \sqrt{\frac{k_e}{m_e} - \left(\frac{c_e}{2m_e}\right)^2} = \sqrt{\frac{ka^2 + mgb}{mb^2} - \left(\frac{ca^2}{2mb^2}\right)^2}$$

$$(c) \quad (c_e)_c = c_c a^2 = 2\sqrt{k_e m_e} = 2\sqrt{(ka^2 + mgb)mb^2} \quad \text{o} \quad c_c = (2/a^2)\sqrt{(ka^2 + mgb)mb^2}$$

4. Escribir la ecuación diferencial para el sistema de la figura 7-6.

Solución:

De nuevo se suponen desplazamientos pequeños y se hacen aproximaciones como las del problema 2. Se define θ medido a partir de la **posición de equilibrio estático**. Esto significa que inicialmente la fuerza del resorte debe ser suficientemente grande para equilibrar el efecto del peso. Tomando momentos alrededor de O ,

$$(-ca\dot{\theta})a + (-ka\theta - \frac{b}{a}mg)a + mgb + F_O b \sin \omega t = mb^2 \ddot{\theta}$$

$$\text{o} \quad mb^2 \ddot{\theta} + ca^2 \dot{\theta} + ka^2 \theta = F_O b \sin \omega t$$

Notar que al medir θ desde la posición de equilibrio estático, la fuerza del peso se elimina. Aun cuando este sistema es el mismo de los problemas 2 y 3, excepto por la orientación con respecto a la vertical, el comportamiento es diferente. Por ejemplo, la frecuencia natural del sistema es

$$\omega_n = (a/b)\sqrt{k/m}$$

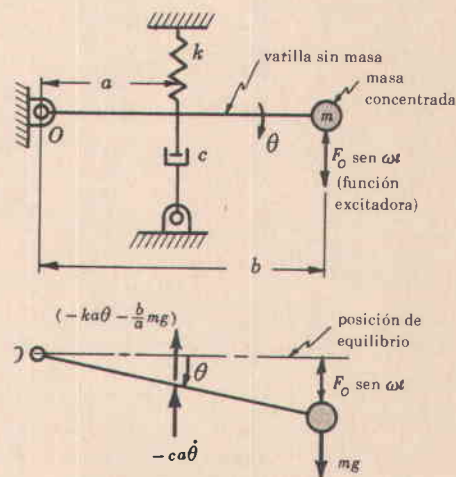


Fig. 7-6

5. Un motor se monta sobre resortes. Un pequeño desequilibrio del rotor producirá vibraciones cuando el motor esté en operación. Analizar la situación de modo que se pueda tomar una decisión sobre las características recomendables de los resortes para el montaje. Considerar movimientos verticales únicamente. Ver la figura 7-7.

Solución:

Adoptamos los siguientes símbolos:

M = masa total del motor.

me = desequilibrio del rotor (producto de la masa desbalanceada por el radio).

k = constante del resorte (efecto de todos los resortes actuando en conjunto).

c = constante de amortiguamiento que tiene en cuenta el rozamiento (principalmente los efectos de los rozamientos internos entre las piezas y los materiales; su valor es pequeño).

ω = velocidad del motor en radianes por unidad de tiempo.

ωt = ángulo de rotación de la masa no equilibrada, medido desde la horizontal.

x = desplazamiento vertical del motor, medido desde la posición de equilibrio estático.

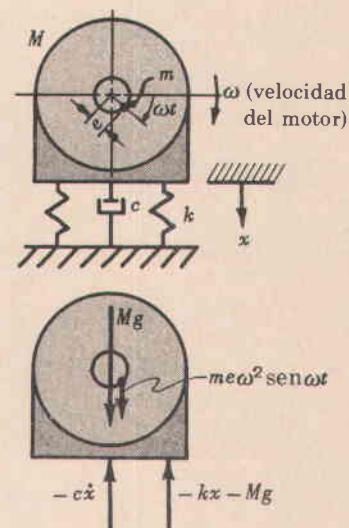


Fig. 7-7

El motor, como un conjunto, tiene una aceleración vertical $\ddot{x}$. Adicionalmente, la masa no equilibrada m tiene la aceleración $-e\omega^2 \sin \omega t$ en la dirección vertical. Las fuerzas externas son las de los resortes y la del amortiguamiento, más el peso Mg . Entonces

$$-c\dot{x} - kx - Mg + Mg = M\ddot{x} - me\omega^2 \sin \omega t$$

o

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = +me\omega^2 \sin \omega t$$

(Nota: El hecho de que el miembro derecho de la ecuación aparezca con signo positivo o negativo, así como que sea $me\omega^2 \sin \omega t$ ó $me\omega^2 \cos \omega t$ depende de la referencia para el ángulo de rotación ωt y del sentido de rotación ω , así como del sentido asignado como positivo al desplazamiento x . Por ejemplo, si se hubiera medido ωt en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, desde el eje vertical positivo, la función excitadora hubiera sido $me\omega^2 \cos \omega t$. Esto no cambia el resultado final del análisis).

La ecuación diferencial anterior tiene la misma forma que la discutida anteriormente para el caso general. Sin embargo, la amplitud de la fuerza excitadora, en vez de ser una constante F_0 , es una función de ω . Se podrían aplicar los resultados obtenidos anteriormente, pero en vez de esto se trabajarán los detalles principales.

Supongamos una solución estacionaria de la forma $x = Y \sin(\omega t - \phi)$. Entonces

$$\dot{x} = Y\omega \cos(\omega t - \phi) \quad \text{y} \quad \ddot{x} = -Y\omega^2 \sin(\omega t - \phi)$$

Remplazando en la ecuación diferencial, se tiene

$$\begin{aligned} M[-Y\omega^2 \sin(\omega t - \phi)] + cY\omega \cos(\omega t - \phi) + kY \sin(\omega t - \phi) &= me\omega^2 \sin \omega t \\ \text{o} \quad -MY\omega^2 (\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi) & \\ + cY\omega (\cos \omega t \cos \phi + \sin \omega t \sin \phi) & \\ + kY (\sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi) &= me\omega^2 \sin \omega t \end{aligned}$$

$$\text{Igualando los coeficientes de } \sin \omega t, \quad -MY\omega^2 \cos \phi + cY\omega \sin \phi + kY \cos \phi = me\omega^2.$$

$$\text{Igualando los coeficientes de } \cos \omega t, \quad MY\omega^2 \sin \phi + cY\omega \cos \phi - kY \sin \phi = 0.$$

La solución simultánea de las dos últimas ecuaciones da

$$Y = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad \cos \phi = \frac{k - M\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad \sin \phi = \frac{c\omega}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

Así, la solución en estado estacionario de la ecuación diferencial es

$$x = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

Investigamos la fuerza transmitida a la base. Esta es la suma de las fuerzas de los resortes y el amortiguamiento.

$$kx + c\dot{x} \quad \text{o} \quad kY \sin(\omega t - \phi) + cY\omega \cos(\omega t - \phi)$$

la cual puede ponerse en la forma $Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2} \sin(\omega t - \phi + \beta)$

donde $(-\phi + \beta)$ es el ángulo de fase entre la fuerza de excitación $me\omega^2 \sin \omega t$ y la fuerza transmitida.

Para nuestros propósitos, lo más importante es la amplitud F_{TR} de la fuerza transmitida:

$$F_{TR} = Y\sqrt{k^2 + (c\omega)^2} = \frac{me\omega^2 \sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - M\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}$$

Esto se comprende mejor si se pone en forma adimensional, como sigue.

Sean $r = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{\omega}{\sqrt{k/M}}$ y $\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{kM}}$, donde ω_n = frecuencia natural y c_c = factor de

amortiguamiento crítico. Entonces

$$\frac{F_{TR}}{me\omega^2} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

La relación entre la amplitud de la fuerza transmitida y la amplitud de la función de excitación se denomina **relación de transmisión o transmisibilidad**.

La pregunta original en el problema era la de decidir sobre las características aconsejables del resorte. Se desea que la fuerza transmitida sea pequeña en comparación con la fuerza que se transmitiría si la armadura del motor se anclara directamente a la base. Esto significa que la cantidad

$$\text{T.R.} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2\xi r)^2}}$$

debe ser pequeña comparada con la unidad. Como el rozamiento es pequeño, a no ser que se haya introducido deliberadamente un amortiguamiento en el montaje, calculemos $\xi = 0,05$ y despejemos el valor de r necesario para tener T.R. = 0,1:

$$0,1 = \frac{\sqrt{1 + 4(0,05 r)^2}}{\sqrt{(1-r^2)^2 + 4(0,05 r)^2}} \quad \text{de la cual } r = 3,40$$

Nota: Si se hubiera supuesto un rozamiento nulo, se habría obtenido $r = 3,41$. Por tanto, para hacer estimaciones rápidas en situaciones como la descrita, puede ignorarse el rozamiento.

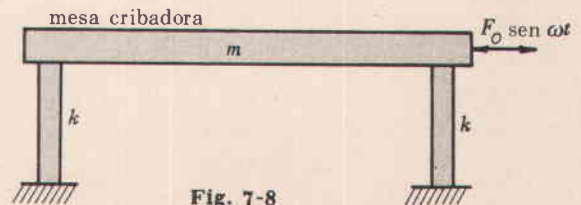
Si r es 3,40, ω_n debe ser $\omega/3,40$; así $\sqrt{k/M} = \omega/3,40$ o $k = M\omega^2/11,56$.

Supongamos ahora que el motor pesa 42 lb y opera a 1150 rpm. Entonces k debe ser

$$k = \frac{M\omega^2}{11,56} = \frac{(42/32,2)(2\pi \times 1150/60)^2}{11,56} = 1635 \text{ lb/pie} = 136 \text{ lb/pul}$$

Usando cuatro resortes en paralelo, la constante de cada uno de ellos debe ser $136/4 = 34 \text{ lb/pul}$.

6. Parte de la operación de un proceso requiere que una mesa se mueva alternativamente con una amplitud de 0,025 pul a una frecuencia de 6 ciclos por segundo. La mesa debe tener dos soportes elásticos de acero, como muestra la figura 7-8, cada uno con una constante de elasticidad k definida como la fuerza sobre el extremo superior de uno de los soportes de acero dividida por la deformación correspondiente en dicho punto.



El peso de la mesa es aproximadamente de 80 lb. Un solenoide que produce una fuerza sinusoidal, $F_0 \sin \omega t$, se usa para accionar el sistema. ¿Para qué constante de elasticidad k deben diseñarse los soportes? Si el rozamiento efectivo se calcula que es $c = 0,05 c_c$, ¿cuál es la fuerza máxima que debe suministrar el solenoide (F_0)?

Esta es una situación de vibraciones forzadas en estado estacionario. La amplitud de vibración es

$$Y = \frac{F_0}{\sqrt{(k_e - m_e \omega^2)^2 + (c_e \omega)^2}}$$

donde $m_e = m$, masa de la mesa,
 $k_e = 2k$ (ya que hay dos resortes, cada uno con una constante k),
 $c_e = c = 0,05 c_c = (0,05)(2)\sqrt{k_e m}$,
 $\omega = (6)(2\pi) = 12\pi \text{ rad/seg}$,
 $Y = 0,025 \text{ pul}$, amplitud deseada.

Un examen de Y en la ecuación anterior muestra que Y es cercana al máximo, para F_0 dada, en la resonancia, esto es, cuando ω es igual a la frecuencia natural del sistema. Por tanto, el diseño debe ser tal que

$$k_e = 2k = m\omega^2 \quad \text{o} \quad k = \frac{1}{2}m\omega^2 = \frac{1}{2}(80/32,2)(12\pi)^2 = 1765 \text{ lb/pie} = 147 \text{ lb/pul}$$

En resonancia, $Y = F_0/c\omega$. Entonces, la fuerza máxima requerida del solenoide es

$$F_0 = c\omega Y = 0,05 c_c \omega Y = (0,05)(2\sqrt{k_e m})\omega Y = (0,05)\left(2\sqrt{(2)(1765)(80/32,2)}\right)(12\pi)(0,025/12) = 0,74 \text{ lb}$$

7. Se propone montar una canasta de secado giratoria, en la forma mostrada en la figura 7-9. Deben seleccionarse las características recomendables de los resortes y de los amortiguadores para las siguientes condiciones.

Peso total de la canasta más su contenido = 50 lb

Velocidad de rotación = 400 rpm

Desequilibrio máximo supuesto = 20 lb-pul
(producto del peso por e)

En resonancia, la amplitud de la vibración en cualquier dirección debe ser menor que $\frac{1}{2}$ pul.

Solución:

Se escogen las coordenadas X y Y , como muestra la figura 7-10.

Consideremos una deformación pequeña x del centro de la canasta. El resorte 1 se estirará, el 3 se comprimirá y el 2 experimentará un cambio de longitud despreciable. Las fuerzas de los resortes serán como se indica aproximadamente en la figura 7-11.

La fuerza neta del resorte en la dirección X es

$$F_s = -2 \cos 30^\circ kx \cos 30^\circ = -1,5 kx$$

En otras palabras, la constante efectiva de resorte en la dirección X es $1,5 k$. Un análisis similar dará el mismo valor para la constante efectiva de resorte en la dirección Y .

Si se estudian en la misma forma las fuerzas de amortiguamiento en las direcciones X y Y , se encuentra que el factor efectivo de amortiguamiento tanto en la dirección X como en la Y es $1,5 c$.

Debido a que todos los coeficientes en las ecuaciones diferenciales para los movimientos X y Y son semejantes, sólo se necesita investigar una ecuación,

$$M\ddot{x} + 1,5c\dot{x} + 1,5kx = (me)\omega^2 \sin \omega t$$

La amplitud del desplazamiento será

$$Y = \frac{me\omega^2}{\sqrt{(1,5k - M\omega^2)^2 + (1,5c\omega)^2}}$$

por analogía con el problema 5, en el cual la ecuación diferencial era de la misma forma. La amplitud de la fuerza transmitida será

$$F_{TR} = \frac{me\omega^2 \sqrt{(1,5k)^2 + (1,5c\omega)^2}}{\sqrt{(1,5k - M\omega^2)^2 + (1,5c\omega)^2}}$$

En el problema 5 se vio que para mantener pequeña la fuerza transmitida, se hacía baja la frecuencia natural en comparación con la frecuencia de operación especificada. Para un diseño tentativo escogemos $\omega/\omega_n = 3$. Como en este sistema la frecuencia natural es $\omega_n = \sqrt{1,5k/M}$, esto significa que debemos diseñar de modo que $1,5k = \omega_n^2 M = (\omega/3)^2 M$, o

$$k = \frac{\omega^2 M}{9(1,5)} = \frac{(400 \times 2\pi/60)^2 (50/32,2)}{9(1,5)} = 201 \text{ lb/pie} = 16,8 \text{ lb/pul}$$

Ahora se calcula el factor de amortiguamiento c requerido para limitar la amplitud del desplazamiento a $\frac{1}{2}$ pul, en resonancia. En resonancia,

$$Y = \frac{me\omega_n^2}{\sqrt{0 + (1,5c\omega_n)^2}} \quad \text{o} \quad c = \frac{me\omega_n}{1,5Y} = \frac{0,0517(13,9)}{1,5(1/24)} = 11,5 \text{ lb-seg/pie} = 0,96 \text{ lb-seg/pul}$$

donde $Y = 1/24$ pie, $me = (20/32,2)(1/12) = 0,0517$ slug-pie, $\omega_n = (2\pi \times 400/60)/3 = 13,9$ rad/seg.

Respuesta. Diseñar para $\omega_n = \omega/3$: $k = 16,8$ lb/pul, $c = 0,96$ lb-seg/pul.

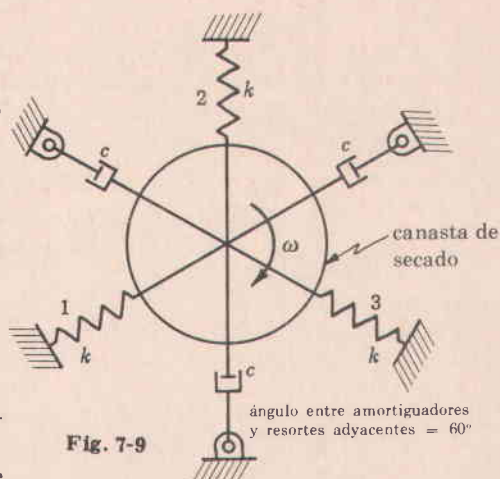


Fig. 7-9

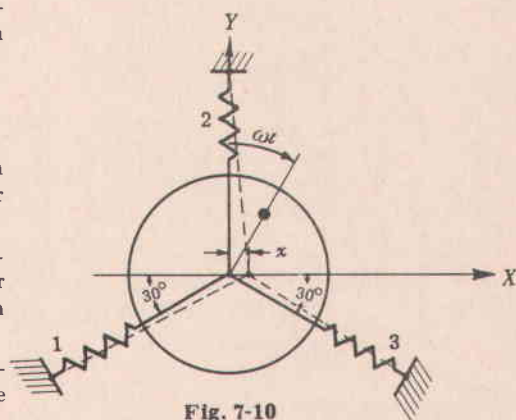


Fig. 7-10

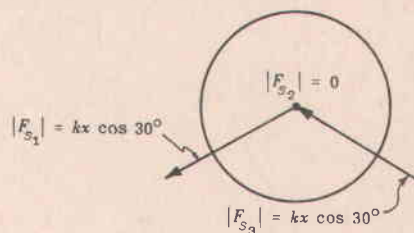


Fig. 7-11

8. En la figura 7-12, m_1 pesa 10 lb, m_2 pesa 20 lb, $k_1 = 8$ lb/pul, $k_2 = 10$ lb/pul, y $k_3 = 5$ lb/pul. Usando el método de la energía, determinar la frecuencia natural de la vibración en el primer modo, para movimiento vertical únicamente.

Solución:

Sean X_1 y X_2 las amplitudes de los desplazamientos absolutos de las masas m_1 y m_2 desde la posición de equilibrio estático. Sean δ_1 y δ_2 los desplazamientos de las masas bajo sus propios pesos, medidos desde la posición en que los resortes no están esforzados.

Con referencia a los diagramas de cuerpo libre de la figura 7-13, para equilibrio estático se tiene

$$-k_1\delta_1 + k_2(\delta_2 - \delta_1) + m_1g = 0$$

$$-k_2(\delta_2 - \delta_1) - k_3\delta_2 + m_2g = 0$$

o

$$-8\delta_1 + 10(\delta_2 - \delta_1) + 10 = 0$$

$$-10(\delta_2 - \delta_1) - 5\delta_2 + 20 = 0$$

de la cual $\delta_1 = 2,060$ pul, $\delta_2 = 2,708$ pul.

Las fuerzas iniciales en los resortes son:

Resorte No. 1, $(8)(2,060) = 16,48$ lb

Resorte No. 2, $(10)(2,708 - 2,060) = 6,48$ lb

Resorte No. 3, $(5)(2,708) = 13,54$ lb.

Con los desplazamientos X_1 y X_2 desde la posición de equilibrio estático, existirán los siguientes cambios de energía potencial:

Almacenamiento en el Resorte No. 1, $(16,48)X_1 + \frac{1}{2}(8)X_1^2$

Almacenamiento en el Resorte No. 2, $(6,48)(X_2 - X_1) + \frac{1}{2}(10)(X_2 - X_1)^2$

Almacenamiento en el Resorte No. 3, $(13,54)X_2 + \frac{1}{2}(5)X_2^2$

Cambio de elevación, m_1 , $-10 X_1$

Cambio de elevación, m_2 , $-20 X_2$.

El cambio total de energía potencial al moverse desde la posición de equilibrio estático es

$$P.E. = 4X_1^2 + 5(X_2 - X_1)^2 + 2,5X_2^2$$

Notar que los términos de cambio de elevación cancelan los términos de las fuerzas iniciales en los resortes. El sistema hubiera podido tratarse como si las masas se movieran en un plano horizontal, sin que se hubieran afectado los resultados.

La energía cinética máxima de las masas en movimiento, suponiendo movimiento sinusoidal de frecuencia ω , será

$$E.C. = \frac{1}{2}m_1V_1^2 + \frac{1}{2}m_2V_2^2 = \frac{1}{2}(10/g)(X_1\omega)^2 + \frac{1}{2}(20/g)(X_2\omega)^2 = (5X_1^2 + 10X_2^2)\omega^2/g$$

Igualando la E. C. a la E. P. se obtiene $\omega^2 = \frac{[4X_1^2 + 5(X_2 - X_1)^2 + 2,5X_2^2]g}{5X_1^2 + 10X_2^2}$ la cual puede ponerse en la forma

$$\omega^2 = \frac{[4 + 5(X_2/X_1 - 1)^2 + 2,5(X_2/X_1)^2]g}{5 + 10(X_2/X_1)^2}$$

El paso final es suponer valores para la relación X_2/X_1 y calcular la frecuencia ω . El valor más bajo resultante para ω es el más cercano al correcto. (Nota: $g = 386$ pul/seg²)

X_2/X_1 supuesto	ω^2 calculado	ω
1,6	0,397 g	12,38 rad/seg.
1,4	0,394 g	12,33 rad/seg.
1,2	0,402 g	12,45 rad/seg.

La respuesta es muy cercana a 12,33 rad/seg. Notar que el resultado no es muy sensible a la relación supuesta para X_2/X_1 . Generalmente, un buen valor para ensayar primero es la relación de las deformaciones estáticas. En este caso, $\delta_2/\delta_1 = 2,708/2,060 = 1,31$. En el caso de haber escogido $X_2/X_1 = 1,31$, se habría obtenido un valor tan cercano al valor final $\omega = 12,33$ rad/seg, como lo hubiera dado la regla de cálculo.

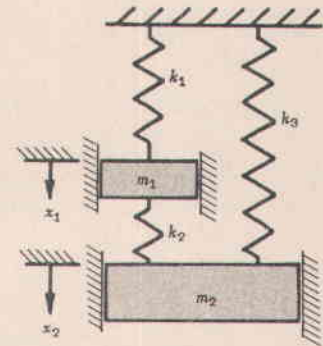


Fig. 7-12

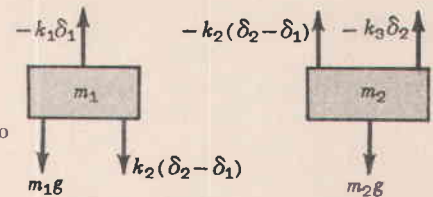


Fig. 7-13

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. Escribir las ecuaciones diferenciales de movimiento de los sistemas que se muestran en las figuras 7-14, 7-15 y 7-16. En todos los casos el desplazamiento x se mide desde la posición de equilibrio estático.

Resp. Fig. 7-14: $m\ddot{x} + c\dot{x} + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)x = F(t)$

Fig. 7-15: $m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_1 + k_2)x = F(t)$

Fig. 7-16: $m\ddot{x} + c\dot{x} + \left(\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right)x = F_0 \sin \omega t$

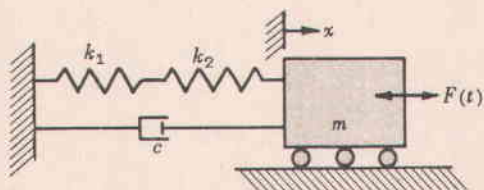


Fig. 7-14

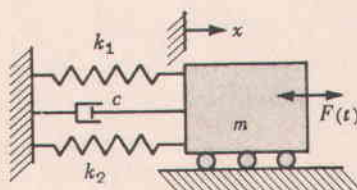


Fig. 7-15

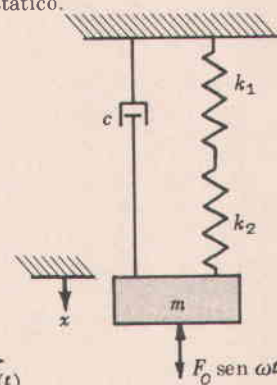


Fig. 7-16

10. Escribir la ecuación diferencial del movimiento para los sistemas de las figuras 7-17, 7-18 y 7-19. En todos los casos el desplazamiento angular θ se mide desde la posición de equilibrio estático. Suponer que θ es pequeño y hacer las aproximaciones apropiadas.

Resp.

Fig. 7-17: $mb^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + ka^2\theta = bF_0 \sin \omega t$

Fig. 7-18: $mb^2\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + (ka^2 + mgb)\theta = bF_0 \sin \omega t$

Fig. 7-19: $m(R^2 + a^2)\ddot{\theta} + ka^2\theta = 0$

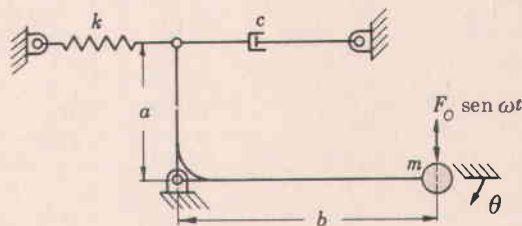


Fig. 7-17

11. ¿Cuál es la frecuencia natural para cada uno de los sistemas de las figuras 7-14 a 7-19?

Resp. Fig. 7-14: $\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$

Fig. 7-15: $\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$

Fig. 7-16: $\sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}}$

Fig. 7-17: $\frac{a}{b} \sqrt{\frac{k}{m}}$

Fig. 7-18: $\sqrt{\frac{ka^2 + mgb}{mb^2}}$

Fig. 7-19: $\sqrt{\frac{ka^2}{m(R^2 + a^2)}}$

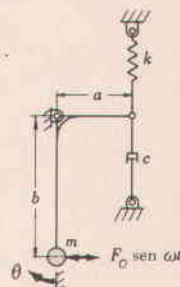


Fig. 7-18

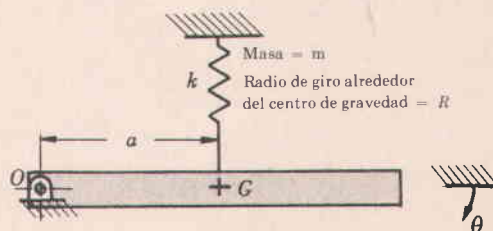


Fig. 7-19

12. La ecuación diferencial $10\ddot{x} + 9\dot{x} + 810x = 0$ describe un sistema de un grado de libertad. Las unidades son pul, seg, lb. Determinar (a) la frecuencia natural ω_n , (b) la frecuencia amortiguada ω_d , (c) la relación de amortiguamiento $\xi = c/c_c$.
 Resp. (a) $\omega_n = 9$ rad/seg, (b) $\omega_d = 9$ rad/seg (no es lo suficientemente diferente de ω_n como para notar la diferencia con la regla de cálculo), (c) $\xi = 0,05$
13. La ecuación diferencial $10\ddot{x} + 200\dot{x} + 810x = 0$ describe un sistema de un grado de libertad. Las unidades son pul, seg, lb. ¿Es éste un sistema oscilatorio? Resp. No: $c/c_c = 200/180$. El amortiguamiento es mayor que el crítico
14. La ecuación $2\ddot{x} + 12\dot{x} + 50x = 8 \sin 10t$ describe un sistema de un grado de libertad en vibraciones forzadas. Las unidades son pul, lb, seg. Determinar (a) la frecuencia natural ω_n , (b) la frecuencia amortiguada ω_d , (c) la relación de amortiguamiento ξ , (d) la amplitud de la vibración en estado estacionario.
 Resp. (a) 5 rad/seg, (b) 4 rad/seg, (c) 0,60, (d) 0,0416 pul
15. Un motor eléctrico con peso de 25 lb debe montarse sobre cuatro resortes. Las partes giratorias del motor pesan 10 lb y tienen una excentricidad de 0,01 pul. La velocidad del motor es 1200 rpm. Se calcula que la relación de amortiguamiento es 0,05. Determinar la constante de resorte necesaria si la fuerza transmitida a la base no debe ser mayor que el 20 por ciento de la fuerza centrífuga debida al desequilibrio del rotor.
 Resp. 41,2 lb/pul o menos
16. Un instrumento debe montarse sobre un tablero sometido a vibraciones de 0,2 pul de amplitud a una frecuencia de 30 ciclos por segundo. El instrumento pesa 2 lb. ¿Qué constante de resorte se necesita para el montaje si la amplitud de movimiento del instrumento no debe ser mayor de 0,02 pul? Resp. 16,7 lb/pul o menos
17. Para el sistema mostrado en la figura 7-20, $k_1 = k_2 = 20$ lb/pul, y $m_1 = m_2 = 0,1$ lb-seg²/pul. Determinar la frecuencia natural para el primer modo de vibración. Resp. 8,77 rad/seg
18. Para un sistema como el de la figura 7-20, $m_1 = m_2 = 0,2$ lb-seg²/pul y $k_1 = k_2 = k$. La frecuencia natural en el primer modo debe ser 17,54 rad/seg. ¿Cuál es el valor de k requerido? Resp. 160 lb/pul
19. Se propone montar un ventilador dentro del gabinete de una parte de un equipo de enfriamiento, como se muestra esquemáticamente en la figura 7-21. El ventilador (con motor) pesa 20 lb. El gabinete pesa 50 lb. Los resortes usados para aislar el ventilador del gabinete tienen una constante efectiva combinada de 100 lb/pul. Los resortes que aíslan el gabinete de la base tienen una constante efectiva combinada de 200 lb/pul. El ventilador opera a 400 rpm. ¿Existe algún peligro de excitar el primer modo de vibración del sistema? Usar el método de la energía.
 Resp. No hay peligro. La frecuencia natural es aproximadamente 1,5 rad/seg para el primer modo de vibración. Como la velocidad del ventilador es 41,8 rad/seg (400 rpm), no hay peligro de que el desequilibrio del ventilador excite el primer modo de vibración
20. En un experimento sobre un sistema simple de masa-resorte-amortiguador, se ha encontrado que la frecuencia de las vibraciones libres es 12 rad/seg. La constante de resorte y la masa se conocen con bastante precisión, lo que permite calcular la frecuencia natural $\omega_n = 15$ rad/seg. (a) ¿Cuál es el valor de la relación de amortiguamiento ξ ? (b) ¿A qué frecuencia puede esperarse la máxima amplitud de una vibración forzada con una función de excitación $F_0 \sin \omega t$ aplicada a la masa? Resp. (a) $\xi = 0,6$ (b) $\omega_{\max} = 7,95$ rad/seg

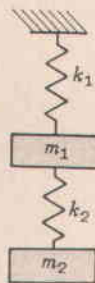


Fig. 7-20

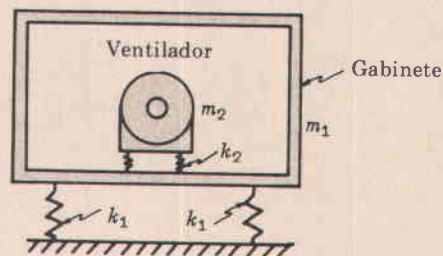


Fig. 7-21

Capítulo 8

Velocidad crítica de ejes

TODOS LOS EJES, aun sin la presencia de cargas externas, se deforman durante la rotación. La magnitud de la deformación depende de la rigidez del eje y de sus soportes, de la masa total del eje y de las partes que se le adicionan, del desequilibrio de la masa con respecto al eje de rotación y del amortiguamiento presente en el sistema. La deformación, considerada como una función de la velocidad, presenta sus valores máximos en las llamadas **velocidades críticas**, pero sólo la más baja (primera) y ocasionalmente la segunda tienen importancia generalmente para el proyectista. Las otras son generalmente tan altas que están muy alejadas de las velocidades de operación.

EN LA PRIMERA VELOCIDAD CRÍTICA, la flexión del eje sigue la forma más sencilla posible. En la segunda, la flexión sigue la segunda forma más sencilla, etc. Por ejemplo, un eje soportado en sus extremos y con dos masas relativamente grandes (en comparación con la del eje), se deforma según la configuración mostrada en las figuras 8-1(a) y 8-1(b) cuando rota en la primera y en la segunda velocidad crítica, respectivamente.

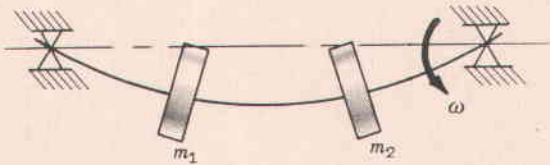


Fig. 8-1 (a)

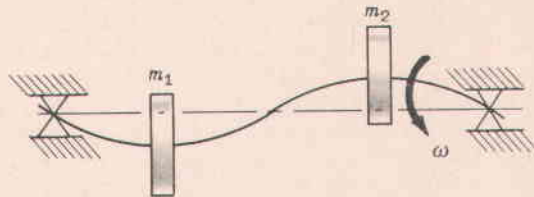


Fig. 8-1 (b)

LA FRECUENCIA NATURAL DE UN EJE en flexión es prácticamente igual a la velocidad crítica, y generalmente se toman como iguales. Existe una diferencia, normalmente muy pequeña, debida a la acción giroscópica de las masas.

PARA UN EJE QUE LLEVA UNIDA UNA SOLA MASA (figuras 8-2 y 8-3), si su masa es pequeña en comparación con la masa que lleva unida, la primera velocidad crítica puede calcularse aproximadamente por

$$\omega_c = \sqrt{k/m} \text{ rad/unidad de tiempo}$$

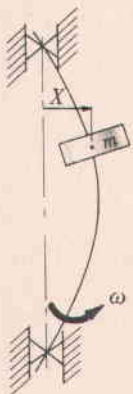


Fig. 8-2 (a)

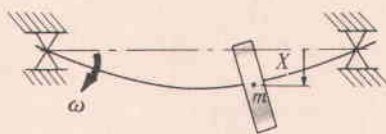


Fig. 8-2 (b)

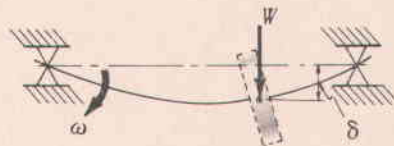


Fig. 8-3

donde m es la masa y k la constante de resorte del eje (fuerza requerida para producir una deformación unitaria en el punto de localización de la masa). Esta relación es independiente de la inclinación del eje (horizontal, vertical o intermedio). El símbolo X en la figura 8-2 representa la deformación del eje, durante la rotación, en el punto de localización de la masa. Además,

$$\omega_c = \sqrt{g/\delta} \text{ rad/unidad de tiempo}$$

donde δ es la deformación estática (deformación producida por una fuerza $mg = W$, en el punto de localización de la masa), y g es la constante de gravitación (32,2 pies/seg² ó 386 pul/seg² ó 981 cm/seg²).

PARA UN EJE DE SECCION TRASVERSAL CONSTANTE, simplemente apoyado en sus extremos, sin otra masa fuera de la propia, la velocidad crítica (primera) es muy cercana a

$$\omega_c = \sqrt{\frac{5}{4} \left(\frac{g}{\delta(\max)} \right)} \text{ rad/unidad de tiempo}$$

donde $\delta(\max)$ es la deformación estática máxima producida por una carga distribuida uniformemente sobre el eje e igual a su propio peso.

PARA UN EJE DE MASA DESPRECIABLE CON VARIAS MASAS CONCENTRADAS UNIDAS A EL, (véase la figura 8-4), la primera velocidad crítica es aproximadamente

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum_1^j W_n \delta_n}{\sum_1^j W_n \delta_n^2}} \quad \text{Ecuación de Rayleigh-Ritz}$$

donde W_n = peso de la masa n -ésima
 δ_n = deformación estática en la masa n -ésima
 j = número total de masas.

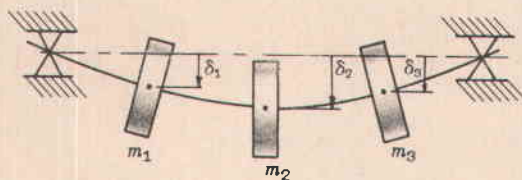


Fig. 8-4

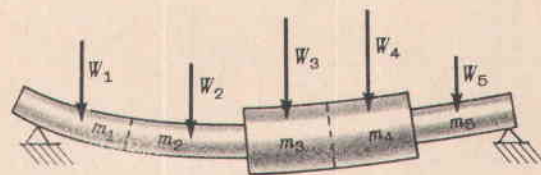


Fig. 8-5

La misma ecuación puede usarse para calcular la primera velocidad crítica de un eje que tiene una masa distribuida (véase la figura 8-5). Se divide la masa distribuida en un número de partes, m_1 , m_2 , m_3 , etc. Se considera la masa de cada parte como si estuviera concentrada en su propio centro de gravedad. La experiencia da el número de subdivisiones que debe usarse, pero puede verse que con una partición no muy refinada se obtiene una buena precisión.

LA ECUACION DE DUNKERLEY, la cual proporciona otra aproximación para la primera velocidad crítica de un sistema de masas múltiples, es

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \frac{1}{\omega_3^2} + \dots \quad \text{Ecuación de Dunkerley}$$

donde ω_c es la primera velocidad crítica del sistema de masas múltiples, ω_1 es la velocidad crítica que existiría con la presencia aislada de la masa No. 1, ω_2 la velocidad crítica con la presencia aislada de la masa No. 2, etc.

Es importante recordar que las ecuaciones de Rayleigh-Ritz y Dunkerley son aproximaciones a la primera frecuencia natural de vibración, la cual se supone igual a la velocidad crítica de rotación. En general, la ecuación de Rayleigh-Ritz sobrestima la frecuencia natural, mientras que la de Dunkerley la subestima.

LAS VELOCIDADES CRÍTICAS MAS ALTAS para sistemas con masas múltiples requieren cálculos mucho más extensos que los necesarios para determinar la velocidad crítica más baja (primera). Existen muchos métodos para dicho efecto. Aquí se da la ecuación para un sistema con dos masas:

$$\frac{1}{\omega^4} - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2)\frac{1}{\omega^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = 0$$

Esta es una ecuación bicuadrática con dos raíces positivas $1/\omega_1$ y $1/\omega_2$, en la cual ω_1 y ω_2 son la primera y segunda velocidades críticas (o frecuencias naturales de vibración). Las dos masas son m_1 y m_2 .

Las constantes a son coeficientes de influencia. a_{12} es la deformación en el punto de localización de la masa No. 1 producida por una carga unitaria localizada en el punto de la masa No. 2, a_{11} es la deformación en el punto de la masa No. 1, producida por una carga unitaria en el punto No. 1, etc. El teorema de reciprocidad de Maxwell establece que $a_{12} = a_{21}$.

PARA UN SISTEMA DE MASAS MULTIPLES la ecuación de frecuencias se obtiene igualando a cero el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} (a_{11}m_1 - \frac{1}{\omega^2}) & (a_{12}m_2) & (a_{13}m_3) & \dots \\ (a_{21}m_1) & (a_{22}m_2 - \frac{1}{\omega^2}) & (a_{23}m_3) & \dots \\ (a_{31}m_1) & (a_{32}m_2) & (a_{33}m_3 - \frac{1}{\omega^2}) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El eje mostrado en la figura 8-6 soporta un engranaje m_1 cuyo peso es 50 lb y un volante m_2 cuyo peso es 100 lb. Se ha encontrado que las deformaciones estáticas δ_1 y δ_2 son 0,0012 pul y 0,0003 pul, respectivamente. Determinar la primera velocidad crítica, ignorando la masa propia del eje.

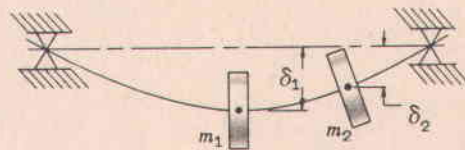


Fig. 8-6

Solución:

$$\Sigma W\delta = (50)(0,0012) + (100)(0,0003) = 0,090 \text{ lb-pul}$$

$$\Sigma W\delta^2 = (50)(0,0012)^2 + (100)(0,0003)^2 = 81 \times 10^{-6} \text{ lb-pul}^2$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \Sigma W\delta}{\Sigma W\delta^2}} = \sqrt{\frac{(386)(0,090)}{81 \times 10^{-6}}} = 655 \text{ rad/seg} = 6250 \text{ rpm}$$

2. Deducir la ecuación $\omega_c = \sqrt{g/\delta}$ de la velocidad crítica de un eje que soporta una carga concentrada aislada.

Solución:

Despreciando la pequeña inclinación de la masa, ignorando los efectos de rozamiento, y suponiendo una pequeña excentricidad e del centro de gravedad de la masa con respecto al centro del eje, se tiene que

$$kX = m(X + e)\omega^2$$

donde kX es la fuerza elástica que el eje ejerce sobre la masa, k es la constante de elasticidad del eje, esto es, la fuerza requerida en el punto de localización de m para producir una deformación unitaria en dicho punto. $(X + e)\omega^2$ es la aceleración del centro de gravedad de la masa. Resolviendo para X , la deformación del eje en m es,

$$X(k - m\omega^2) = me\omega^2 \quad \text{o} \quad X = me\omega^2 / (k - m\omega^2)$$

Se observa que, bajo las hipótesis hechas, la deformación X llega a ser muy grande cuando $k = m\omega^2$. Por tanto, la velocidad crítica es $\omega_c = \sqrt{k/m}$. Pero $m = W/g$; así, $k/m = kg/W = g/\delta$. (Por definición, la deformación estática δ es la deformación que sería producida por una fuerza igual a W ; por tanto $W/k = \delta$.) Entonces $\omega_c = \sqrt{g/\delta}$.

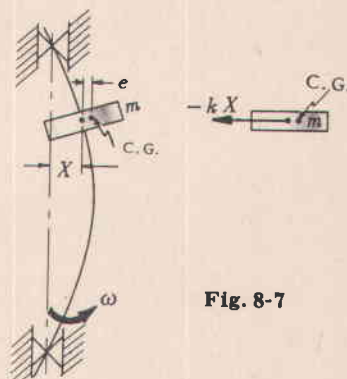


Fig. 8-7

3. Deducir la ecuación $\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum W \delta}{\sum W \delta^2}}$ de la primera velocidad crítica de un eje con varias cargas concentradas. Referirse a la figura 8-8.

Solución:

Dibujamos el eje en vibraciones laterales libres a la frecuencia fundamental ω (primer modo de vibración) y concluimos que la energía potencial máxima almacenada en el eje debe ser igual a la energía cinética máxima de las masas en movimiento.

$$\text{E. C. max} = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2 + \dots$$

El movimiento de las masas es sinusoidal. Por tanto, la velocidad máxima para cualquiera de las masas será $X_n \omega$, donde X_n es la amplitud del desplazamiento de esta masa. Por tanto,

$$\text{E. C. max} = \frac{1}{2} m_1 (X_1 \omega)^2 + \frac{1}{2} m_2 (X_2 \omega)^2 + \dots = \frac{1}{2} \omega^2 \sum m_n X_n^2$$

La energía potencial máxima almacenada en el eje es igual al trabajo necesario para deformar el eje a la forma definida por las amplitudes X_1, X_2 , etc. Así,

$$\text{E. C. max} = \frac{1}{2} k_1 X_1^2 + \frac{1}{2} k_2 X_2^2 + \dots = \frac{1}{2} \sum k_n X_n^2$$

donde cada k es una "constante de elasticidad" cuya definición puede explicarse en la siguiente forma: Sean F_1, F_2, F_3 , etc., aquellas fuerzas que actuando simultáneamente en las localizaciones 1, 2, 3, etc., respectivamente, producirían deformaciones X_1, X_2, X_3 , etc. Ahora, la forma de la curva de deformación del eje depende de estas fuerzas, independientemente de la forma como se aplican. Se podría haber supuesto, por ejemplo, que F_1 se aplica primero, luego F_3 , luego F_2 , ..., arbitrariamente. Podemos suponer que las fuerzas se aplicaron *simultáneamente* desde cero en relación *lineal* a las deformaciones en sus puntos de localización. Véase el diagrama de fuerzas y deformaciones de la figura 8-8. El trabajo hecho en cada sitio de localización de una fuerza se representa por el área sombreada bajo la línea recta de pendiente k .

Igualando la energía cinética máxima a la energía potencial máxima, obtenemos $\omega^2 = \frac{\sum k_n X_n^2}{\sum m_n X_n^2}$.

Se supone ahora que la forma de deformación del eje durante la vibración es la misma de la curva de deformación estática, esto es, se supone que $X_1 = C\delta_1, X_2 = C\delta_2$, etc. Realmente esto es incorrecto, pero da una aproximación razonable. Entonces

$$\omega^2 = \frac{\sum k_n \delta_n^2}{\sum m_n \delta_n^2} = \frac{g \sum W_n \delta_n}{\sum W_n \delta_n^2}$$

ya que $m_n = W_n/g$ y $k_n \delta_n = W_n$.

Suponiendo que la frecuencia natural de la vibración lateral es igual a la velocidad crítica de rotación ω_c y

eliminando los subíndices n para simplificar, se obtiene finalmente $\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum W \delta}{\sum W \delta^2}}$.

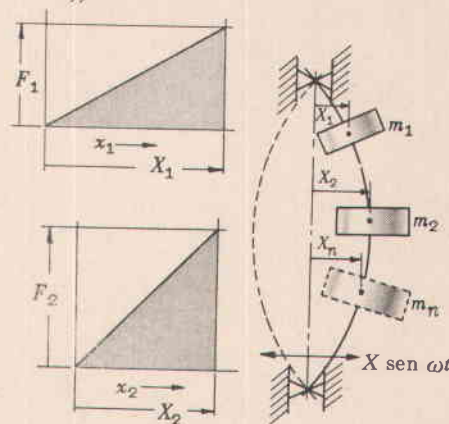


Fig. 8-8

4. Las dos masas, m_1 y m_2 , unidas al eje de la figura 8-9 pesan 140 lb y 60 lb respectivamente. Mediante un análisis de deformaciones, se ha encontrado que los coeficientes de influencia para el eje son

$$\begin{aligned}a_{11} &= 2 \times 10^{-6} \text{ pul/lb,} \\a_{22} &= 12 \times 10^{-6} \text{ pul/lb,} \\a_{12} &= a_{21} = 4 \times 10^{-6} \text{ pul/lb.}\end{aligned}$$

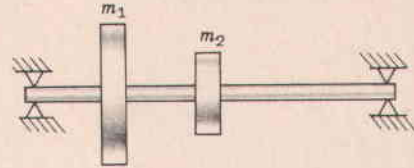


Fig. 8-9

(Recuérdese que a_{11} es la deformación en la localización de la masa No. 1 originada por una fuerza de 1 lb en dicha localización, a_{12} es la deformación en la localización de la masa No. 1 originada por una fuerza de 1 lb en la localización No. 2, etc.) Determinar la primera velocidad crítica, ignorando la masa del eje.

Soluciones:

- (a) Usando la ecuación de Dunkerley.

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \sqrt{\frac{g}{\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{g}{W_1 a_{11}}} = \sqrt{\frac{386}{(140)(2)10^{-6}}} = 1174 \text{ rad/seg} \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{g}{\delta_{22}}} = \sqrt{\frac{g}{W_2 a_{22}}} = \sqrt{\frac{386}{(60)(12)10^{-6}}} = 732 \text{ rad/seg} \\ \frac{1}{\omega_c^2} &= \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} = \frac{1}{(1174)^2} + \frac{1}{(732)^2} \quad \text{o} \quad \omega_c = 621 \text{ rad/seg}\end{aligned}$$

- (b) Usando la ecuación de Rayleigh-Ritz.

$$\begin{aligned}\omega_c &= \sqrt{\frac{g \sum W \delta}{\sum W \delta^2}} \\ \delta_1 &= W_1 a_{11} + W_2 a_{12} = (140)(2)10^{-6} + (60)(4)10^{-6} = (5,20)10^{-4} \text{ pul} \\ \delta_2 &= W_2 a_{22} + W_1 a_{21} = (60)(12)10^{-6} + (140)(4)10^{-6} = (12,80)10^{-4} \text{ pul} \\ \begin{array}{l} \hline W \delta \\ (1) \quad (140)(5,20)10^{-4} = (7,28)10^{-2} \\ (2) \quad (60)(12,80)10^{-4} = (7,68)10^{-2} \\ \hline \Sigma = (14,96)10^{-2} \text{ lb-pul} \end{array} \quad \begin{array}{l} \hline W \delta^2 \\ (1) \quad (7,28)(10^{-2})(5,20)10^{-4} = (37,9)10^{-6} \\ (2) \quad (7,68)(10^{-2})(12,80)10^{-4} = (98,3)10^{-6} \\ \hline \Sigma = (136,2)10^{-6} \text{ lb-pul}^2 \end{array} \\ \omega_c &= \sqrt{\frac{(386)(14,96)10^{-2}}{(136,2)10^{-6}}} = 651 \text{ rad/seg}\end{aligned}$$

- (c) Usando la ecuación de frecuencias.

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega^4} - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2)\frac{1}{\omega^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 &= 0 \\ (a_{11}m_1 + a_{22}m_2) &= (2)(10^{-6})\left(\frac{140}{386}\right) + (12)(10^{-6})\left(\frac{60}{386}\right) = (2,59)10^{-6} \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 &= [(2)(12) - (4)(4)]\frac{(140)(60)10^{-12}}{(386)^2} = (0,451)10^{-12}\end{aligned}$$

Así, $\frac{1}{\omega^4} - (2,59)10^{-6}\frac{1}{\omega^2} + (0,451)10^{-12} = 0$, en la cual la raíz positiva más pequeña es $\omega_c = 624 \text{ rad/seg}$.

Este es el valor verdadero de la velocidad crítica (dentro de la exactitud de la regla de cálculo). Para este ejemplo particular, la ecuación de Dunkerley es una mejor aproximación que la ecuación de Rayleigh-Ritz.

5. El eje de acero de la figura 8-10 tiene unidos dos engranajes cuyos pesos son 50 lb y 100 lb respectivamente. Despreciando la masa del eje, determinar la primera velocidad crítica.

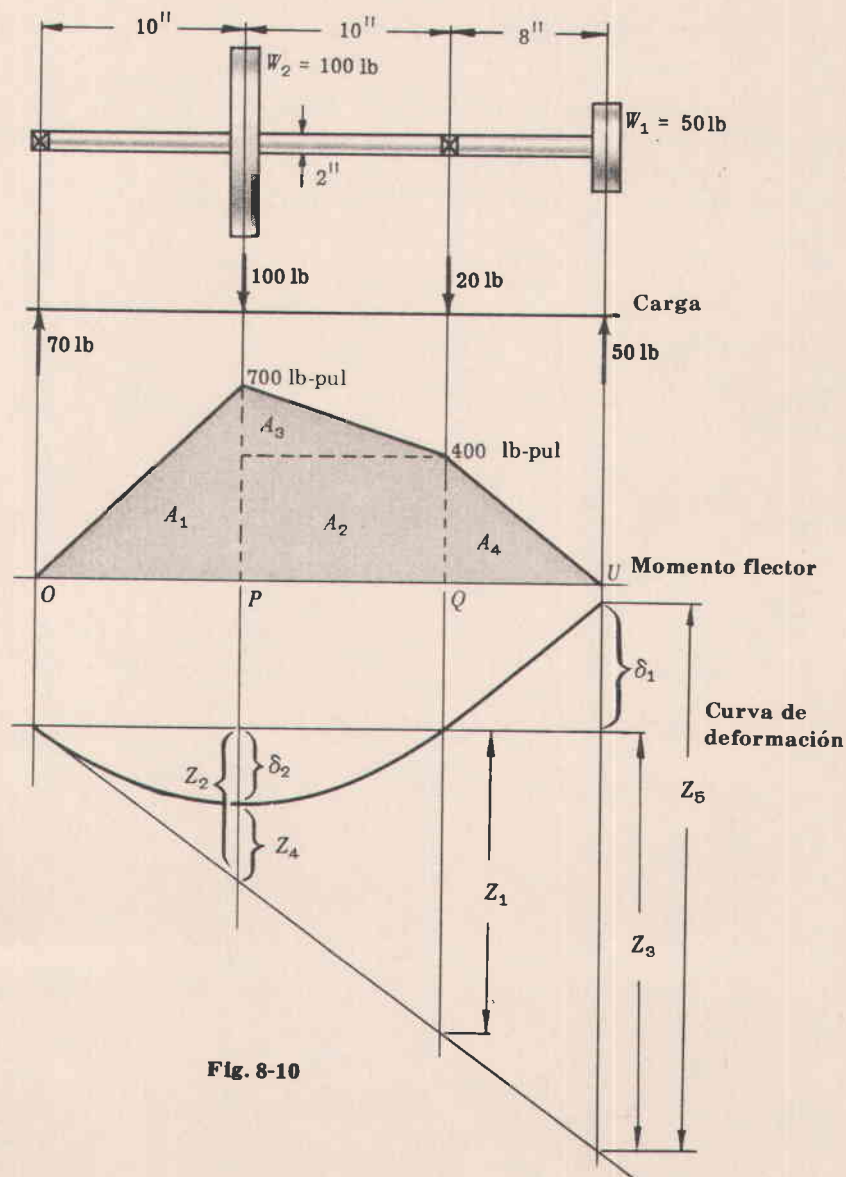


Fig. 8-10

Solución:

Escogemos la ecuación de Rayleigh-Ritz, $\omega_c = \sqrt{\frac{g \sum W \delta}{\sum W \delta^2}}$. El mayor trabajo de cálculo está en la deter-

minación de los δ . Se procede en la forma ilustrada en los diagramas de la figura 8-10.

- (1) Se supone una carga estática con fuerzas W_1 y W_2 iguales en magnitud y dirigidas en forma tal que el eje se deforme en la forma más simple posible (sin inversión de curvatura). Esto da el diagrama de cargas mostrado.
- (2) Se calculan las reacciones en los cojinetes, suponiendo soportes simples.
- (3) Se determinan los momentos de flexión y se hace un esquema del diagrama de momentos flectores.

- (4) Se encuentran las deformaciones δ_1 y δ_2 por medio de una técnica adecuada. Aquí usamos el método del momento de las áreas. Los pasos aritméticos necesarios se transcriben a continuación.

(a) Z_1EI = momento de las áreas A_1, A_2, A_3 alrededor de Q

(b) $Z_2EI = 76.667(10/20) = 38.333 \text{ lb-pul}^3$

(c) $Z_3EI = 76.667(28/20) = 107.334 \text{ lb-pul}^3$

(d) Z_4EI = momento del área A_1 alrededor de $P = \frac{(10)(700)}{2} \left(\frac{10}{3}\right) = 11.667 \text{ lb-pul}^3$

(e) Z_5EI = momento de las áreas A_1, A_2, A_3, A_4 alrededor de U

$$= \frac{(10)(700)}{2} \left(18 + \frac{10}{3}\right) + (10)(400)(13) + \frac{(10)(300)}{2} \left(8 + \frac{20}{3}\right) + \frac{(8)(400)}{2} \left(\frac{16}{3}\right) \\ = 157.216 \text{ lb-pul}^3$$

(f) $\delta_2EI = Z_2EI - Z_4EI = 38.333 - 11.667 = 26.666$

(g) $\delta_1EI = Z_5EI - Z_3EI = 157.216 - 107.334 = 49.882$

$$(5) I = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi(2)^4}{64} = 0.785 \text{ pul}^4, \quad E = (3)10^7 \text{ psi (acero)}$$

$$(6) \delta_1 = 49.882/(3)(10^7)(0.785) = (2,118)10^{-3} \text{ pul.} \\ \delta_2 = 26.666/(3)(10^7)(0.785) = (1,132)10^{-3} \text{ pul.}$$

$$(7) W_1\delta_1 = (50)(2,118)10^{-3} = (10,59)10^{-2} \quad W_1\delta_1^2 = (2,243)10^{-4} \\ W_2\delta_2 = (100)(1,132)10^{-3} = (11,32)10^{-2} \quad W_2\delta_2^2 = (1,282)10^{-4} \\ \Sigma = (21,91)10^{-2} \quad \Sigma = (3,525)10^{-4}$$

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g \Sigma W \delta}{\Sigma W \delta^2}} = \sqrt{\frac{(386)(21,91)10^{-2}}{(3,525)10^{-4}}} = 490 \text{ rad/seg}$$

6. Determinar la primera y la segunda velocidad crítica para el sistema de la figura 8-10.

Solución:

1. Usamos la ecuación de frecuencias

$$\frac{1}{\omega^4} - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2)\frac{1}{\omega^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = 0$$

La mayoría del trabajo aritmético está en la determinación de los coeficientes de influencia, $a_{11}, a_{22}, a_{12} = a_{21}$. Deben hacerse dos análisis de deformación.

2. Para determinar a_{11} y a_{21} aplicamos una carga de 1 lb en el punto de localización de la masa No. 1 y resolvemos para las deformaciones en los puntos de localización de las masas No. 1 y No. 2 respectivamente (véase la figura 8-11). En forma similar se determinan a_{22} y a_{12} aplicando una carga de 1 lb en el punto de localización de la masa No. 2 y resolviendo para las deformaciones en la localización de las masas No. 2 y No. 1, respectivamente. El proceso aritmético no se reproduce aquí. Los resultados son

$$a_{12} = a_{21} = (8,50)10^{-6} \text{ pul/lb} \\ a_{11} = (25,35)10^{-6} \text{ pul/lb} \\ a_{22} = (7,07)10^{-6} \text{ pul/lb}$$

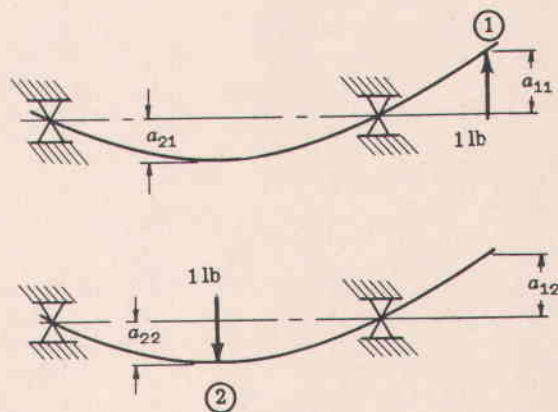


Fig. 8-11

3. $a_{11}m_1 + a_{22}m_2 = (25,35)10^{-6}(50/386) + (7,07)10^{-6}(100/386) = (5,115)10^{-6}$
 $(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = [(25,35)(7,07) - (8,50)^2](50)(100)(10^{-12})/(386)^2 = (3,59)10^{-12}$
4. Por tanto, $\frac{1}{\omega^4} - (5,115)(10^{-6})\frac{1}{\omega^2} + (3,59)10^{-12} = 0$ con raíces positivas $\omega_{c1} = 483$ y $\omega_{c2} = 1090$ rad/seg.

7. Los cojinetes de soporte para el eje mostrado en la figura 8-12 tienen una flexibilidad equivalente a una constante de elasticidad, k , de 250.000 lb/pul en cualquier dirección perpendicular al eje. Debido a la flexión, el eje tiene una deformación δ_b de 0,0018 pul en el sitio de aplicación de la carga de 300 lb. ¿Qué efecto tiene la flexibilidad de los soportes sobre la velocidad crítica?

Solución:

1. Si los soportes fueran completamente rígidos, la velocidad crítica sería

$$\omega_c = \sqrt{g/\delta_b} = \sqrt{386/0,0018} = 463 \text{ rad/seg}$$

2. La flexibilidad de los soportes aumenta la deformación en el sitio de la carga, medida con respecto a la línea central del eje descargado. Para calcular la velocidad crítica debemos usar

$$\omega_c = \sqrt{g/(\delta_b + \delta_s)}$$

$$y_1 = R_1/k = 100/250.000 = (4)10^{-4} \text{ pul}$$

$$y_2 = R_2/k = 200/250.000 = (8)10^{-4} \text{ pul}$$

$$\delta_s = y_1 + (y_2 - y_1)\frac{l_1}{l_1 + l_2} = (6,7)10^{-4} \text{ pul}$$

$$\delta_b + \delta_s = (18,0 + 6,7)10^{-4} = (24,7)10^{-4} \text{ pul}$$

Entonces $\omega_c = \sqrt{386/(24,7 \times 10^{-4})} = 395 \text{ rad/seg}$. La flexibilidad de los soportes reduce la velocidad crítica en

$$\left(\frac{463 - 395}{463}\right)100\% \approx 15\%$$

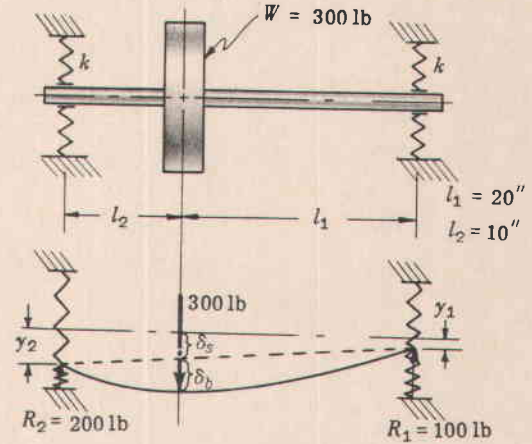


Fig. 8-12

8. Deducir la ecuación de frecuencias

$$\frac{1}{\omega^4} - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2)\frac{1}{\omega^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = 0$$

para un sistema con dos masas.

Solución:

1. Véase la figura 8-13. Consideremos el eje en rotación, deformado por las fuerzas centrífugas $m_1y_1\omega^2$ y $m_2y_2\omega^2$ sobre las dos masas.

$$y_1 = a_{11}m_1y_1\omega^2 + a_{12}m_2y_2\omega^2,$$

$$y_2 = a_{22}m_2y_2\omega^2 + a_{21}m_1y_1\omega^2$$

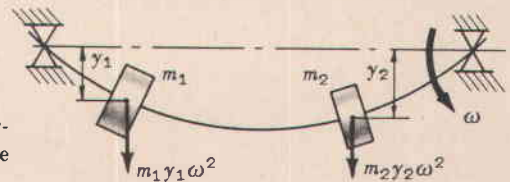


Fig. 8-13

2. Reorganizando las ecuaciones anteriores, reuniendo los coeficientes de y_1 y y_2 , y dividiendo por ω^2 .

$$(a_{11}m_1 - 1/\omega^2)y_1 + (a_{12}m_2)y_2 = 0, \quad (a_{21}m_1)y_1 + (a_{22}m_2 - 1/\omega^2)y_2 = 0$$

3. Resolviendo ambas ecuaciones para y_1/y_2 ,

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{a_{12}m_2}{1/\omega^2 - a_{11}m_1}, \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{1/\omega^2 - a_{22}m_2}{a_{21}m_1}$$

Entonces $\frac{a_{12}m_2}{1/\omega^2 - a_{11}m_1} = \frac{1/\omega^2 - a_{22}m_2}{a_{21}m_1}$, la cual puede disponerse en la forma

$$\frac{1}{\omega^4} - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2)\frac{1}{\omega^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = 0$$

4. Más simplemente, se hubiera podido decir que para que las dos ecuaciones escritas en (2) sean satisfechas, el determinante de los coeficientes de y_1 y y_2 debe ser nulo.

$$\begin{vmatrix} (a_{11}m_1 - 1/\omega^2) & (a_{12}m_2) \\ (a_{21}m_1) & (a_{22}m_2 - 1/\omega^2) \end{vmatrix} = 0$$

5. Para desarrollar la ecuación de frecuencias con más masas, se podría seguir el mismo procedimiento, escribiendo una ecuación para la deformación en cada masa. Para que el sistema de ecuaciones sea satisfecho, el determinante de los coeficientes de las y debe ser nulo.

9. Deducir la ecuación de Dunkerley para un sistema de dos masas.

Solución:

1. Comenzamos con la ecuación de frecuencias deducida en el problema 8:

$$\frac{1}{\omega^4} - (a_{11}m_1 + a_{22}m_2)\frac{1}{\omega^2} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})m_1m_2 = 0$$

2. En cualquier ecuación de la forma $x^2 + bx + c = 0$, la suma de las raíces es $-b$; $x_1 + x_2 = -b$. Por tanto, en la ecuación de frecuencias

$$(1/\omega_{c1}^2 + 1/\omega_{c2}^2) = a_{11}m_1 + a_{22}m_2$$

donde ω_{c1} y ω_{c2} son la primera y segunda velocidad crítica, respectivamente.

3. ω_{c2} es más grande que ω_{c1} , generalmente mucho más grande. Entonces $1/\omega_{c1}^2$ es más grande que $1/\omega_{c2}^2$. Por tanto, *aproximadamente*, $1/\omega_{c1}^2 = a_{11}m_1 + a_{22}m_2$.

4. Ahora, $a_{11}m_1 = a_{11}W_1/g$; y $a_{11}W_1 = \delta_{11}$, la deformación estática en la masa No. 1 producida por W_1 actuando aisladamente. Por tanto, $a_{11}m_1 = \delta_{11}/g = 1/\omega_1^2$, donde ω_1 = velocidad crítica que existiría si únicamente la masa No. 1 estuviera presente. Similarmente, $a_{22}m_2 = 1/\omega_2^2$.

5. Así, $1/\omega_{c1}^2 = 1/\omega_1^2 + 1/\omega_2^2$, *aproximadamente*, que es la ecuación de Dunkerley.

6. Puede verse ahora la razón dada anteriormente de que la ecuación de Dunkerley *subestima* la velocidad crítica. La ecuación de Dunkerley supone que $1/\omega_{c1}^2 = a_{11}m_1 + a_{22}m_2$, cuando realmente $1/\omega_{c1}^2 = a_{11}m_1 + a_{22}m_2 - 1/\omega_{c2}^2$.

10. Un eje de acero de diámetro D muestra una primera velocidad crítica de 1200 rpm. Si el eje fuera taladrado para hacerlo hueco, con un diámetro interior de $\frac{3}{4}D$, ¿cuál sería la velocidad crítica?

Solución:

1. ω_c^2 es proporcional a $1/\delta$; entonces $\omega_{ch}^2/\omega_{cs}^2 = \delta_s/\delta_h$, donde ω_{ch} es la velocidad crítica del eje hueco y ω_{cs} la del eje sólido, δ_s la deformación estática del eje sólido y δ_h la del eje hueco (ambas medidas en la misma localización).

2. El taladrado del eje reduce su peso y rigidez, afectando la deformación de dos maneras.

$$\text{El peso se reduce en la relación } \frac{W_h}{W_s} = \frac{D^2 - (\frac{3}{4}D)^2}{D^2} = \frac{7}{16}.$$

$$\text{El momento de inercia } I \text{ de la sección transversal se reduce en la relación } \frac{I_h}{I_s} = \frac{D^4 - (\frac{3}{4}D)^4}{D^4} = \frac{175}{256}.$$

3. Como δ es proporcional a W/I , entonces $\delta_s/\delta_h = (16/7)(175/256) = 1562$ y

$$\omega_{ch} = \omega_{cs}\sqrt{\delta_s/\delta_h} = 1200\sqrt{1562} = 1500 \text{ rpm}$$

La reducción de masa tiende a elevar la velocidad crítica, mientras que la reducción de rigidez tiende a bajarla. La masa se reduce más que la rigidez; entonces, el efecto neto es elevar la velocidad crítica.

PROBLEMAS PROPUESTOS

11. Un eje simplemente apoyado sobre dos cojinetes separados 20 pul entre sí, soporta un volante de 80 lb, 7 pul a la derecha del cojinete izquierdo. La curva de deformación estática indica lo siguiente:

Distancia del cojinete iz. pul	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Deformación, pul	0	0,001	0,003	0,005	0,007	0,008	0,009	0,008	0,006	0,002	0

Calcular la velocidad crítica. Resp. 2400 rpm aproximadamente

12. Un eje de acero de 40 pul de largo está simplemente apoyado en sus extremos y tiene un diámetro de 3 pul en las 20 pul centrales de su longitud, y un diámetro de 2,5 pul en el resto. En los sitios donde el diámetro cambia se hallan masas de 300 lb cada una. Despreciando la masa del eje y usando la ecuación de Rayleigh-Ritz, calcular la primera velocidad crítica. Resp. $\delta_1 = \delta_2 = 0,00425$ pul, $\omega_c = 30$ rad/seg

13. Determinar la velocidad crítica del eje de acero mostrado en la figura 8-14. Despreciar la masa del eje. Resp. 1900 rpm

14. El eje mostrado en la figura 8-15 debe construirse de acero inoxidable ($E = 26 \times 10^6$ psi). Determinar un diámetro seguro que proporcione una velocidad crítica no menor que 3600 rpm. Resp. $d = 2\frac{1}{4}$ pul

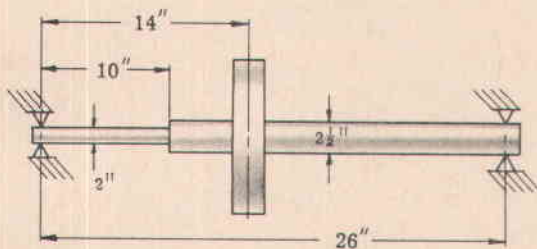


Fig. 8-14

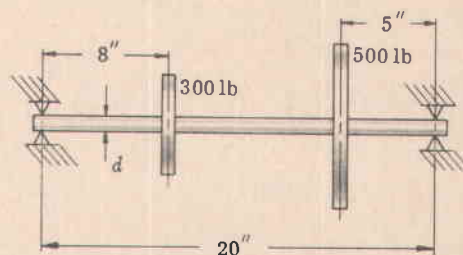


Fig. 8-15

15. Para el eje de acero mostrado en la figura 8-16 calcular la primera velocidad crítica, usando la ecuación de Dunkerley. Resp. 1800 rpm

16. Para el eje de la figura 8-10 del problema 5, determinar la primera velocidad crítica, usando la ecuación de Dunkerley. Resp. 442 rad/seg

17. Determinar la velocidad crítica del eje de acero mostrado en la figura 8-17. Resp. 1480 rpm

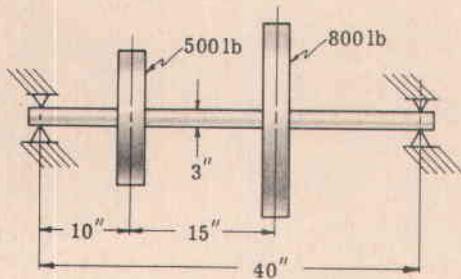


Fig. 8-16

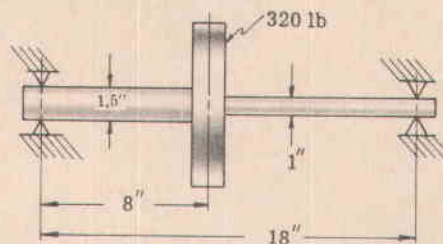


Fig. 8-17

18. El eje de acero mostrado en la figura 8-18 debe diseñarse para una velocidad crítica no menor que 1800 rpm. Determinar el menor diámetro d necesario para esto. Resp. 2 pul
19. Un eje (desnudo) tiene una velocidad crítica de 800 rpm. Si se duplicara el diámetro del eje, ¿cuál sería la velocidad crítica? Resp. 1600 rpm
20. Un eje soporta dos masas iguales concentradas en las localizaciones 1 y 2. Con la masa 1 aisladamente, las deformaciones estáticas en 1 y 2 son 0,008 pul y 0,007 pul, respectivamente. Con la masa 2 aisladamente, las deformaciones estáticas en 1 y 2 son 0,007 pul y 0,010 pul, respectivamente. Calcular la primera velocidad crítica para el sistema de dos masas. Resp. 1400 rpm (Dunkerley), 1480 rpm (Rayleigh-Ritz)
21. Para el eje descrito en el problema 20 determinar la primera y la segunda velocidad crítica usando la ecuación de frecuencias. (Nota: $m_1 = m_2 = m$, $a_{11} = 0,008/mg$, $a_{21} = 0,007/mg = a_{12}$, $a_{22} = 0,010/mg$.) Resp. 1480 rpm, 4280 rpm
22. Determinar la primera y la segunda velocidad crítica del eje de acero mostrado en la figura 8-19. Resp. 340 rad/seg, 660 rad/seg

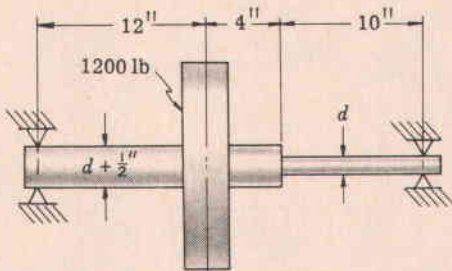


Fig. 8-18

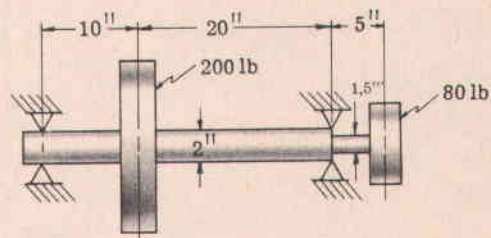


Fig. 8-19

23. Calcular la primera velocidad crítica del eje de acero de la figura 8-19 por medio de la ecuación de Dunkerley. Resp. 303 rad/seg
24. Para el eje mostrado en la figura 8-20 se ha determinado que las deformaciones estáticas debidas a la flexión son $\delta_1 = 0,0009$ pul, $\delta_2 = 0,0030$ pul, $\delta_3 = 0,0013$ pul. Los cojinetes de soporte tienen una flexibilidad en la dirección vertical equivalente a una constante de elasticidad $k = 200.000$ lb/pul. En la dirección horizontal los soportes son esencialmente rígidos. Estudiar las velocidades críticas en el primer modo.
Resp. Deberían esperarse dos velocidades críticas en el primer modo, una en la cual las deformaciones verticales fueran grandes y otra en la cual las deformaciones horizontales fueran grandes. Con base en las ecuaciones de Rayleigh-Ritz, nuestros cálculos para ellas son 362 rad/seg y 428 rad/seg respectivamente.

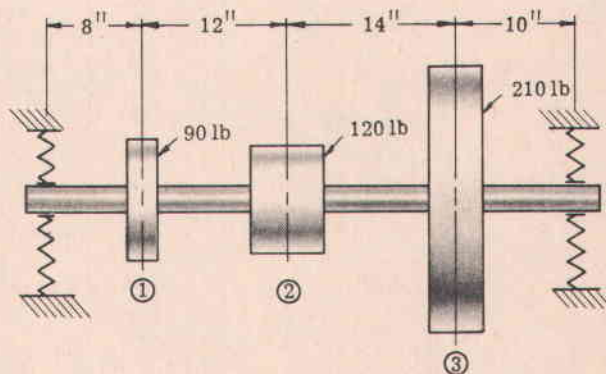


Fig. 8-20

25. (a) Determinar la primera velocidad crítica del eje de acero mostrado en la figura 8-21.
Sugerencia: Considerar la masa de cada porción de 10 pul de eje como si estuviera concentrada en su centro de gravedad.
(Emplear la ecuación de Rayleigh-Ritz para su cálculo.)

- (b) Para el mismo eje hacer una aproximación más imperfecta. Tratarlo como un sistema de tres masas, tomando la masa de cada una de las secciones de 3 pul de diámetro como concentrada en el centro de gravedad de la sección y la masa de 6 pul de diámetro como concentrada en el centro de esta sección.

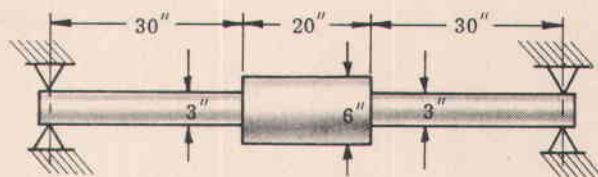


Fig. 8-21

Resp. (a) 778 rad/seg (empleando $E = 30 \times 10^6$ psi y un peso específico del acero = 0,283 lb/pul³)

- (b) Igual a (a) dentro de la aproximación de la regla de cálculo.

Discusión: Realmente debería esperarse que (b) diera un resultado ligeramente menor que (a), pero la diferencia fue menor que la atribuible a la lectura de la regla de cálculo. Esto ilustra la afirmación hecha anteriormente de que las masas distribuidas pueden remplazarse aproximadamente por un sistema de masas concentradas para el propósito de calcular las velocidades críticas en el primer modo. Para calcular velocidades críticas más altas es necesario refinar las aproximaciones.

26. Para un ejemplo de diseño de ejes en el cual uno de los criterios es la velocidad crítica, véase el problema 12 del capítulo 9.

27. Calcular la velocidad crítica del compresor de aire mostrado en la figura 8-22. Cada uno de los cuatro rotores pesa 80 lb (incluyendo $\frac{1}{4}$ del peso del eje). El eje de acero es hueco con D. E. de 6 pul y D. I. de 5,5 pul. Despreciar el efecto de producción de rigidez de los rotores.

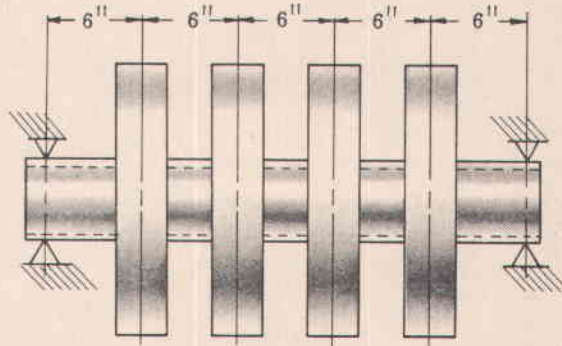


Fig. 8-22

Discusión: El eje es relativamente rígido (gran I) pero de área transversal pequeña. La longitud del eje es apenas 5 veces el D. E. Estas condiciones hacen que tenga importancia en los cálculos la deformación por corte.

Resp. (a) Ignorando la deformación por corte y usando la ecuación de Rayleigh-Ritz, $\omega_c = 1430$ rad/seg.

- (b) Incluyendo la deformación por corte adicionada a la deformación por flexión y usando la ecuación de Rayleigh-Ritz, $\omega_c = 1260$ rad/seg.

Capítulo 9

Trasmisión de potencia mediante ejes

EL DISEÑO DE EJES consiste básicamente en la determinación del diámetro correcto del eje para asegurar rigidez y resistencia satisfactorias cuando el eje transmite potencia en diferentes condiciones de carga y operación. Generalmente los ejes tienen sección transversal circular y pueden ser huecos o macizos.

EL DISEÑO DE EJES DE MATERIALES DUCTILES, basado en su resistencia, está controlado por la teoría del esfuerzo cortante máximo. La presentación siguiente se basa en ejes de material dúctil y sección transversal circular. Los ejes de materiales frágiles deben diseñarse en base a la teoría del esfuerzo normal máximo. Generalmente los ejes están sometidos a torsión, flexión y cargas axiales. Para cargas torsionales, el esfuerzo de torsión τ_{xy} es

$$\tau_{xy} = M_t r / J = 16 M_t / \pi d^3 \quad \text{para ejes macizos}$$

$$\tau_{xy} = 16 M_t d_o / \pi (d_o^4 - d_i^4) \quad \text{para ejes huecos}$$

Para cargas de flexión, el esfuerzo de flexión s_b (tracción o compresión) es

$$s_b = M_b r / I = 32 M_b / \pi d^3 \quad \text{para ejes macizos}$$

$$s_b = 32 M_b d_o / \pi (d_o^4 - d_i^4) \quad \text{para ejes huecos}$$

Para cargas axiales, el esfuerzo de compresión o tracción s_a es

$$s_a = 4 F_a / \pi d^2 \quad \text{para ejes macizos}$$

$$s_a = 4 F_a / \pi (d_o^2 - d_i^2) \quad \text{para ejes huecos}$$

La ecuación del código ASME para un eje hueco combina torsión, flexión y carga axial, aplicando la ecuación del esfuerzo cortante máximo modificada mediante la introducción de factores de choque, fatiga y columna:

$$d_o^3 = \frac{16}{\pi s_s (1 - K^4)} \sqrt{\left[K_b M_b + \frac{\alpha F_a d_o (1 + K^2)}{8} \right]^2 + (K_t M_t)^2}$$

Para un eje macizo con carga axial pequeña o nula, se reduce a

$$d^3 = \frac{16}{\pi s_s} \sqrt{(K_b M_b)^2 + (K_t M_t)^2}$$

en la cual, en la sección en consideración,

τ_{xy} = esfuerzo cortante de torsión, psi

M_t = momento de torsión, lb-pul

M_b = momento de flexión, lb-pul

d_o = diámetro exterior del eje, pul

d_i = diámetro interior del eje, pul

F_a = carga axial, lb

$$K = d_i / d_o$$

K_b = factor combinado de choque y fatiga, aplicado al momento flector

K_t = factor combinado de choque y fatiga, aplicado al momento de torsión

Para ejes estacionarios:

	K_b	K_t
Carga aplicada gradualmente	1,0	1,0
Carga aplicada repentinamente	1,5 a 2,0	1,5 a 2,0

Para ejes en rotación:

Carga aplicada gradualmente	1,5	1,0
Carga repentina (choque menor)	1,5 a 2,0	1,0 a 1,5
Carga repentina (choque fuerte)	2,0 a 3,0	1,5 a 3,0

s_b = esfuerzo de flexión (tensión o compresión), psi

s_a = esfuerzo axial (tensión o compresión), psi

El código ASME especifica para ejes de acero comercial

s_s (permisible) = 8000 psi para ejes sin cuñero

s_s (permisible) = 6000 psi para ejes con cuñero

El código ASME especifica para ejes de acero comprados con especificaciones definidas

s_s (permisible) = 30% del límite elástico sin sobrepasar del 18% del esfuerzo último en tracción, para ejes sin cuñero. Estos valores deben reducirse en 25% si existen cuñeros.

α = factor de acción de columna. El factor de acción de columna es la unidad para cargas de tracción. Para compresión, α puede calcularse mediante:

$$\alpha = \frac{1}{1 - 0,0044 (L/k)} \quad \text{para } L/K < 115$$

$$\alpha = \frac{s_y}{\pi^2 n E} \left(\frac{L}{k} \right)^2 \quad \text{para } L/K > 115$$

n = 1 para extremos articulados

n = 2,25 para extremos fijos

n = 1,6 para extremos restringidos parcialmente, como en el caso de cojinetes

k = radio de giro = $\sqrt{I/A}$ pul

I = momento rectangular de inercia, pul⁴

A = área de la sección transversal del eje, pul²

s_y = esfuerzo de fluencia en compresión, psi

EL DISEÑO DE EJES POR RIGIDEZ TORSIONAL se basa en el ángulo de giro permisible. La cantidad permisible de giro depende de la aplicación particular, y varía desde 0,08 grados por pie para ejes de máquinas herramientas hasta 1,0 grados por pie para ejes de transmisión.

$$\theta = 584 M_t L / G (d_o^4 - d_i^4) \quad \text{para un eje circular hueco}$$

$$\theta = 584 M_t L / G d^4 \quad \text{para un eje circular macizo}$$

donde

θ = ángulo de giro, grados

L = longitud del eje, pul

M_t = momento de torsión, lb-pul

G = módulo de elasticidad en torsión, psi

d = diámetro del eje, pul

EL DISEÑO DE EJES POR RIGIDEZ LATERAL se basa en la deformación lateral permisible para una operación apropiada de los cojinetes, un comportamiento de precisión en máquinas herramientas, una acción satisfactoria de los engranajes, alineamiento del eje y otros requisitos similares. La deformación puede determinarse mediante dos integraciones sucesivas de

$$d^2y/dx^2 = M_b/EI$$

donde

M_b = momento de flexión, lb-pul

E = módulo de elasticidad, psi

I = momento rectangular de inercia, pul⁴

Si el eje tiene sección transversal variable, resulta práctico resolver gráficamente las expresiones anteriores. (Véase capítulo 5.)

LAS DIMENSIONES NORMALES DE LOS EJES han sido normalizadas tentativamente por el American Engineering Standards Committee en la siguiente forma:

Diámetro de ejes para transmisión, en pulgadas:

15/16, 1 3/16, 1 7/16, 1 11/16, 1 15/16, 2 3/16, 2 7/16, 2 15/16, 3 7/16, 3 15/16, 4 7/16, 4 15/16, 5 7/16, y 5 15/16.

Diámetro de ejes para maquinaria, en pulgadas:

1/2 pul a 2 1/2 pul,
de 1/16 pul en 1/16 pul,
2 5/8 pul a 4 pul,
de 1/8 pul en 1/8 pul,
4 1/4 pul a 6 pul,
de 1/4 pul en 1/4 pul,

}

Las longitudes normalizadas de fabricación son 16, 20 y 24 pies.

LOS MOMENTOS DE TORSION Y DE FLEXION son los factores principales que influyen en el diseño de ejes. Uno de los primeros pasos en el diseño de ejes es hacer diagrama de momentos flectores del eje cargado o el diagrama combinado de momentos flectores, si las cargas que actúan sobre el eje están en más de un plano axial. Los puntos de esfuerzo crítico de flexión pueden determinarse del diagrama de momentos flectores.

El momento de torsión que actúa sobre el eje puede determinarse de

$$M_t = \frac{hp \times 33.000 \times 12}{2\pi \text{ rpm}} = \frac{63.000 \times hp}{\text{rpm}} \quad \text{lb-pul}$$

Para una transmisión por correas, el momento de torsión es

$$M_t = (T_1 - T_2) R \quad \text{lb-pul}$$

donde

T_1 = tensión en el ramal tirante de la correa, lb

T_2 = tensión en el ramal flojo de la correa, lb

R = radio de la polea, pul

Para una transmisión por engranajes, el momento de torsión es

$$M_t = F_t R$$

donde

F_t = fuerza tangencial en el radio primitivo, lb

R = radio primitivo, pul

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un eje de acero comercial de 3 pies de longitud debe transmitir 50 hp a 3600 rpm por medio de un acoplamiento flexible desde un motor de corriente alterna hasta un generador de corriente continua. Determinar las dimensiones que debe tener el eje.

Solución:

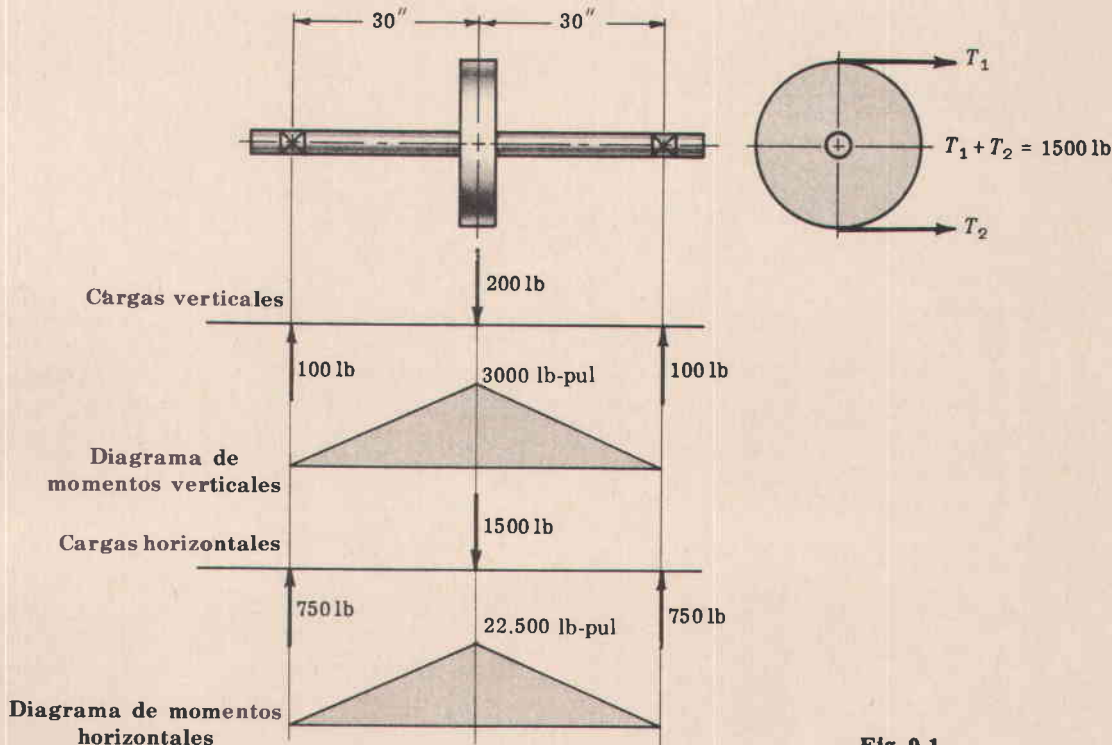
En este caso el eje solamente tiene esfuerzos de torsión y K_t es igual a la unidad, suponiendo que la carga se aplica gradualmente.

s_s (permisible) = 6000 psi de acuerdo con el código ASME para un eje de acero comercial con cuñero.

$$s_s \text{ (permisible)} = 16 M_t / \pi d^3$$

$$6000 = 16 \left(\frac{50 \times 63.000}{3600} \right) \left(\frac{1}{\pi d^3} \right) \text{ o } d = 0,905 \text{ pul. Usar } 15/16 \text{ pul, que es el diámetro normalizado más cercano.}$$

2. Una sección de eje comercial de 5 pies de largo entre cojinetes, carga una polea de 200 lb en su punto medio, como muestra la figura 9-1. La polea está acuada al eje y recibe 20 hp a 150 rpm, los cuales son transmitidos a un acoplamiento flexible colocado justamente afuera del cojinete derecho. La correa conductora es horizontal y la suma de las tensiones en ella es 1500 lb. Suponer $K_t = K_b = 1,5$. Calcular el diámetro necesario del eje y determinar el ángulo de giro entre los cojinetes. $G = 12 \times 10^6$ psi.

**Fig. 9-1****Solución:**

Primero, es necesario determinar los momentos máximos de flexión y de torsión que actúan sobre el eje.

$$M_b(\text{max}) = \sqrt{3000^2 + 22.500^2} = 22.700 \text{ lb-pul} \quad M_t(\text{max}) = 20(63.000)/150 = 8400 \text{ lb-pul}$$

s_s (permisible) = 6000 psi para un eje con cuñero, según ASME. Entonces,

$$d^3 = \frac{16}{\pi s_s} \sqrt{(K_b M_b)^2 + (K_t M_t)^2} = \frac{16}{\pi 6000} \sqrt{(1,5 \times 22.700)^2 + (1,5 \times 8400)^2}$$

de la cual $d = 3,12$ pul. Usar un eje de $3 \frac{1}{8}$ pul que es el diámetro normalizado más cercano.

$$\theta = \frac{584 M_t L}{G d^4} = \frac{584 \times 8400 \times 30}{(12 \times 10^6) (3,125)^4} = 0,128^\circ \text{ giro}$$

3. La figura 9-2 muestra las fuerzas que actúan sobre un eje de acero que soporta dos engranajes. Los engranajes están acunados en B y D. A y C son los centros de los cojinetes. El eje transmite 9 hp a 650 rpm. De acuerdo con el código ASME el esfuerzo permisible para una sección sin cuñero es de 12.000 psi. $K_b = K_t = 1,5$.
- (a) Hacer diagramas de momentos horizontales, verticales y resultantes. Indicar los valores en los puntos de cambio.
- (b) Determinar el diámetro necesario para el eje, aproximando hasta 0,01". Indicar la sección crítica.

Solución:

En el cojinete C:

$$M_t(\max) = 9(63.000)/650 = 873 \text{ lb-pul}$$

$$M_b(\max) = 1632 \text{ lb-pul en C}$$

$$d^3 = \frac{16}{\pi(12.000)} \sqrt{(1,5 \times 1632)^2 + (1,5 \times 873)^2}$$

$$d = 1,07 \text{ pul}$$

Justamente a la derecha del engranaje B:

$$M_t(\max) = 873 \text{ lb-pul, } M_b(\max) = 1132 \text{ lb-pul}$$

$$d^3 = \frac{16}{\pi(0,75)(12.000)} \sqrt{(1,5 \times 1132)^2 + (1,5 \times 873)^2} \quad \text{y } d = 1,07 \text{ pul}$$

Nota: A pesar de que el momento de flexión en el engranaje B es menor que en el cojinete C, se requiere el mismo tamaño de eje debido a la presencia del cuñero en B.

4. Una polea de 24 pul de diámetro conducida por una correa horizontal transmite potencia mediante un eje sólido a un piñón de 10 pul de diámetro, el cual a su vez conduce un engranaje. La polea pesa 300 lb, con el fin de proporcionar algún efecto de volante. La disposición de los elementos, las tensiones en la correa, y las componentes de las reacciones del engranaje sobre el piñón se muestran en la figura 9-3. Determinar el diámetro necesario del eje, utilizando el valor del esfuerzo dado en el código ASME para ejes comerciales y usando factores de choque y fatiga: $K_b = 2$ y $K_t = 1,5$.

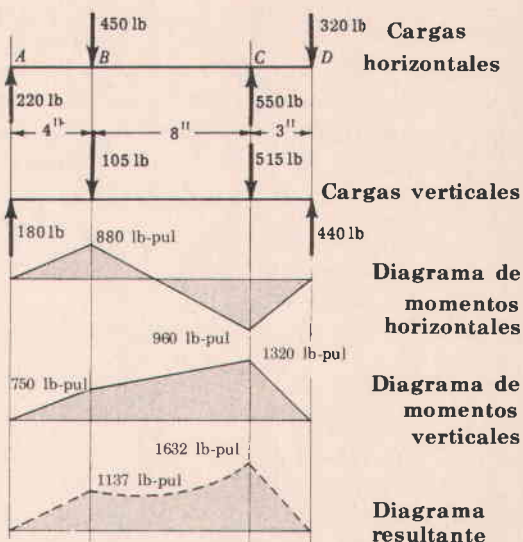
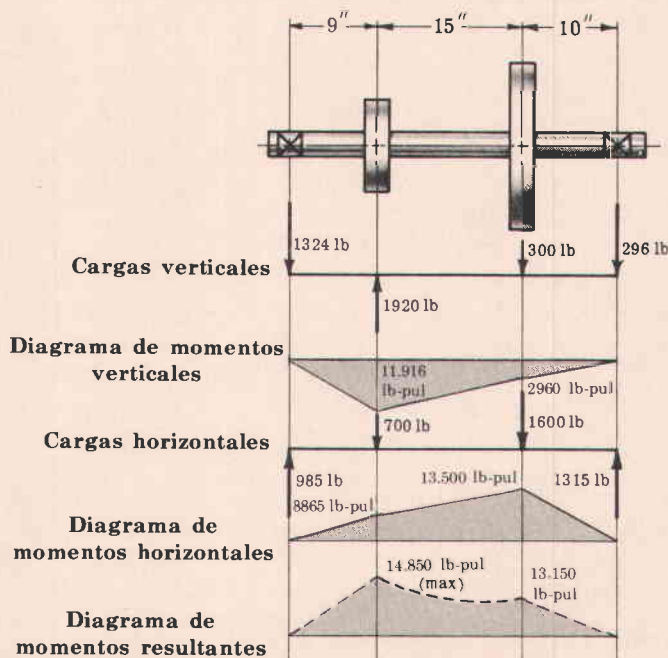
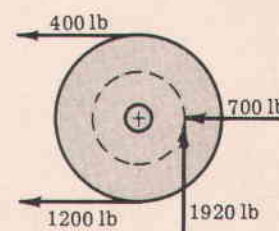


Fig. 9-2



Solución:

$$M_t(\max) = (T_1 - T_2) 12 = (1200 - 400) 12 = 9600 \text{ lb-pul}$$

$$M_b(\max) = \sqrt{(11.916)^2 + (8865)^2} = 14.850 \text{ lb-pul}$$

$$s_s(\text{permisible}) = 6000 \text{ psi código ASME}$$

$$d^3 = \frac{16}{\pi 6000} \sqrt{(2 \times 14.850)^2 + (1,5 \times 9600)^2} = 28$$

$$d = 3,04 \text{ pul. Usar 3 pul de diámetro.}$$

Fig. 9-3

5. Un eje de una máquina gira a 600 rpm y está soportado por cojinetes separados entre sí 30 pul, como muestra la figura 9-4. Veinte hp se suministran al eje mediante una polea de 18 pul localizada 10 pul a la derecha del cojinete derecho. La potencia se transmite desde el eje mediante un engranaje cilíndrico de 8 pul localizado 10 pul a la derecha del cojinete izquierdo. La correa conductora forma un ángulo de 60° con la horizontal. La polea pesa 200 lb para proporcionar algún efecto de volante. La relación de las tensiones en la correa es 3:1. El engranaje tiene dientes a 20° y se acopla con otro engranaje localizado directamente sobre el eje. Si el material seleccionado para el eje tiene una resistencia última de 70.000 psi y un límite de fluencia de 46.000 psi, determinar el diámetro necesario del eje de acuerdo con el código ASME y usando $K_b = 1,5$ y $K_t = 1,0$.

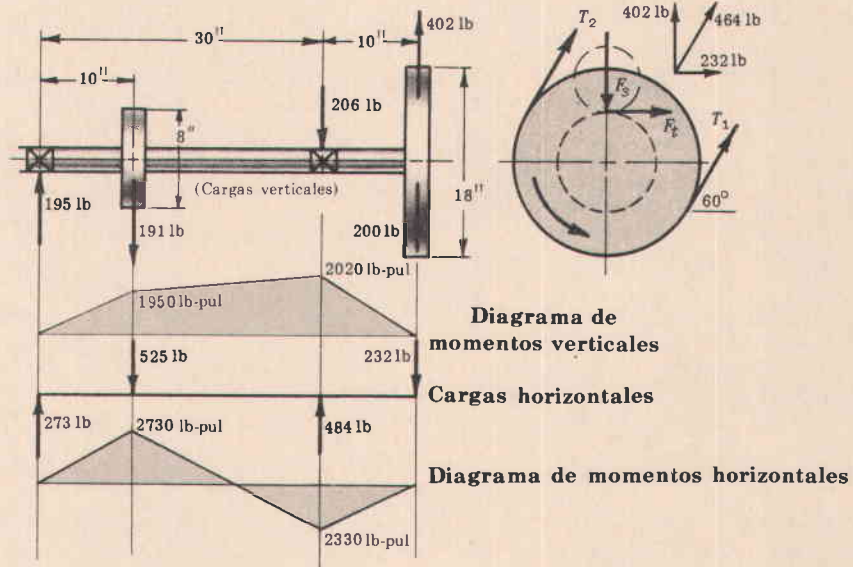


Fig. 9-4

Solución:

$$M_t = 20(63.000)/600 = 2100 \text{ lb-pul}$$

$$\text{De } (T_1 - T_2)9 = 2100 \text{ y } 3T_1 = T_2 \text{ tenemos}$$

$$T_2 = 116 \text{ lb}, \quad T_1 = 348 \text{ lb}, \quad (T_1 + T_2) = 464 \text{ lb}$$

$$4F_t = 2100, \quad F_t = 525 \text{ lb}, \quad F_s = 525 \tan 20^\circ = 191 \text{ lb}$$

$$18\% \times 70.000 = 12.600 \text{ psi}, \quad 30\% \times 46.000 = 13.800 \text{ psi}, \quad s_s (\text{permisible}) = 75\% \times 12.600 = 9450 \text{ psi}.$$

$$M_b(\text{max}) = \sqrt{1950^2 + 2730^2} = 3360 \text{ lb-pul}$$

$$d^3 = \frac{16}{\pi 9450} \sqrt{(3360 \times 1,5)^2 + (2100)^2} \text{ o } d = 1,44 \text{ pul. Usar un eje de } 1\frac{1}{2} \text{ pul.}$$

6. Un eje hueco de 20 pul de diámetro exterior y 12 pul de diámetro interior está soportado por dos cojinetes separados 20 pies. El eje es conducido por medio de un acoplamiento flexible situado en un extremo y mueve una hélice de barco a 100 rpm. El empuje máximo sobre la hélice es 120.000 lb cuando el eje está transmitiendo 8000 hp. El eje pesa 15.000 lb. Determinar el esfuerzo cortante máximo en el eje por medio de la ecuación del código ASME considerando el peso del eje y el efecto de columna. Suponer $K_b = 1,5$ y $K_t = 1,0$.

Solución:

$$M_b(\text{max}) = WL/8 = (15.000)(240)/8 = 450.000 \text{ lb-pul}$$

$$M_t(\text{max}) = (8000 \times 63.000)/100 = 5.040.000 \text{ lb-pul}$$

$$I = \pi(20^4 - 12^4)/64 = 6840 \text{ pul}^4, \quad A = \pi(20^2 - 12^2)/4 = 201 \text{ pul}^2,$$

$$k = \sqrt{I/A} = \sqrt{6840/201} = 5,84 \text{ pul.} \quad L/k = 240/5,84 = 41,2, \text{ que es } < 115. \text{ Entonces}$$

$$\alpha = \frac{1}{1 - 0,0044(240/5,84)} = 1,222$$

$$d_o = 20 \text{ pul}, \quad d_i = 12 \text{ pul}, \quad \text{y } K = d_i/d_o = 12/20 = 0,6.$$

$$s_s = \frac{16}{\pi d_o^3 (1 - K^4)} \sqrt{\left[K_b M_b + \frac{\alpha F_2 d_o (1 + K^2)}{8} \right]^2 + (K_t M_t)^2}$$

$$= \frac{16}{\pi 20^3 (1 - 0,6^4)} \sqrt{\left[(1,5 \times 450.000) + \frac{1,222 \times 120.000 \times 20 (1 + 0,6^2)}{8} \right]^2 + (1 \times 5.040.000)^2} = 3800 \text{ psi}$$

7. Un eje de 48 pul de largo recibe un momento de torsión de 10.000 lb-pul de una polea localizada en el centro del eje, como se muestra en la figura 9-5. Un engranaje en el extremo izquierdo del eje transmite 6000 lb-pul de este momento, mientras el resto se transmite mediante un engranaje localizado en el extremo derecho del eje. Calcular la deformación angular del extremo izquierdo del eje con respecto al extremo derecho si el diámetro del eje es 2 pul y está hecho de acero. Despreciar el efecto de los cuñeros en el cálculo.

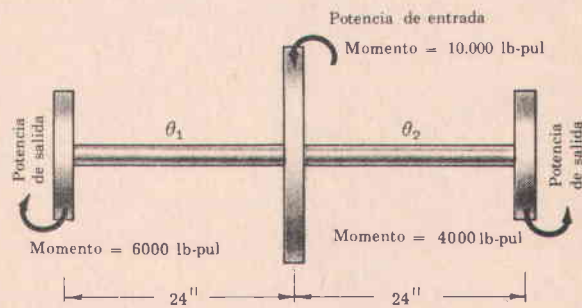


Fig. 9-5

Solución:

La deformación angular de un extremo del eje con respecto al otro es la diferencia de la deformación angular de los extremos con respecto al centro.

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{584(6000)(24)}{Gd^4} - \frac{584(4000)(24)}{Gd^4} = \frac{584(24)(6000 - 4000)}{(12 \times 10^8)(2^4)} = 0,146^\circ$$

8. Se suministran treinta hp a una rueda dentada de 30 pul por medio de una cadena, como se muestra en la figura 9-6. En la polea de 24 pul se sacan 20 hp, y en la manivela de 8 pul se sacan 10 hp. El peso de la polea es 1000 lb. La fuerza en el lado tenso de la cadena se representa por T_C . La tensión en el lado flojo es tan pequeña que puede despreciarse. La relación de las tensiones en la correa es 4:1. El eje rota a 300 rpm. Las cargas se aplican con un choque moderado, $K_b = 2$ y $K_t = 1,5$. Determinar el tamaño necesario del eje si el esfuerzo permisible es $s_s = 8000$ psi. Se supone que la rueda dentada y la polea están acunadas al eje.

Solución:

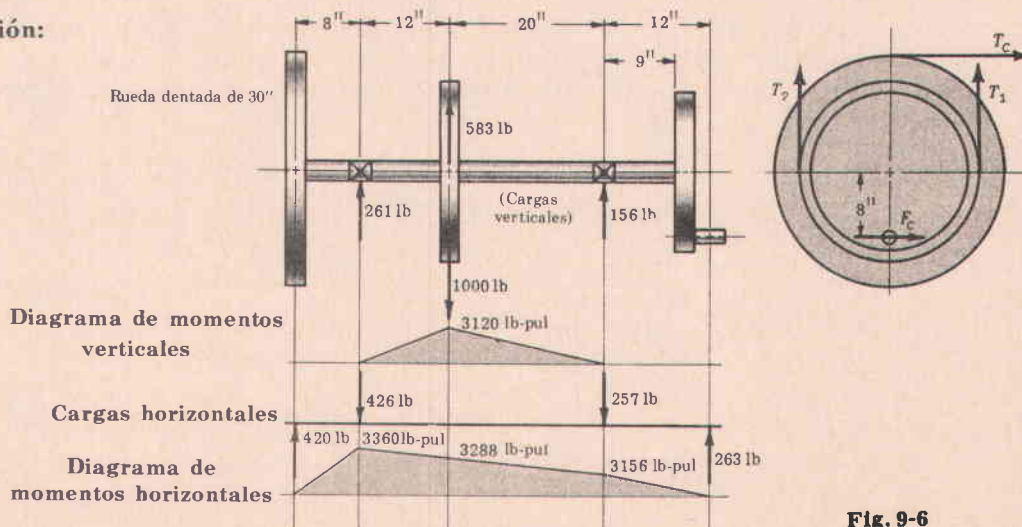


Fig. 9-6

De $(T_1 - T_2)12 = 4200$ y $T_1 = 4T_2$ tenemos que $T_1 = 466$ lb, $T_2 = 117$ lb y $(T_1 + T_2) = 583$ lb.
 $F_C = 2100/8 = 263$ lb.

$M_t(\text{rueda}) = 63.000 \times 30/300 = 6300$ lb-pul, $M_t(\text{polea}) = 2M_t(\text{manivela}) = 4200$ lb-pul,
 $M_t(\text{manivela}) = 2100$ lb-pul.

$M_b(\text{max}) = \sqrt{3288^2 + 3120^2} = 4490$ lb-pul en la polea, $M_t(\text{max}) = 6300$ lb-pul en la polea.

$$d^3 = \frac{16}{\pi s_s (0,75)} \sqrt{(K_b M_b)^2 + (K_t M_t)^2} = \frac{16}{\pi (8000) (0,75)} \sqrt{(2 \times 4490)^2 + (1,5 \times 6300)^2} = 11,06$$

de la cual $d = 2,23$ pul. Usar un eje de $2\frac{3}{16}$ pul.

9. Determinar el diámetro por debajo del cual el ángulo de torsión de un eje, en vez del esfuerzo máximo, es el factor determinante al diseñar un eje sólido en torsión. El esfuerzo cortante permisible es 8000 psi y la máxima torsión permisible es 1/12 grado por pie. (Considerar un eje sin cuñas.)
 $G = 12 \times 10^6$ psi.

Solución:

$$s_s(\text{permisible}) = 16 M_t / \pi d^3, \quad \theta(\text{permisible}) = 584 M_t L / G d^4.$$

$M_t = \theta d^4 G / 584 L$ momento que puede transmitirse con la torsión permisible.

$M_t = s_s \pi d^3 / 16$ momento que puede transmitirse con el esfuerzo permisible.

$$\text{Entonces, } \frac{\theta d^4 G}{584 L} = \frac{s_s \pi d^3}{16} \quad \text{o} \quad \frac{(1/12)(d^4)(12 \times 10^6)}{584(12)} = \frac{8000 \pi d^3}{16}, \text{ de la cual } d = 11,0''.$$

10. Los ejes AB y CD están conectados por engranajes rectos, como muestra la figura 9-7. Un par aplicado en A esfuerza el eje AB a 8000 psi. Determinar el diámetro del eje CD si allí el esfuerzo cortante no debe sobrepasar de 8000 psi. Despreciar cuñeros y cualquier acción de flexión.
 $G = 12 \times 10^6$ psi.

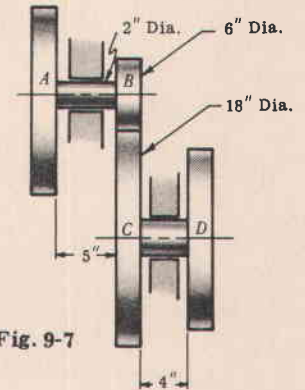


Fig. 9-7

Solución:

M_t sobre el eje CD es 3 veces M_t sobre el eje AB .

Sea d_1 el diámetro del eje AB y d_2 el del eje CD . Entonces

$$s_s \pi d_1^3 / 16 = s_s \pi d_2^3 / (16 \times 3)$$

como $d_1 = 2$ pul, el diámetro requerido es $d_2 = 2,88$ pul.

11. Para poder reducir el peso de los elementos de control y potencia usados en cierto tipo de aeroplano, se planea usar un eje hueco para la transmisión de potencia. Desarrollar una expresión para determinar el porcentaje de ahorro en peso que puede obtenerse usando un eje hueco en vez de un eje macizo de igual resistencia, para tal aplicación.

Solución:

Para un eje macizo sometido a cargas de flexión y de torsión, el esfuerzo cortante es

$$s_s = \frac{16}{\pi d^3} \sqrt{M_b^2 + M_t^2}$$

Para un eje hueco sometido a las mismas cargas de flexión y torsión anteriores, el esfuerzo cortante es

$$s_s = \frac{16 d_o}{\pi (d_o^4 - d_i^4)} \sqrt{M_b^2 + M_t^2}$$

donde M_b = momento de flexión en la sección crítica, lb-pul d_o = diámetro exterior del eje hueco, pul

M_t = momento de torsión en la sección crítica, lb-pul d_i = diámetro interior del eje hueco, pul

Como se supone que el eje hueco tendrá la misma resistencia que el eje macizo, pueden igualarse los miembros derechos de las dos ecuaciones anteriores, con lo cual se obtiene

$$\frac{16}{\pi d^3} = \frac{16 d_o}{\pi (d_o^4 - d_i^4)} \quad \text{de la cual} \quad (1) \quad 1 - \left(\frac{d}{d_o}\right)^3 = \left(\frac{d_i}{d_o}\right)^4$$

Desde el punto de vista del peso, el eje hueco será más liviano que el eje macizo en un factor $(1 - N/100)$, donde N es el porcentaje de ahorro en peso obtenido por el empleo del eje hueco. Entonces

$$\frac{\pi}{4} (d_o^2 - d_i^2) L \lambda = \left(1 - \frac{N}{100}\right) \frac{\pi}{4} d^2 L \lambda \quad \text{o} \quad (2) \quad (d_o^2 - d_i^2) = \left(1 - \frac{N}{100}\right) d^2$$

donde L = longitud del eje, pul

λ = peso específico del material del eje, lb/pul³

Remplazando el valor de d_i de (1) en (2) y resolviendo para N , se obtiene

$$N = \left[1 - (d_o/d)^2 + \sqrt{(d_o/d)^4 - d_o/d} \right] 100$$

12. El eje mostrado en la figura 9-8 (a) debe diseñarse desde el punto de vista de su resistencia, velocidad crítica y rigidez. La potencia se suministra a la polea P por medio de una correa plana y se toma del eje a través del engranaje cilíndrico G . El eje está soportado por dos cojinetes de bolas de surco profundo.

Se ha establecido la siguiente información:
Potencia = 10 hp (condiciones estacionarias de carga)

Velocidad del eje = 900 rpm

El eje será hecho de AISI 1035 laminado en caliente ($s_u = 85.000$ psi y $s_y = 55.000$ psi)

Diámetro de la polea = 10 pul

Diámetro primitivo del engranaje = 10 pul

Peso de la polea = 30 lb

Peso del engranaje = 30 lb

Relación de tensiones en la correa $T_1/T_2 = 2,5$

Angulo de presión del engranaje = 20°

La polea y el engranaje están montados con ajustes de presión y cuñas.

Dimensión $A = B = C = 6$ pul

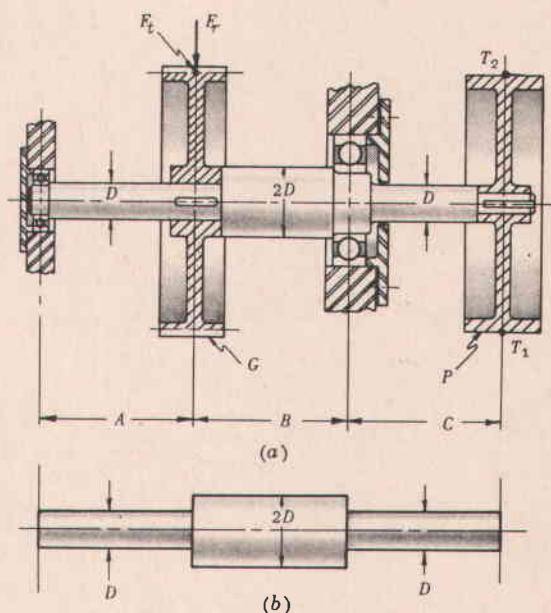


Fig. 9-8

Las fuerzas en la correa son perpendiculares al papel, con T_1 en el ramal tirante y T_2 en el ramal flojo. La fuerza tangencial en el engranaje es F_t y la fuerza separadora es F_r . F_t es perpendicular al papel.

Se han impuesto las siguientes limitaciones:

- La deformación del eje en el engranaje no debe ser superior a 0,001 pul.
- La inclinación del eje a través de los cojinetes no debe exceder de 1° .
- La velocidad de operación del eje no debe ser superior al 60% de la velocidad crítica inferior.

Solución:

Los cubos del engranaje y de la polea contribuyen a la rigidez del eje, lo mismo que el anillo interior de cada cojinete de bolas. Si un cubo es relativamente largo, su efecto es diferente del efecto si el cubo es corto. Para efecto de este problema se considera que la mitad de la longitud de los cubos y de los anillos de los cojinetes es efectiva para producir rigidez en el eje. El efecto de la aleta de la polea y del engranaje puede despreciarse en un análisis de deformaciones. El diseño se hará entonces sobre la base del eje simplificado que muestra la figura 9-8(b). Se determinará primero el diámetro D requerido por resistencia, de acuerdo con el código ASME.

El momento de torsión entre la polea y el engranaje es $M_t = (10)(63.000)/900 = 700 \text{ lb-pul}$

La suma de las tensiones en la correa puede determinarse de

$$(T_1 - T_2)(5) = 700 \text{ y } T_1 = 2,5 T_2$$

de la cual $T_1 = 233,3 \text{ lb}$, $T_2 = 93,3 \text{ lb}$ y $(T_1 + T_2) = 326,6 \text{ lb}$.

Fuerza transmitida $F_t = 700/5 = 140 \text{ lb}$.

Fuerza separadora $F_r = 140 \tan 20^\circ = 51 \text{ lb}$.

De la información anterior pueden combinarse los diagramas de momentos vertical y horizontal para obtener el diagrama de momentos resultantes que muestra la figura 9-9.

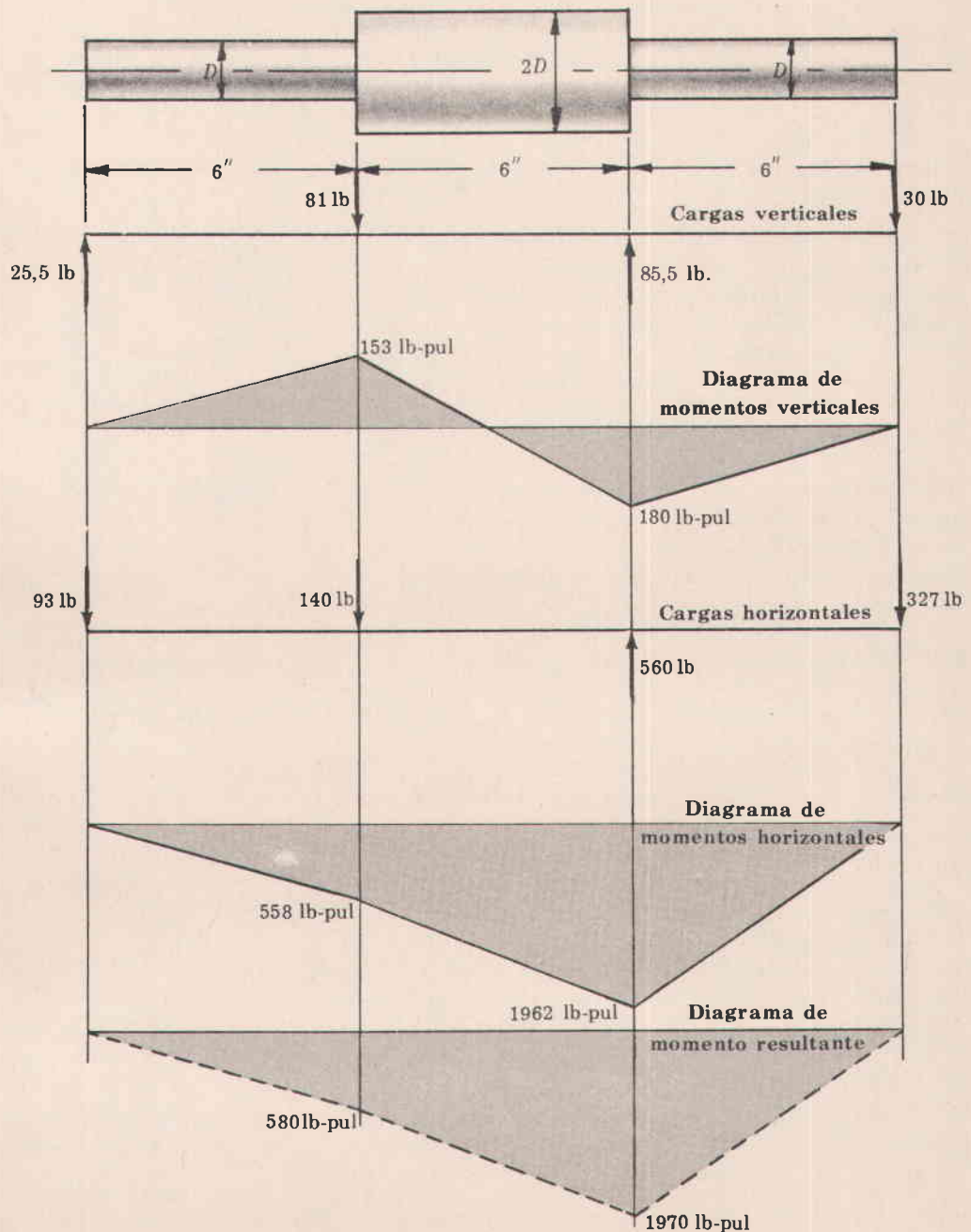


Fig. 9-9

El esfuerzo cortante permisible se determina por: $18\% \times 85.000 = 15.300 \text{ psi}$, $30\% \times 55.000 = 16.500 \text{ psi}$. Usar s (permisible) = 15.300 psi.

Como puede verse en la figura 9-9, la flexión resultante máxima se presenta en el cojinete derecho: $M_b = 1970 \text{ lb-pul}$, $M_t = 700 \text{ lb-pul}$.

Para carga estacionaria, $K_b = 1,5$ y $K_t = 1,0$.

$$D^3 = \frac{16}{\pi(15.300)} \sqrt{(1,5 \times 1970)^2 + (1 \times 700)^2} = 1,01$$

de la cual $D = 1,00 \text{ pul}$, y $2D = 2,00 \text{ pul}$ requeridos por resistencia.

En seguida, para poder determinar el diámetro requerido para operar por debajo del 60% de la primera velocidad crítica, es necesario calcular las deformaciones estáticas en las localizaciones del engranaje y de la polea, debidas únicamente a sus pesos. Es importante notar que para obtener la primera velocidad crítica, el peso de la polea situada en el extremo derecho del eje debe considerarse actuando hacia arriba para satisfacer el primer modo de vibración. El eje con su curva elástica y su diagrama de momentos, para este propósito, se muestra en la figura 9-10. Notar que es oportuno trazar la tangente a la curva elástica en el extremo izquierdo, para emplear el método de los momentos de las áreas al determinar las deformaciones requeridas. En vez de hacer el diagrama M/EI para las deformaciones siguientes, simplemente notamos que el momento de inercia de las secciones $2D$ es 16 veces el momento de inercia de las secciones de diámetro D .

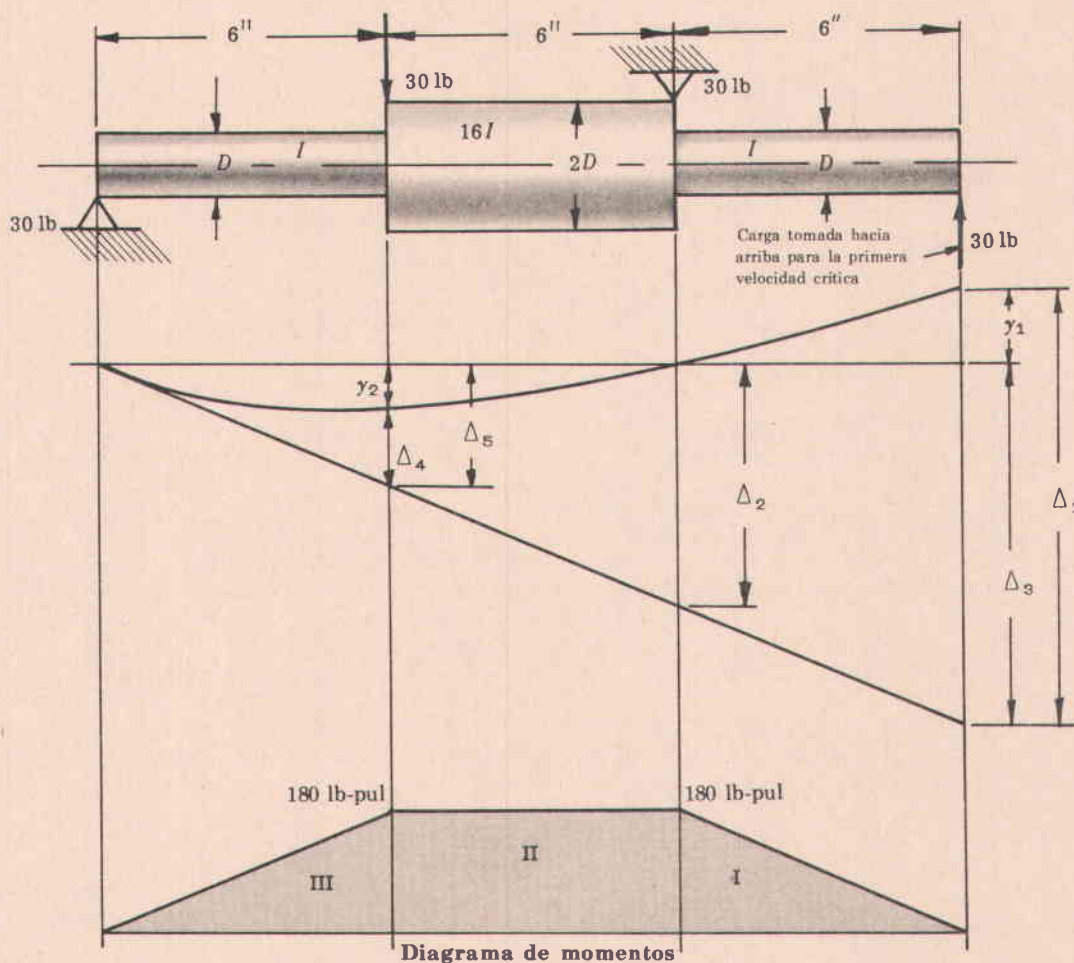


Fig. 9-10

Se halla Δ_1 tomando momentos alrededor del extremo derecho del diagrama de momentos, y llamando I al momento de inercia de las secciones con diámetro D . Usando calculadora y redondeando los resultados finales,

$$\Delta_1 = \frac{(180)(6)(4)}{2EI} + \frac{(180)(6)(9)}{16EI} + \frac{(180)(6)(14)}{2EI} = \frac{10,327,5}{EI}$$

Δ_2 se encuentra tomando momentos alrededor del cojinete derecho:

$$\Delta_2 = \frac{(180)(6)(3)}{16EI} + \frac{(180)(6)(8)}{2EI} = \frac{4522,5}{EI}$$

Δ_3 se encuentra por proporción:

$$\Delta_3 = \frac{18}{12} \Delta_2 = \frac{18}{12} \frac{4522,5}{EI} = \frac{6783,75}{EI}$$

$$y_1 = \frac{10,327,5 - 6783,75}{EI} = \frac{3543,75}{EI}$$

$$\Delta_4 = \frac{(180)(6)(2)}{2EI} = \frac{1080}{EI}$$

$$\Delta_5 = \frac{\Delta_3}{3} = \frac{6783,75}{3EI} = \frac{2261,25}{EI} \quad (\text{por proporción})$$

$$y_2 = \Delta_5 - \Delta_4 = \frac{2261,25 - 1080}{EI} = \frac{1181,25}{EI}$$

Remplazando los valores de y_1 y y_2 en la ecuación de la velocidad crítica (véase el capítulo 8) e igualándola a 1500 rpm, ya que la velocidad de operación de 900 rpm es el 60% de 1500 rpm, tenemos

$$1500 = 187,7 \sqrt{\frac{[(30)(3543,75) + (30)(1181,25)]/(EI)}{[(30)(3543,75)^2 + (30)(1181,25)^2]/(EI)^2}} = 187,7 (0,0184) \sqrt{EI}$$

de la cual $\sqrt{EI} = 434$; y para $E = 30 \times 10^6$, $I = 0,006275 \text{ pul}^4$.

Ahora, $I = \pi D^4/64 = 0,006275 \text{ pul}^4$ da $D = 0,598 \text{ pul}$ para una velocidad crítica de 1500 rpm. Notar que este diámetro es menor que el requerido por resistencia.

Al diseñar por la rigidez requerida será necesario determinar la deformación en el engranaje y la inclinación del eje, tanto en el cojinete izquierdo como en el derecho, debido a las cargas horizontales y verticales. La figura 9-11 se basa en las cargas verticales. La curva elástica se dibuja y se le trazan tangentes en los puntos A y B . Se hace el diagrama de momentos. Para facilitar la toma de momentos, se hace el diagrama de momentos por partes consistentes en cuatro secciones triangulares y una rectangular. El diagrama de momentos se hizo por partes, saliendo primero de la reacción izquierda, pasando por la derecha y luego comenzando en el extremo derecho del eje y regresando a la reacción derecha. Δ_1 se determina tomando los momentos de las secciones I, II, III y IV, respectivamente, con respecto a la reacción derecha, notando que los momentos relacionados con la sección de diámetro $2D$ del eje se dividen por $16EI$ y que el momento relacionado con la sección D se divide por EI . Nótese, además, que el momento de la sección III es negativo.

$$\Delta_1 = \frac{(153)(6)(2)}{(2)(16)EI} + \frac{(153)(6)(3)}{16EI} - \frac{(486)(6)(2)}{(2)(16)EI} + \frac{(153)(6)(8)}{2EI} = \frac{3719,25}{EI}$$

$$\Delta_2 = \frac{(153)(6)(2)}{2EI} = \frac{918}{EI}$$

$$\Delta_3 = \frac{1}{2} \Delta_1 = 1859,625/EI \quad \text{por proporción}$$

$$y_v = \Delta_3 - \Delta_2 = 942/EI \quad (\text{deformación en el engranaje en el plano vertical})$$

$\tan \theta_1 = 1859,625/6EI = 310/EI$ (inclinación en el cojinete izquierdo en el plano vertical)

Δ_4 se determina tomando los momentos de las secciones IV, I, II, y III, respectivamente, con relación al cojinete izquierdo.

$$\Delta_4 = \frac{(153)(6)(4)}{2EI} + \frac{(153)(6)(10)}{(2)(16)EI} + \frac{(153)(6)(9)}{16EI} - \frac{(486)(6)(10)}{(2)(16)EI} = \frac{1728}{EI}$$

$\tan \theta_2 = \Delta_4/12 = 144/EI$ (inclinación en el cojinete derecho en el plano vertical)

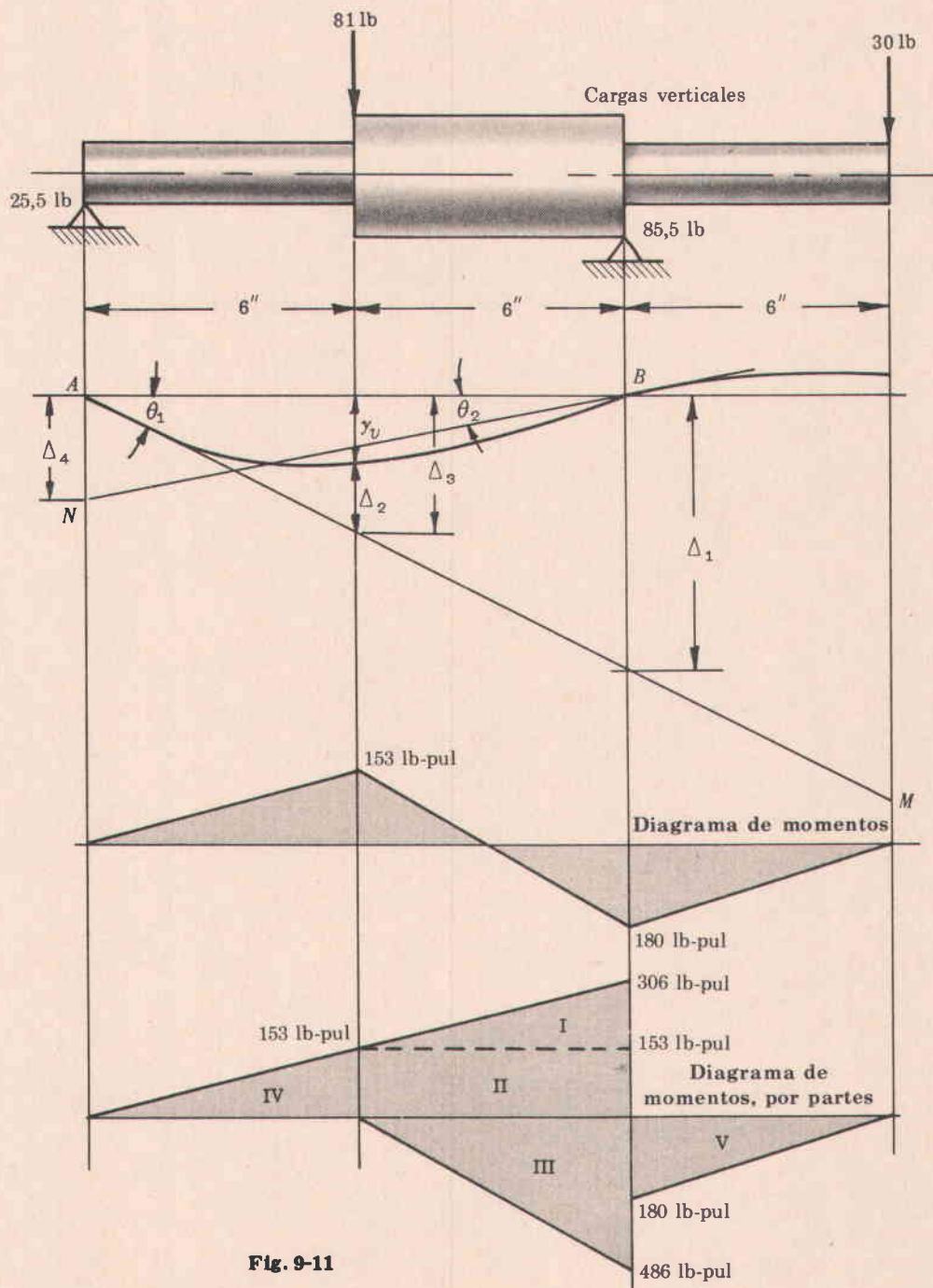


Fig. 9-11

La figura 9-12 se basa en cargas horizontales. Se dibuja la curva elástica y se trazan tangentes en los puntos A y B. Se hace el diagrama de momentos y se divide en las secciones I, II, III y IV. Δ_1 se determina tomando los momentos de las secciones II, III y IV, respectivamente, con respecto al cojinete derecho.

$$\Delta_1 = \frac{(558)(6)(3)}{16EI} + \frac{(1404)(6)(2)}{(2)(16)EI} + \frac{(558)(6)(8)}{2EI} = \frac{14.546,25}{EI}$$

$$\tan \theta_1 = 14.546,25/12EI = 1212/EI \text{ (inclinación en el cojinete izquierdo en el plano horizontal)}$$

$$\Delta_2 = \frac{(558)(6)(4)}{2EI} + \frac{(558)(6)(9)}{16EI} + \frac{(1404)(6)(10)}{(2)(16)EI} = \frac{11.211,75}{EI}$$

$$\tan \theta_2 = 11.211,75/12EI = 934/EI \text{ (inclinación en el cojinete derecho en el plano horizontal)}$$

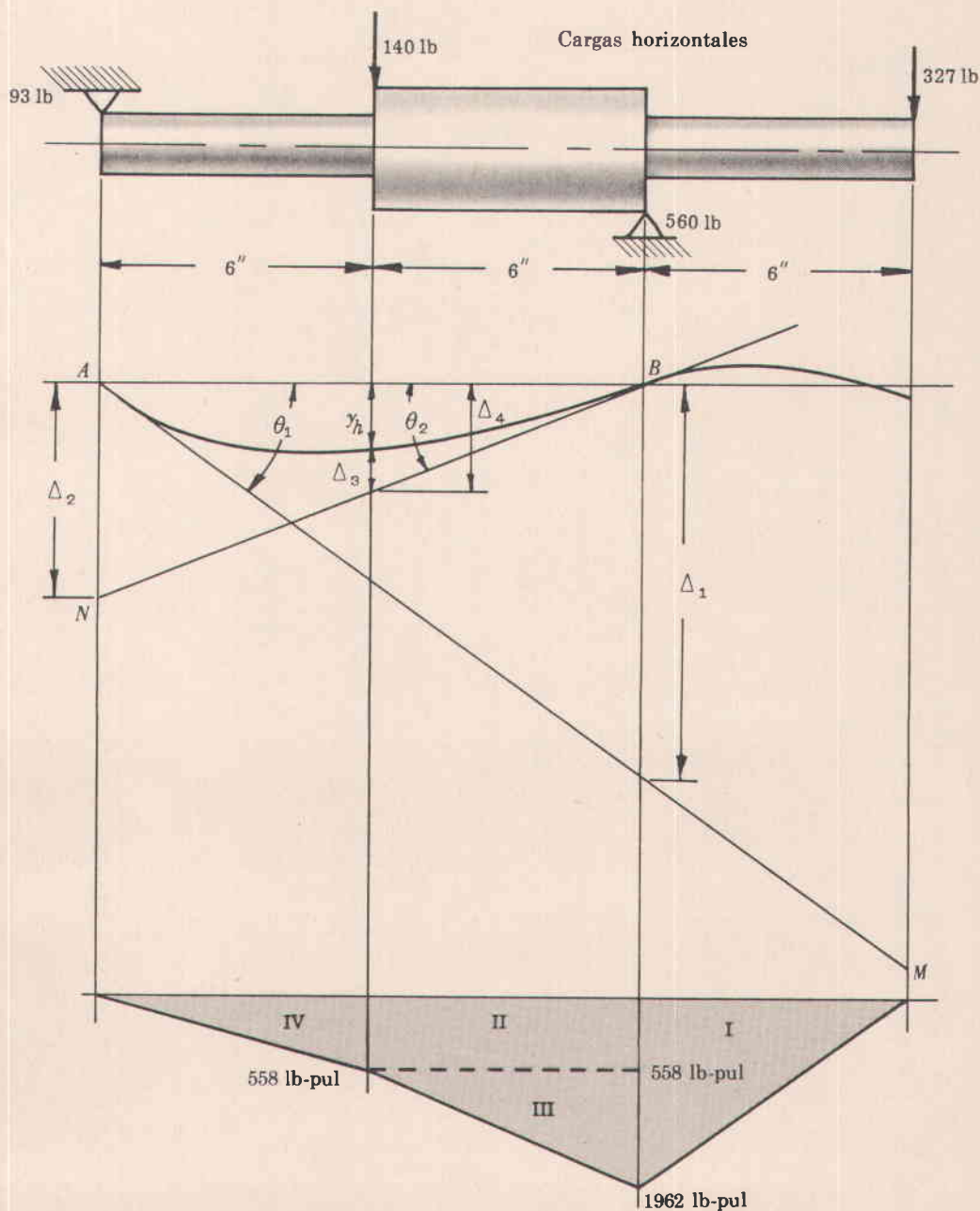


Fig. 9-12

$$\Delta_3 = \frac{(558)(6)(3)}{16EI} + \frac{(1404)(6)(4)}{(2)(16)EI} = \frac{1680,75}{EI}$$

$$\Delta_4 = \frac{11.211,75}{2EI} = \frac{5605,875}{EI} \quad \text{por proporción}$$

$$\gamma_h = \Delta_4 - \Delta_3 = \frac{5605,875 - 1680,75}{EI} = \frac{3925}{EI} \quad \begin{array}{l} \text{(deformación en el engranaje} \\ \text{en el plano horizontal)} \end{array}$$

La deformación resultante en el engranaje es igual a la suma vectorial de las deformaciones en los planos horizontal y vertical.

$$\gamma \text{ (engranaje)} = \frac{1}{EI} \sqrt{942^2 + 3925^2} = \frac{4040}{EI}$$

La deformación en el engranaje está limitada a 0,001 pul. Entonces

$$\frac{4040}{EI} = 0,001 \quad \text{o} \quad I = \frac{4040}{(30 \times 10^6)(0,001)} = 0,1347 \text{ pul}^4, \text{ momento de inercia requerido}$$

$$\frac{\pi D^4}{64} = 0,1347 \quad \text{o} \quad D = 1,285 \text{ pul para limitar la deformación en el engranaje a 0,001 pul.}$$

La inclinación resultante en el cojinete es igual a la suma vectorial de las inclinaciones en los planos horizontal y vertical. En el cojinete izquierdo,

$$\text{inclinación} = \frac{1}{EI} \sqrt{310^2 + 1212^2} = \frac{1250}{EI}, \quad \text{limitada a } \tan 1^\circ$$

Entonces, $\tan 1^\circ = 0,0175 = 1250/EI$, de la cual

$$I = 0,00238 \text{ pul}^4 \text{ y } D = 0,47 \text{ pul requeridas en el cojinete izquierdo.}$$

En el cojinete derecho,

$$\text{inclinación} = \frac{1}{EI} \sqrt{144^2 + 934^2} = \frac{946}{EI}, \quad \text{menor que para el cojinete izquierdo.}$$

El siguiente es un resumen de los cálculos anteriores:

	Vertical	Horizontal	Resultante
Deformación en el engranaje	942/EI	3925/EI	4040/EI
Pendiente en el cojinete izquierdo	310/EI	1212/EI	1250/EI
Pendiente en el cojinete derecho	144/EI	934/EI	946/EI

Diámetro requerido de eje				
	Por resistencia, basado en el código ASME	Basado en la inclinación en los cojinetes	Basado en la pendiente en cojinetes	Basado en la velocidad crítica
$D =$	1 pul	1,285 pul	0,47 pul	0,598 pul
$2D =$	2 pul	2,57 pul	0,94 pul	1,196 pul

PROBLEMAS PROPUESTOS

13. Una polea de 24 pul, conducida por una correa horizontal, transmite potencia mediante un eje macizo de acero a un piñón de 10 pul, el cual a su vez conduce un engranaje. La polea pesa 300 lb para proporcionar algún efecto de volante. La disposición de los elementos, las tensiones en la correa, y las componentes de la reacción del engranaje sobre el piñón se muestran en la figura 9-13.
- (a) Dibujar lo siguiente: cargas verticales, momentos de flexión verticales, cargas horizontales, momentos de flexión horizontales, momentos combinados de flexión.
- (b) Determinar el diámetro necesario del eje usando los valores del código para ejes comerciales y factores de choque y fatiga, $K_b = 2,0$ y $K_t = 1,5$.

Resp. $M_t(\text{max}) = 9600 \text{ lb-pul}$, $M_b(\text{max}) = 16.350 \text{ lb-pul}$, $d = 2,83 \text{ pul}$

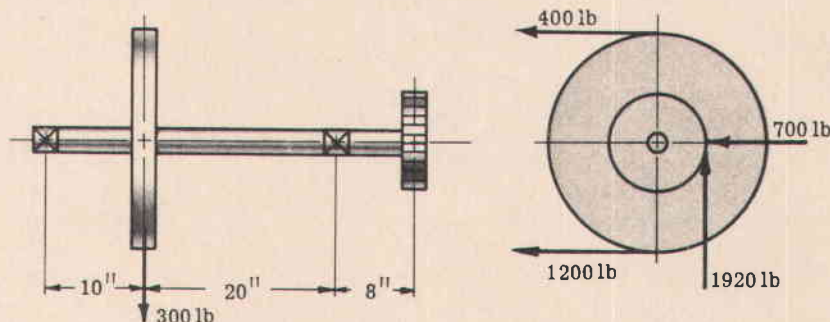


Fig. 9-13

14. A un eje soportado por cojinetes separados 36 pul se transmite potencia por medio de una correa que se mueve sobre una polea de 18 pul, la cual sobresale 10 pul del cojinete derecho. La potencia se transmite desde el eje por medio de una correa que se mueve sobre una polea de 10 pul localizada en el punto medio entre los cojinetes. Las correas conductoras forman ángulo recto entre sí y sus tensiones están en la relación 3 a 1, estando limitada a 600 lb la tensión total en el ramal tirante de cualquiera de las correas.

- (a) Hacer los diagramas de momentos.
- (b) Determinar el diámetro necesario para el eje de transmisión si es de acero SAE 1045 (resistencia última a la tracción 97.000 psi, límite elástico en tracción 58.000 psi). Suponer $K_b = 1,5$ y $K_t = 1,0$.
- (c) Calcular la deformación por torsión en grados.

Resp. $M_t(\text{max}) = 2000 \text{ lb-pul}$, $M_b(\text{max}) = 7520 \text{ lb-pul}$, $d = 1,64 \text{ pul}$, $\theta^\circ = 0,377^\circ$

15. Un eje de acero de 60 pul de largo tiene aplicado un momento de torsión de 10.000 lb-pul por medio de una polea localizada en el centro del eje. Un engranaje situado en el extremo izquierdo del eje le aplica un momento de torsión de 8000 lb-pul mientras un engranaje localizado 9 pul a la izquierda del extremo derecho del eje le aplica un momento de torsión de 2000 lb-pul. Calcular la deformación angular del eje si su diámetro es de 2 pul para una longitud de 36 pul desde el extremo izquierdo del eje y de 1,5 pul para el resto de su longitud. Despreciar el efecto de cuñeros en el cálculo. Resp. $0,424^\circ$

16. Un tramo horizontal de un eje comercial está soportado por dos cojinetes separados 5 pies. Un engranaje acunado, con evolvente a 20° y 7 pul de diámetro, está localizado 16 pul a la izquierda del cojinete derecho y es conducido por un engranaje situado directamente detrás de él. Una polea de 24 pul de diámetro está acunada al eje 20 pul a la derecha del cojinete izquierdo y conduce una polea por medio de una correa horizontal colocada directamente detrás de ella. La relación de tensiones en la correa es de 3 a 1, con el ramal flojo en la parte superior. Se transmiten 60 hp a 330 rpm. $K_b = K_t = 1,5$.

- (a) Hacer los diagramas de momentos, indicando los valores en los puntos de cambio.
- (b) Calcular el diámetro necesario del eje.
- (c) Calcular la deformación angular en grados.

Resp. $M_t(\text{max}) = 11.450 \text{ lb-pul}$, $M_b(\text{max}) = 38.500 \text{ lb-pul}$, $D = 3,72 \text{ pul}$, $\theta = 0,0677^\circ$

17. Un eje macizo y un eje hueco deben tener la misma resistencia en torsión. El eje hueco debe ser 10% mayor en diámetro que el macizo. ¿Cuál será la relación entre el peso del eje hueco y el del macizo? Ambos ejes deben ser del mismo material. Resp. El eje hueco pesará 0,6 del peso del eje macizo

18. El coeficiente de rozamiento entre el disco seguidor y la leva que se muestran en la figura 9-14 es 0,3. El momento de torsión necesario para girar la leva bajo estas condiciones es suministrado en el extremo derecho del eje de levas. Si el eje de levas está hecho de acero SAE 1020 templado y normalizado para una resistencia última a la tracción de 80.000 psi y un límite de fluencia de 56.000 psi, ¿cuál es el diámetro mínimo requerido de acuerdo con el código de ejes ASME? Los factores de choque y fatiga seleccionados para las condiciones de carga son $K_b = 2,0$ y $K_t = 1,5$. Despreciar el peso del eje y suponer que es continuo de cojinete a cojinete. Se supone, además, que el momento de torsión máximo se presenta cuando el seguidor está en la parte superior de su recorrido, donde se muestra en la figura 9-14. Resp. $d = 1,01$ pul

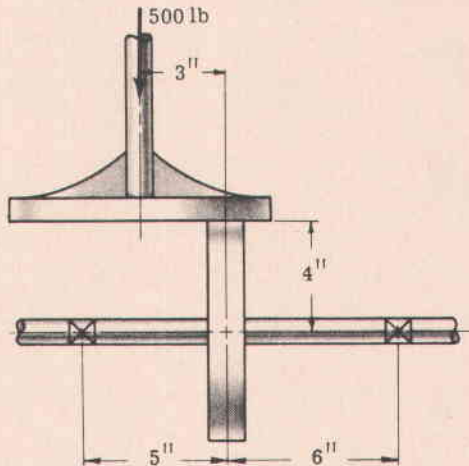


Fig. 9-14

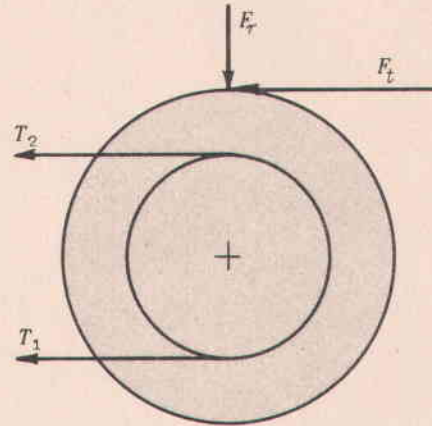


Fig. 9-15

19. Dos cojinetes separados 36 pul soportan un tramo de un eje comercial. Un engranaje de 500 lb, 30 pul de diámetro y evolvente a 20° está acunado al eje, 8 pul a la derecha del cojinete derecho. Una rueda dentada de 12 pul está acunada al eje, 20 pul a la derecha del cojinete izquierdo. El peso combinado de la rueda dentada y de la parte de la cadena tomada por el eje es de 210 lb hacia abajo. Suponer que no hay tensión en el ramal flojo de la cadena. El engranaje recibe 9 hp a 210 rpm desde un engranaje localizado encima de él. Cinco hp son tomados del eje en la rueda dentada y el resto son tomados del eje mediante un acoplamiento flexible localizado 6 pul a la izquierda del cojinete izquierdo. La figura 9-15 muestra una vista extrema de la disposición, tal como se observa desde la derecha.

- Hacer los diagramas de momentos, indicando los valores en los puntos de cambio.
- Calcular el diámetro del eje, con base en su resistencia.
- Calcular la deformación angular en grados del extremo derecho del eje con respecto al izquierdo, bajo la acción de las cargas, despreciando el efecto de los cuñeros y el aumento de rigidez por los cubos de la rueda dentada y de la polea.

Resp. M_t (max) = 2700 lb-pul, M_b (max) = 4700 lb-pul, $d = 1,86$ pul, $\theta = 0,389^\circ$

20. Un eje montado entre cojinetes separados 31 pies transmite 13.000 hp a 90 rpm. El eje pesa 14.850 lb, tiene un diámetro exterior de 18 pul y un diámetro interior de 12 pul. Determinar el esfuerzo producido en el eje y la deformación angular entre los cojinetes. Considerar el peso del eje.

Resp. $s_s = 9920$ psi, $\theta = 1,95^\circ$

21. La figura 9-16 muestra una disposición de un motor y un excitador con un piñón sobre el mismo eje. El piñón conduce un engranaje colocado directamente debajo de él. El motor desarrolla 75 hp a 200 rpm. El excitador absorbe 5 hp y el resto sigue al piñón. El motor y el excitador están montados sobre el eje por medio de un ajuste de presión, mientras que el piñón está acunado al eje.

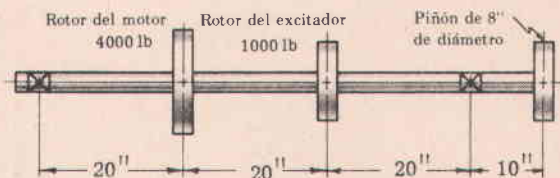


Fig. 9-16

Para esta unidad, ¿cuál es el diámetro requerido del eje (usando un diámetro constante)? El eje debe construirse de acero SAE 1035, el cual tiene una resistencia última de 75.000 psi y un límite de fluencia de 48.000 psi. El ángulo de presión de los engranajes es 20° y se usan dientes "stub". Despreciar concentraciones de esfuerzos debidas al ajuste de presión.

Hacer todos los diagramas de momentos, indicando los valores en los puntos de cambio. $K_b = 1,5$ y $K_t = 1,5$.

Resp. $M_t = 23.600$ lb-pul, M_b (max) = 69.200 lb-pul, s_s (permisible) = 13.500 psi, $d = 3,81$ pul

22. Un eje de 18 pies de largo y $1\frac{3}{8}$ pul de diámetro gira a 500 rpm y tiene una potencia de entrada de 10 hp en un extremo. Desde un punto a 8 pies del extremo mencionado se toman seis hp, mientras los 4 hp restantes se toman del extremo opuesto. Usando $G = 12 \times 10^6$ psi, encontrar la deformación angular de un extremo relativa al otro, debida a esta carga. Resp. $\theta = 2,49^\circ$
23. Un eje macizo de 9 pul de diámetro se usa para conducir la hélice de un barco de mar. Es necesario reducir el peso del eje en un 70%. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de un eje hueco hecho del mismo material del eje macizo? Resp. $d_o = 15,771$ pul, $d_i = 14,980$ pul
24. Un eje tiene un diámetro constante y la distancia entre los soportes (cojinetes) es 32 pul. Dos poleas acunadas al eje se encuentran localizadas entre los cojinetes. Una polea, de 8 pul de diámetro y 20 lb de peso, está localizada 8 pul a la derecha del cojinete izquierdo; la otra polea, cuyo diámetro es de 16 pul y cuyo peso es de 60 lb, está localizada 22 pul a la derecha del cojinete izquierdo.

El eje gira a 900 rpm. Los ramales tirantes y flojos de las correas son horizontales y paralelos. Veinte hp son suministrados a la polea de 8 pul. La potencia se transmite desde la polea de 16 pul a otra polea localizada de modo que se produzca el momento de flexión mínimo en el eje, con los ramales de la correa horizontales, como ya se dijo.

El esfuerzo en la correa está limitado a un máximo de 300 psi. La relación entre el diámetro de la polea y el espesor de la correa está limitada a un mínimo de 30. Se usará un espesor de correa de $\frac{1}{4}$ pul. El coeficiente de rozamiento entre la correa y la polea puede tomarse igual a 0,3.

El eje está hecho de acero SAE 1035 laminado en caliente, para el cual la resistencia última puede tomarse como 80.000 psi y el límite de fluencia como 49.000 psi. El eje está montado sobre cojinetes con un ajuste de clase 2.

Las condiciones de carga son estacionarias, sin choque.

Determinar el diámetro necesario del eje basado en resistencia, deformación en los cojinetes y velocidad crítica. Despreciar el peso del eje y de las poleas en los cálculos por resistencia y deformación.

Resp. Diámetro del eje = 1,5 pul con base en la resistencia y de acuerdo al código ASME. Para este diámetro la velocidad crítica es 2720 rpm, la cual está por encima de la velocidad de operación en condiciones de seguridad. La deformación estática bajo la polea de 20 lb es 0,0039 pul, y la deformación estática bajo la polea de 60 lb es 0,005 pul. Se requiere un diámetro del eje de 2,25 pul para prevenir excesos de deformación en los cojinetes con base en una relación L/D de 1,5.

Capítulo 10

Diseño de acoplamientos

LOS ACOPLAMIENTOS se usan para conectar secciones de ejes o para conectar el eje de una máquina conductora con el de la máquina conducida. Esto permite una conexión permanente, en contraste con los embragues, los cuales producen acoplamiento o desacoplamiento, a voluntad. Los embragues se tratan en una sección diferente.

LA CLASIFICACION de los acoplamientos puede hacerse sobre la base de que los diseños sean rígidos o flexibles.

(A) Acoplamientos rígidos:

Como un acoplamiento de bridas, uno de compresión o un acoplamiento cónico. Este tipo de acoplamiento es recomendable para velocidades bajas en ejes alineados con precisión.

(B) Acoplamientos flexibles:

Como un acoplamiento flexible Falk, un acoplamiento Oldham, un acoplamiento tipo engranaje, un acoplamiento de rodillos o de cadena silenciosa, etc.

Los acoplamientos flexibles se usan:

- (a) Para tener en cuenta pequeñas cantidades de desalineamiento no intencionales.
- (b) Para suministrar un "extremo flotante", esto es, movimiento axial del eje.
- (c) Para aliviar el choque, suministrando transferencia de potencia por medio de resortes o para absorber algunas de las vibraciones en el acoplamiento.

Los acoplamientos pueden clasificarse también de acuerdo a su uso, especificado por la relación entre las líneas centrales de los ejes conectados:

- (1) Las líneas centrales de los ejes son colineales.
- (2) Las líneas centrales de los ejes se intersectan. (Puede usarse una unión universal de uno cualquiera de los numerosos tipos existentes.)
- (3) Las líneas centrales de los ejes son paralelas pero no colineales. (Puede usarse un acoplamiento Oldham con su elemento central deslizante. Este tipo de acoplamiento debe evitarse en lo posible con cargas pesadas, a causa del rozamiento debido al deslizamiento.)

Como los acoplamientos rígidos pueden transmitir flexión en un eje, esto origina esfuerzos que pueden producir falla por fatiga. Es deseable, por consiguiente, proporcionar buen alineamiento y localizar el acoplamiento en donde el momento de flexión sea prácticamente nulo. Así, tanto los acoplamientos rígidos como los flexibles, se analizan generalmente sólo para torsión.

Aun cuando pueden comprarse acoplamientos normalizados por los fabricantes, el análisis y el proporcionamiento de las diferentes partes ilustra el procedimiento del diseño aplicado a un elemento particular de una máquina.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un acoplamiento rígido de bridas tiene un diámetro de $\frac{2,000}{2,002}$ pul. Sobre un círculo de 5 pul de diámetro se colocan cuatro pernos maquinados en orificios escariados. Si los pernos están hechos del mismo material del eje, SAE 1030, el cual tiene una resistencia última en tracción de 80.000 psi y un límite de fluencia en tracción de 50.000 psi, determinar el tamaño necesario de los pernos para que tengan la misma capacidad del eje en torsión. Referirse a la figura 10-1, donde se muestra la mitad del acoplamiento.

Solución:

- (a) La capacidad del eje, determinada del código ASME, se encuentra de

$$D^3 = \frac{16}{\pi s_s} M_t K_t$$

que es la ecuación para un eje macizo sometido a torsión única-mente. Entonces

$$(2)^3 = \frac{16}{\pi (14,400) (0,75)} M_t K_t \quad \text{o} \quad M_t K_t = 17.000 \text{ lb-pul}$$

donde s_s es el menor de $(0,18)s_u = 0,18(80.000) = 14.400$ psi
y $(0,3)s_{yp} = 0,3(50.000) = 15.000$ psi
y la tolerancia por efecto del cuñero es 0,75.

- (b) El acoplamiento puede diseñarse para choque y fatiga, K_t igual a 1, o $(M_t K_t)$ puede dejarse como un producto y mantenerse durante el análisis. Se obtiene el mismo resultado final.
- (c) El análisis de los pernos puede hacerse en diferentes formas:

- (1) Suponer que los pernos están apretados a mano, y que la carga se trasfiere desde una de las mitades del acoplamiento a la otra por medio de un esfuerzo cortante uniforme en el vástago del perno.
- (2) Suponer que los pernos están apretados a mano, y que la carga se trasfiere desde una de las mitades del acoplamiento a la otra por medio de un esfuerzo cortante máximo en el vástago del perno igual a $4/3$ del esfuerzo cortante promedio.
- (3) Suponer que los pernos están suficientemente apretados de modo que la potencia se transmite desde una mitad del acoplamiento a la otra por rozamiento.
- (4) Suponer que los pernos están apretados y que parte de la potencia se transmite por rozamiento y el resto se transmite por corte en los pernos.

Es corriente suponer en (1) y (2) que todos los pernos comparten la carga proporcionalmente, para pernos bien acabados y orificios escariados o taladrados. (Si los pernos se colocan en orificios holgados, es también corriente suponer que la mitad de los pernos es efectiva.)

- (d) Usando (1) arbitrariamente, lo que da el diseño más conservador,

$$M_t K_t = s_s \left(\frac{1}{4} \pi d^2 \right) \left(\frac{1}{2} D_{BC} \right) (n) \quad \text{o} \quad 17.000 = 14.400 \left(\frac{1}{4} \pi d^2 \right) \left(\frac{1}{2} \times 5 \right) (4), \quad \text{y} \quad d = 0,387 \text{ pul}$$

donde s_s = esfuerzo cortante permisible, psi

d = diámetro del perno, pul, (diámetro del vástago)

D_{BC} = diámetro del círculo de pernos, pul

n = número total de pernos para orificios taladrados y escariados.

(Notar que s_s para el perno es el mismo obtenido del código de ejes ASME.) Usar, por tanto, un perno de $3/8$ pul o uno de $7/16$ pul.

- (e) Usando (2), $M_t K_t = \frac{3}{4} s_s \left(\frac{1}{4} \pi d^2 \right) \left(\frac{1}{2} D_{BC} \right) (n)$, de la cual $d = 0,447$ pul; puede usarse un perno de $7/16$ pul.
- (f) El problema siguiente ilustrará una solución, utilizando (3).

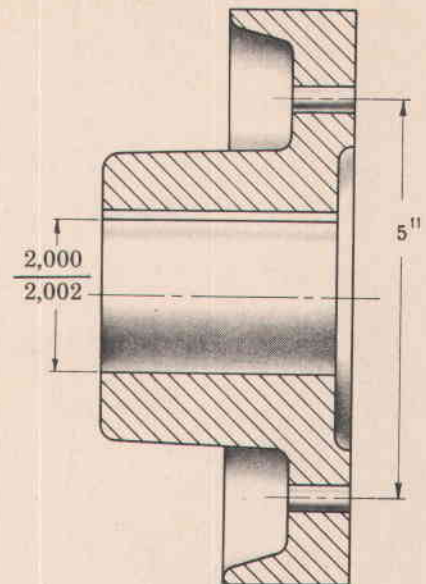


Fig. 10-1

2. En el diseño de un acoplamiento rígido de bridas, es bastante frecuente suponer que los pernos se aflojan con el uso y que la capacidad del acoplamiento se basa, en parte, en los esfuerzos cortantes que se producen en los pernos. El efecto de apretamiento de los pernos, con el rozamiento como base para la transmisión de potencia, se desprecia normalmente. Sin embargo, el propósito de este problema es evaluar la capacidad de un acoplamiento particular, con base en el rozamiento

Suponer un acoplamiento de bridas con las siguientes especificaciones:

- Número de pernos, 6
- Diámetro de los pernos, $\frac{1}{2}$ pul
- Carga inicial de los pernos, 5000 lb en cada uno
- Diámetro interior de contacto, 7 pul
- Diámetro exterior de contacto, 8 pul
- Velocidad de rotación del acoplamiento, 300 rpm
- Coefficiente de rozamiento, 0,15
- Diámetro del eje, 2 pul

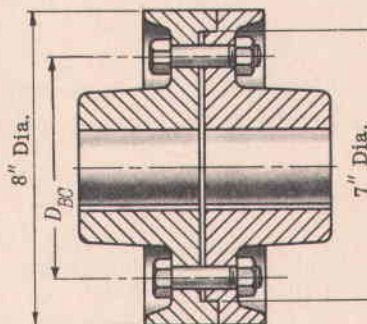


Fig. 10-2

Material del eje: SAE 1045, normalizado, con resistencia última a la tracción de 85.000 psi y límite de fluencia 45.000 psi.

Los pernos serán colocados en agujeros de gran holgura. Referirse a la figura 10-2.

Determinar:

- (1) La capacidad máxima de potencia con base en que el deslizamiento se presenta entre las caras de contacto.
- (2) Comparar la capacidad de potencia del eje con la capacidad por rozamiento. Suponer condiciones de carga estacionarias y que el eje está sometido a torsión únicamente.

Solución:

- (a) La capacidad de momento de torsión, con base en el rozamiento, es (véase capítulo 14)

$$M_t = FfR_f = 30.000(0,15)(3,75) = 16.900 \text{ lb-pul}$$

donde F = fuerza axial causada por la carga de los pernos = 30.000 lb

f = coeficiente de rozamiento

$$R_f = \text{radio de rozamiento} = \frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{4^3 - 3,5^3}{4^2 - 3,5^2} \right) = 3,75 \text{ pul},$$

lo cual supone que la presión está distribuida uniformemente.

$$\text{Potencia por rozamiento} = \frac{M_t N}{63.024} = \frac{16.900(300)}{63.024} = 80,4 \text{ hp}$$

- (b) Capacidad del eje,

$$M_t = s_s \pi D^3 / 16 = 13.500(0,75) \pi D^3 / 16 = 15.900 \text{ lb-pul},$$

donde s_s es el más pequeño entre $0,18(85.000) = 15.300$ psi y $0,3(45.000) = 13.500$ psi.

Notar el factor 0,75 que tiene en cuenta la concentración de esfuerzos.

$$\text{Capacidad del eje} = \frac{M_t N}{63.024} = \frac{15.900(300)}{63.024} = 75,7 \text{ hp}$$

- (c) Para los datos dados, el acoplamiento tiene una capacidad de potencia mayor con base en el rozamiento (80,4 hp) que con base en la capacidad del eje (75,7 hp).

3. Los problemas 1 y 2 se ocupaban del diámetro de perno necesario para transmitir potencia a través de un acoplamiento de bridas. En este problema se tratan las proporciones necesarias para las diferentes partes de un acoplamiento de bridas. Establecer las ecuaciones o relaciones necesarias para determinar (a) el diámetro del cubo D_H , (b) espesor t del vástago, (c) espesor h de la brida. Referirse a la figura 10-3.

Solución:

- (a) El diámetro del cubo se establece por medio de proporciones. El diámetro del cubo debe ser alrededor de $1\frac{3}{4}$ a 2 veces el diámetro del eje. Así,

$$D_H \approx 1\frac{3}{4} D_S \text{ a } 2 D_S$$

- (b) El espesor mínimo de t se basa en dos consideraciones: (1) Corte en el plato. (2) Contacto entre el plato y el perno suponiendo que los pernos están apretados a mano y están presionados contra el plato.

- (1) **Corte en el plato:** La capacidad del plato se basa en el corte del área menor, que ocurre en la unión del cubo y del plato.

$$M_t = s_s (\pi D_H t) \frac{D_H}{2} \quad \text{o} \quad t = \frac{2 M_t}{\pi s_s D_H^2}$$

Generalmente, el valor de t determinado de la ecuación anterior es muy pequeño y la dificultad de fundición hace necesario usar un espesor mucho mayor que el calculado.

- (2) **Contacto del perno y el plato:** La capacidad basada en el contacto es

$$M_t = s_B (dt) \frac{D_{BC}}{2} n \quad \text{o} \quad t = \frac{2 M_t}{s_B d D_{BC} n}$$

donde s_B = presión de contacto permisible para el perno o el plato (el que sea más débil), psi de área proyectada

d = diámetro del perno, pul

D_{BC} = diámetro del círculo de los pernos, pul

n = número de pernos efectivos, tomado como todos los pernos si se usan pernos bien terminados en orificios escariados y tomado como la mitad del número total de pernos si éstos están colocados en orificios holgados. Notar que esta hipótesis es arbitraria, pero da un resultado de diseño muy conservador.

- (c) El espesor de la brida se basa en proporciones y requisitos de fundición.

4. Un acoplamiento tipo Falk está acunado a dos ejes de transmisión de 1 pul (con s_s permisible = 8000 psi para ejes no acunados, 6000 psi para ejes acunados), como muestra la figura 10-4. El eje gira a 950 rpm. Si la banda de conexión está a 1,50 pul del centro de los ejes, ¿cuántos dobleces de 0,010 por 0,100 pul de acero (SAE 1045, templado en agua y sacado a 600°F) se requieren? El elemento de conexión debe tener el 95% de la resistencia del eje de acuerdo con su capacidad de operación según el código ASME. ¿Bajo qué condiciones podría operarse este acoplamiento a 13,5 hp? El acero SAE 1045 templado en agua y extraído a 600°F puede considerarse que tiene una resistencia al fallar en tracción de 150.000 psi y un límite de fluencia de 114.000 psi.

Solución:

- (a) Capacidad del eje, usando $s_s = 6000$ psi, con permiso para el cuñero:

$$M_t = s_s \pi d^3 / 16 = 6000 \pi (1^3) / 16 = 1180 \text{ lb-pul}$$

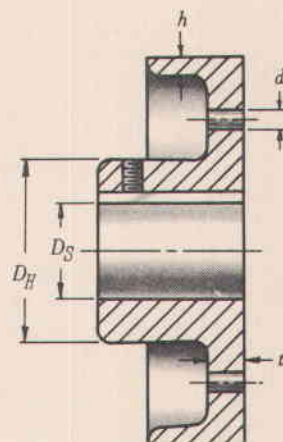


Fig. 10-3

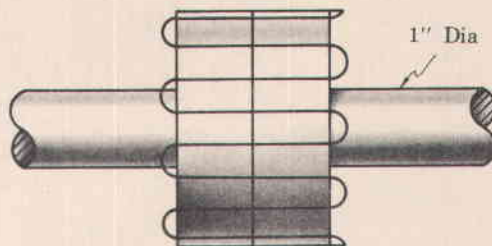


Fig. 10-4

- (b) Suponiendo que los dobleces están sometidos únicamente a corte, su capacidad es

$$M_t = s_s t h R_f n \quad \text{o} \quad 0,95(1180) = (27.000)(0,010)(0,100)(1,5)(n)$$

donde s_s = esfuerzo cortante permisible, tomado como 0,18 de la resistencia última, como sugiere el código ASME, o $0,18(150.000) = 27.000$ psi

t = espesor de la banda de acero, 0,010 pul

h = altura de la banda de acero, 0,100 pul

R_f = radio del centro del eje al dobléz

n = número de dobleces.

Resolviendo, $n = 27,6$; usar 28 dobleces.

- (c) Para 28 dobleces, la capacidad es

$$M_t = s_s t h R_f n = (27.000)(0,010)(0,100)(1,5)(28) = 1140 \text{ lb-pul}$$

La capacidad segura es $= \frac{M_t N}{63.024} = \frac{1140(950)}{63.024} = 17,2$ hp. Por tanto, puede operarse el acoplamiento a 13,5 hp con posibilidad del 30% de sobrecarga.

5. Un acoplamiento universal (unión universal, o unión Hooke) se usa para conectar dos ejes que se intersectan pero que no están necesariamente en la misma línea, como muestra la figura 10-5. La velocidad angular del eje de salida no es igual a la velocidad angular del eje de entrada, salvo que ambos ejes estén en línea. La relación de velocidades es

$$\frac{N_{S_2}}{N_{S_1}} = \frac{\cos \theta}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \theta}$$

donde N_{S_2} = velocidad angular del eje conducido

N_{S_1} = velocidad angular del eje motor

θ = ángulo entre líneas centrales de los ejes

α = ángulo del eje motor desde la posición donde los pasadores del yugo del eje conducido están en el plano de los dos ejes.

Un momento de torsión de 360 lb-pul se aplica al eje S_1 de una unión universal, en la cual S_1 y el eje de salida S_2 están en el mismo plano horizontal.

- (a) Determinar el momento sobre el eje S_2 para la posición mostrada en la figura 10-5.
 (b) Determinar el tamaño de los pasadores de la cruceta para un esfuerzo de contacto permisible de 2000 psi (por área proyectada), un esfuerzo de tracción permisible de 20.000 psi, y un esfuerzo cortante permisible de 10.000 psi.
 (c) Calcular el esfuerzo cortante máximo sobre la sección E-E, la cual está a 2 pul del eje Y-Y.

Solución:

- (a) Existen varias formas de determinar el momento de torsión sobre S_2 . Un método consiste en examinar la cruceta, aplicando las ecuaciones de equilibrio y determinando que las únicas fuerzas que pueden aplicarse son las mostradas en el plano de la cruceta. Sea F cada una de las fuerzas sobre la cruceta. Las componentes de F , que actúan sobre S_1 , son $F \cos 20^\circ$ y $F \sin 20^\circ$. El elemento de torsión sobre S_1 debido a la acción de la cruceta es $M_t = 360 = (F \cos 20^\circ)(2)$, de la cual $F = 191,5$ lb. El momento sobre el eje S_2 es $F(2) = (191,4)(2) = 383$ lb-pul. Notar que, para la posición mostrada, S_2 está únicamente en torsión, mientras S_1 está tanto en flexión como en torsión. Si el eje S_1 se rota 90° , S_1 estará únicamente en torsión, mientras el eje S_2 estará sometido a torsión y flexión.

Un segundo método consiste en usar la relación de velocidades angulares para obtener el momento de torsión. Si no hay pérdidas por rozamiento la potencia que entra debe ser igual a la que sale, esto es,

$$\frac{T_{S_1} N_{S_1}}{63.024} = \frac{T_{S_2} N_{S_2}}{63.024} \quad \text{o} \quad T_{S_1} N_{S_1} = T_{S_2} (N_{S_1} \frac{\cos \theta}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \theta})$$

Entonces para $T_S = 360$ lb-pul, $\theta = 20^\circ$ y $\alpha = 90^\circ$, para la posición mostrada, se obtiene $T_{S_2} = 360/(\cos 20^\circ) = 383$ lb-pul, que es el momento de salida. Esto está de acuerdo con el análisis de fuerzas.

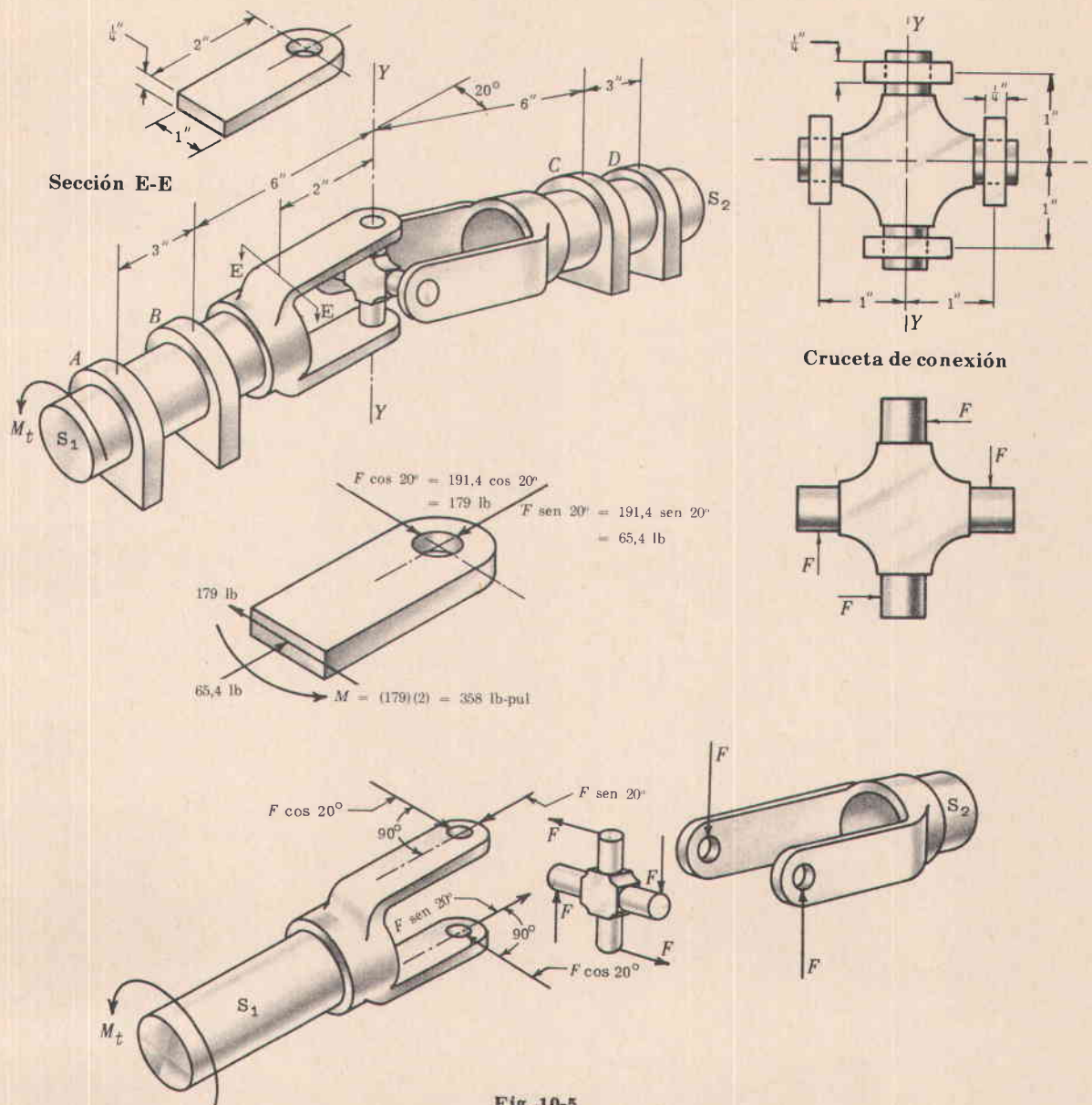


Fig. 10-5

- (b) El diámetro de los pasadores dependerá de la carga máxima, la cual se presenta en la posición mostrada. La carga máxima en el pasador es 191 lb.

(1) Diámetro del pasador con base en el contacto: $s_b = \frac{F}{A} = \frac{F}{\frac{\pi}{4}d}$, $2000 = \frac{191}{\frac{\pi}{4}d}$, $d = 0,384$ pul

(2) Diámetro del pasador con base en la flexión: $s = \frac{Mc}{I}$, $20.000 = \frac{(191 \times \frac{1}{4})(\frac{1}{2}d)}{(\pi/64)d^4}$, $d = 0,29$ pul

(3) Diámetro del pasador con base en el corte transversal: $s_s = (\frac{4}{3})\frac{F}{A}$, $10.000 = (\frac{4}{3})(\frac{191}{\frac{\pi}{4}d^2})$, $d = 0,18$ pul

Por tanto, el contacto impone el diámetro mínimo del pasador; un diámetro de 7/16 pul puede usarse satisfactoriamente.

(c) Esfuerzo máximo de compresión en la sección E-E, $s = \frac{Mc}{I} + \frac{P}{A} = \frac{(179 \times 2)(\frac{1}{2})}{\frac{\pi}{4}(1^3)/12} + \frac{65,4}{\frac{\pi}{4}(1)} = 8850$ psi.

Corte máximo = $\frac{1}{2}(8850) = 4425$ psi

PROBLEMAS PROPUESTOS

6. Un acoplamiento rígido de bridas está montado con cinco pernos en orificios escariados en una circunferencia de diámetro 6 pul. Los ejes son de acero comercial (esfuerzo cortante permisible = 8000 psi; 6000 psi tomando en cuenta el efecto del cuñero) y tienen $1\frac{15}{16}$ pul de diámetro. Determinar el diámetro normalizado del perno para transmitir la resistencia del eje, según el código ASME.

(a) sobre la base de que los pernos están flojos y el esfuerzo cortante está distribuido uniformemente.
 (b) sobre la base de que los pernos están flojos y el esfuerzo cortante máximo en el perno es $4/3$ del valor medio. El esfuerzo cortante admisible en el perno es 10.000 psi.

Resp. (a) $d = 0,270$ pul, usar $\frac{5}{16}$ pul. (b) $d = 0,312$ pul, usar $\frac{5}{16}$ pul

7. Un acoplamiento de bridas conecta dos tramos de un eje comercial de 2 pul de diámetro. Las bridas están unidas por medio de cuatro pernos del mismo material del eje. Los pernos están colocados en orificios holgados. El diámetro del círculo de pernos es 9,5 pul y el espesor de la brida es $7/8$ pul.

(a) Determinar el diámetro mínimo del perno requerido para transmitir el momento de torsión que puede transmitir el eje.

(b) ¿Qué potencia puede transmitirse a 200 rpm bajo condiciones estacionarias de carga?

Basar los cálculos en la hipótesis de que las tuercas de los pernos pueden aflojarse durante la operación.

Resp. (a) Diámetro del perno = 0,398 pul; usar un diámetro de $\frac{3}{8}$ pul o $\frac{7}{16}$ pul (basados en que el esfuerzo cortante es uniforme). El diámetro del perno basado en el rozamiento es 0,0708 pul, con una presión de rozamiento permisible igual al doble del corte permisible. El rozamiento no controla el diseño.

(b) 29,9 hp bajo condiciones estacionarias de carga (capacidad de momento de torsión = 9420 lb-pul)

8. Cada una de las mitades de un acoplamiento rígido de bridas con pernos ajustados, para un eje de diámetro D , debe instalarse sobre éste por medio de una cuña cuadrada de $1,25 D$ de largo. Deben usarse cinco pernos sobre una circunferencia de diámetro $5D$. Suponer que el acoplamiento, los pernos, el eje y la cuña son del mismo material.

(a) ¿Cuál debe ser el diámetro d de los pernos, en función de D , para que el acoplamiento y el eje tengan la misma resistencia en torsión?

(b) ¿Cuáles deben ser las dimensiones de la cuña, en función de D , si la cuña debe transmitir la capacidad total del eje de torsión?

Resp. (a) Con base en corte uniforme, $d = 0,122 D$. Con base en que el corte máximo = $4/3$ del promedio, $d = 0,141 D$

(b) Ancho = espesor = $0,236 D$

9. Las dos mitades de un acoplamiento ajustado sobre ejes de acero de 4 pul están unidas con 6 pernos de $3/4$ pul colocados sobre orificios taladrados con holgura sobre una circunferencia de 10 pul. La resistencia última en tracción y compresión del material del eje y de los pernos es 64.000 psi y la resistencia de fluencia es 48.000 psi. Suponiendo que el esfuerzo permisible para el perno puede determinarse usando el código ASME, calcular la potencia que puede transmitirse seguramente con esta combinación de eje-acoplamiento a 180 rpm. Suponer que la carga de flexión sobre el eje es despreciable y que prevalecen las condiciones de carga estacionarias.

Resp. $H_p = 217$ (con 76.000 lb-pul de capacidad de momento de torsión para los pernos, utilizando una distribución uniforme de esfuerzos cortantes y con 108.000 lb-pul de capacidad de momento de torsión para el eje)

10. Un momento $M_t = 360$ lb-pul se aplica al eje S_1 de una unión universal. Determinar

(a) el momento de torsión sobre el eje S_2 ,

(b) la fuerza sobre los pasadores de la cruceta,

(c) las reacciones A , B , C y D .

Referirse a la figura 10-5 y rotar el eje S_1 90° a partir de la posición mostrada.

Resp. (a) 348 lb-pul

(b) 180 lb

(c) Fuerza en $A = 0$, en $B = 0$, en $C = 41,1$ lb, en $D = 41,1$ lb

Capítulo 11

Cuñas, pasadores y estrías

LAS CUÑAS se usan para prevenir el movimiento relativo entre un eje y el elemento conectado a través del cual se transmite un momento de torsión. Aun cuando los engranajes, las poleas, etc, están montados con un ajuste de interferencia, es aconsejable usar una cuña diseñada para transmitir el momento total.

LOS TIPOS COMUNES DE CUÑAS son la cuadrada (figura 11-1(a)), la plana (figura 11-1(b)), la cuña Kennedy (figura 11-1(c)), y la cuña tipo Woodruff (figura 11-1(d)).

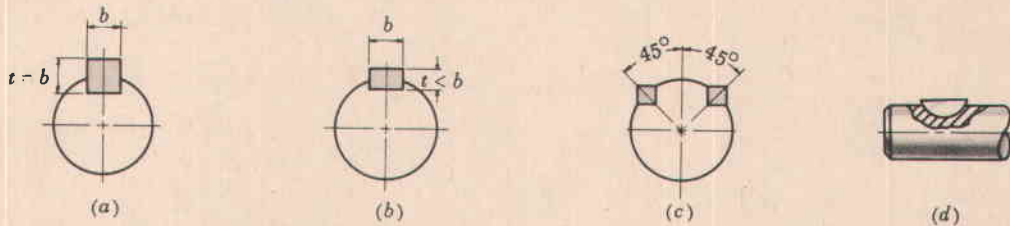


Fig. 11-1

El ancho de la cuña cuadrada o plana es generalmente una cuarta parte del diámetro del eje. Estas cuñas pueden ser rectas o ahusadas aproximadamente $\frac{1}{8}$ pul por pie. La figura 11-2 muestra una cuña con cabeza. Cuando es necesario tener movimiento axial relativo entre el eje y la parte acoplada se usan cuñas y ranuras. Existen normas ASME y ASA para las dimensiones de la cuña y de la ranura.

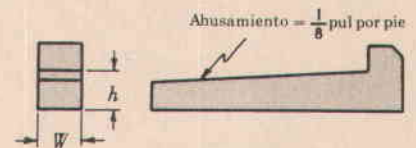


Fig. 11-2

EL DISEÑO DE CUÑAS CUADRADAS Y PLANAS puede basarse en los esfuerzos cortantes y de compresión producidos en la cuña como resultado del momento de torsión transmitido. Las fuerzas que actúan sobre la cuña se muestran en la figura 11-3. Las fuerzas F' actúan como un par resistente para prevenir la tendencia de la cuña a rotar en el cuñero. La localización exacta de la fuerza F no es conocida y es conveniente suponer que actúa tangencialmente a la superficie del eje. Esta fuerza produce esfuerzos cortantes y de compresión en la cuña.

La resistencia al momento de torsión del eje T puede aproximarse por $T = Fr$, donde r es el radio del eje. El esfuerzo cortante s_s en la cuña es

$$s_s = \frac{F}{bL} = \frac{Fr}{bLr} = \frac{T}{bLr}$$

donde L es la longitud de la cuña.

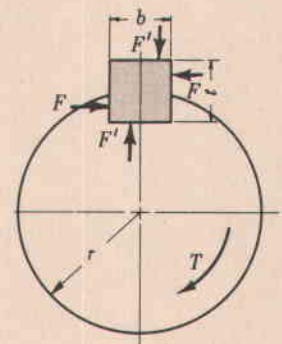


Fig. 11-3

El momento de torsión del eje que puede soportar la cuña, desde el punto de vista del corte, es

$$T_s = s_s b L r$$

El esfuerzo de compresión s_c en la cuña es

$$s_c = \frac{F}{(t/2)L} = \frac{F r}{(t/2)L r} = \frac{T}{(t/2)L r}$$

El momento de torsión del eje que puede soportar la cuña, desde el punto de vista de la compresión, es

$$T_c = s_c (t/2) L r$$

Una cuña cuadrada puede soportar el mismo momento de torsión del eje tanto desde el punto de vista del corte como desde el punto de vista de la compresión. Esto se prueba en uno de los problemas resueltos igualando las dos ecuaciones del momento y usando la relación aproximada $s_c = 2s_s$ para aceros dúctiles. Sobre la misma base, las cuñas planas más anchas que profundas fallan en compresión, y las que son más profundas que anchas fallan en corte.

LOS PASADORES se usan en uniones articuladas que conectan dos barras cargadas en tracción o en compresión, como se muestra en la figura 11-4(a). Una carga excesiva F puede hacer fallar la unión debido a cualquiera de los siguientes esfuerzos producidos:

1. Esfuerzo de tracción en la barra:

$$s_t = \frac{4F}{\pi D^2}$$

2. Esfuerzo de tracción en el área del ojo; véase la figura 11-4(b):

$$s_t = \frac{F}{(d_o - d)b}$$

3. Esfuerzo cortante en el ojo debido al cizallamiento; véase la figura 11-4(c):

$$s_s = \frac{F}{b(d_o - d)} \quad \text{aprox.}$$

4. Esfuerzo de tracción en el área neta de la horquilla:

$$s_t = \frac{F}{(d_o - d)2a}$$

5. Esfuerzo cortante en la horquilla debido al cizallamiento:

$$s_s = \frac{F}{2a(d_o - d)} \quad \text{aprox.}$$

6. Esfuerzo de compresión en el ojo debido a la presión de contacto del pasador:

$$s_c = \frac{F}{db}$$

7. Esfuerzo de compresión en la horquilla debido a la presión de contacto del pasador:

$$s_c = \frac{F}{2da}$$

8. Esfuerzo cortante en el pasador:

$$s_s = \frac{F}{A} = \frac{2F}{\pi d^2}$$

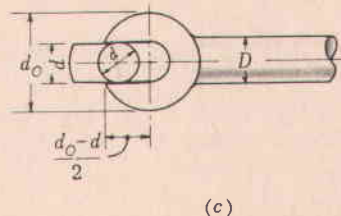
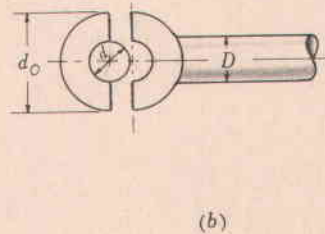
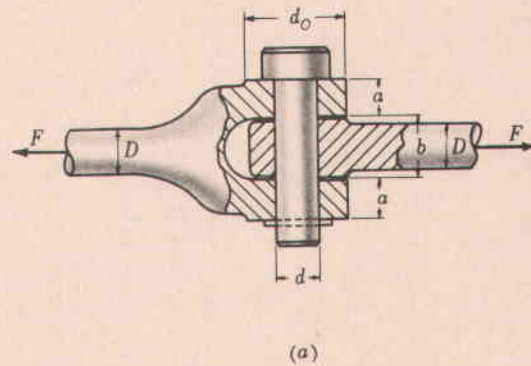


Fig. 11-4

9. Esfuerzo de flexión en el pasador, basado en la hipótesis de que el pasador está soportado y cargado como muestra la figura 11-5. El momento máximo de flexión M_b ocurre en el centro del pasador. $M_b = Fb/8$, $I = \pi d^4/64$, $c = d/2$, y

$$s_b = \frac{Mc}{I} = \frac{4Fb}{\pi d^3}$$

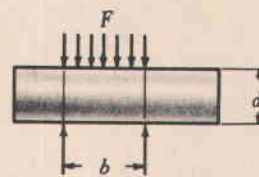


Fig. 11-5

10. Esfuerzo de compresión en el pasador debido al ojo: $s_c = \frac{F}{db}$
11. Esfuerzo de compresión en el pasador debido a la horquilla: $s_c = \frac{F}{2ad}$

LAS CONEXIONES CON ESTRIAS, como muestra la figura 11-6 se usan para permitir el movimiento relativo axial entre el eje y el cubo del miembro conectado. Las estrías son cuñas hechas integralmente con el eje y generalmente son cuatro, seis o diez. Los cuñeros son elaborados en el cubo para el ajuste requerido. Las estrías generalmente se hacen con lados rectos o cortados con perfil de envolvente. Cuando existe movimiento axial relativo en una conexión estríada, la presión lateral sobre las estrías debe limitarse a cerca de 1000 psi. La capacidad de momento de torsión de una conexión con estrías es

$$T = pAr_m$$

donde

- p = presión permisible en las estrías, < 1000 psi
 A = área total de las ranuras, pul² estrías, pul²
 $= \frac{1}{2} (D - d)(L)$ (número de estrías), pul²
 D = diámetro del eje, pul
 d = D - dos veces la profundidad de la estría, pul
 L = longitud del cubo, pul
 r_m = radio medio, pul

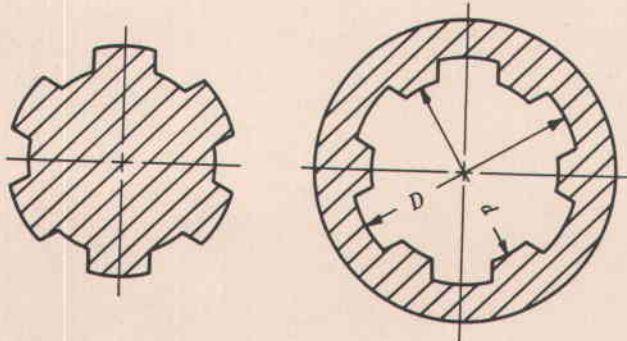


Fig. 11-6

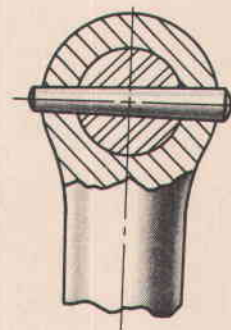


Fig. 11-7

LOS PASADORES CONICOS, similares al mostrado en la figura 11-7 se usan frecuentemente para acunar los cubos a los ejes. El diámetro del extremo mayor del pasador es generalmente alrededor de una cuarta parte del diámetro del eje. La capacidad de este tipo de conexión está determinada por las dos áreas de corte del pasador. El pasador de acuñamiento se usa algunas veces como pasador de corte.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Probar que una cuña cuadrada es igualmente resistente en corte y compresión.

Solución:

Desde el punto de vista de la compresión una cuña puede soportar el siguiente momento de torsión:

$$T_C = s_C (t/2) Lr.$$

Desde el punto de vista del corte una cuña puede soportar el siguiente momento de torsión: $T_S = s_S = b Lr$.

Igualando las dos ecuaciones del momento para establecer la misma resistencia en corte y compresión, y suponiendo que $s_C = 2s_S$, tenemos $T_C = T_S$, $2s_S (t/2) Lr$, y $t = b$ (una cuña cuadrada).

2. Determinar la longitud de una cuña cuadrada, si ésta y el eje deben tener el mismo material y la misma resistencia.

Solución:

El momento de torsión que puede transmitir un eje de diámetro d permitiendo una reducción del 25% debida a la concentración de esfuerzos es $T = 0,75 \pi d^3 s_S / 16$. Igualando este momento al momento que puede soportar una cuña cuadrada desde el punto de vista del corte, tenemos

$$0,75 \pi d^3 s_S / 16 = s_S b L r$$

Remplazar $d/4$ por b y resolver para $L = 1,18d$; usar $L = 1,25d$.

3. Una cuña cuadrada debe usarse para acunar un engranaje a un eje de $1\frac{7}{16}$ pul. La longitud del cubo del engranaje es $2\frac{1}{2}$ pul. Tanto el eje como la cuña deben hacerse del mismo material, el cual tiene 8000 psi de esfuerzo cortante permisible. ¿Cuál es la dimensión mínima de los lados de la cuña cuadrada si se trasmite un momento de torsión de 3490 lb-pul?

Solución:

Igualar la expresión del momento que puede soportar la cuña desde el punto de vista del corte a 3490 lb-pul y resolver para b .

$$r L b s_S = 3490, (1,4375/2) (2,5) (b) (8000) = 3490, b = 0,243 \text{ pul. Usar una cuña normalizada cuadrada de } 0,25 \text{ pul.}$$

4. Una cuña de $\frac{1}{2}$ pul de ancho por $\frac{3}{8}$ pul de profundidad debe transmitir un momento de 6000 lb-pul desde un eje $1\frac{1}{2}$ pul de diámetro. La cuña de acero tiene un esfuerzo permisible de tracción y compresión de 16.000 psi y un esfuerzo permisible en corte de 8000 psi. Determinar la longitud requerida de la cuña.

Solución:

Como la cuña es más ancha que profunda, fallará en compresión antes que en corte.

$$s_C (t/2) L r = 6000, (16.000) (0,375/2) (L) (0,75) = 6000, L = 2,66 \text{ pul. Usar } L = 2\frac{3}{4} \text{ pul.}$$

5. Si la cuña del problema 4 hubiera tenido $3/8$ pul de ancho y $\frac{1}{2}$ pul de profundidad, ¿cuál habría sido la longitud requerida para la misma carga y el mismo material?

Solución:

En este caso la cuña es más débil en corte que en compresión.

$$s_S b L r = 6000, (8000) (0,5) (L) (0,75) = 6000, L = 2 \text{ pul.}$$

6. El pasador de una unión articulada como la mostrada en la figura 11-4(a) está sometido a una carga axial de 20.270 lb. Suponer que el espesor del ojo debe ser 1,5 veces el diámetro del pasador. Los esfuerzos permisibles del material en tracción y compresión debidas a la flexión son de 9000 psi, y el esfuerzo permisible en corte es de 4500 psi. El esfuerzo admisible de apoyo es de 3000 psi. Determinar el diámetro del pasador requerido.

Solución:

Verificar el pasador para (a) flexión, (b) corte, (c) contacto

$$(a) \text{ Flexión: } s_b = \frac{Mc}{I} = \frac{(FL/8)(d/2)}{\pi d^4/64} \quad 9000 = \frac{(20.270 \times 1,5d/8)(d/2)}{\pi d^4/64} \quad y$$

$$d = 2,08 \text{ pul requeridas por flexión.}$$

$$(b) \text{ Corte: } s_s = \frac{F}{A} = \frac{F}{2\pi d^2/4} \quad 4500 = \frac{(20.270)}{2\pi d^2/4} \quad y$$

$$d = 1,7 \text{ pul requeridas por esfuerzo cortante.}$$

$$(c) \text{ Contacto: } s_b = \frac{F}{Ld} = \frac{F}{(1,5d)d} \quad 3000 = \frac{(20.270)}{1,5d^2} \quad y$$

$$d = 2,1 \text{ pul requeridas por contacto. Usar } d = 2\frac{1}{8} \text{ pul.}$$

7. Una conexión de estrías de una transmisión de automóvil consta de 10 estrías talladas en un eje de $2\frac{1}{4}$ pul de diámetro. La altura de cada estría es 0,214 pul y los cuñeros en el cubo tienen 1,75 pul. Determinar la potencia que puede transmitirse a 2500 rpm si la presión normal permisible sobre las estrías está limitada a 700 psi.

Solución:

$$\text{Area total de las estrías} = (0,214)(1,75)(10) = 3,74 \text{ pul}^2.$$

$$\text{Momento} = (3,74 \times 700)(1,018) = 2660 \text{ lb-pul. Potencia} = (2660)(2500)/63.000 = 106 \text{ hp.}$$

8. Una cuña Woodruff de $\frac{3}{16}$ pul por 1 pul se usa para acunar un engranaje a un eje de acero SAE 1035 de $1\frac{3}{16}$ pul de diámetro. La cuña se extiende $\frac{3}{32}$ pul en el cubo de engranaje. La cuña está hecha de acero SAE 1035 estirado en frío ($s_u = 92.000$ psi y $s_y = 78.000$ psi). Determinar la capacidad de momento de torsión del eje de acuerdo con el código de ejes ASME. Calcular la capacidad de momento de torsión de la cuña usando un factor de seguridad de 1,5 basado en la resistencia a la fluencia del material.

Solución:

El esfuerzo cortante permisible para ejes es el más pequeño de $0,18 s_u$ ó $0,30 s_y$. En este caso el esfuerzo permisible será $s_s = 0,18(92.000) = 16.560$ psi. Entonces, la capacidad de momento de torsión del eje, usando una reducción de 25% por el cuñero será

$$T = 0,75 \pi D^3 s_s / 16 = 0,75 \pi (1,1875)^3 (16.560) / 16 = 4100 \text{ lb-pul}$$

La capacidad de momento de la cuña en corte, usando un área A_s de 0,178 pul² será

$$T = s_s A_s r = \frac{(0,6)(78.000)}{1,5} (0,178) \left(\frac{1,1875}{2} \right) = 3290 \text{ lb-pul}$$

La capacidad de momento de torsión de la cuña en compresión será (la cuña se extiende dentro del cubo $t/2$)

$$T = s_c \left(\frac{t}{2} \right) L r = \left(\frac{78.000}{1,5} \right) \left(\frac{0,1875}{2} \right) (1) \left(\frac{1,1875}{2} \right) = 2900 \text{ lb-pul}$$

Así, la capacidad de momento de torsión de la conexión está controlada por la capacidad de la cuña en compresión.

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. La figura 11-8 muestra una unión articulada hecha de acero SAE 1020. Suponiendo un esfuerzo permisible en tracción de 15.000 psi, un esfuerzo cortante permisible de 7500 psi, y una carga axial de 5000 lb, determinar:

(1) Una expresión algebraica para lo siguiente:

- Esfuerzo de tracción en la sección A-A.
- Esfuerzo cortante en el pasador.
- Esfuerzo de contacto entre el pasador y la barra.
- Esfuerzo de contacto entre el pasador y el yugo.
- Esfuerzo de tracción a través del orificio en la barra.
- Esfuerzo de tracción a través del orificio en el yugo.
- Esfuerzo de flexión en el pasador.
- Desgarre de la barra por el pasador.
- Desgarre del yugo por el pasador.

Resp. (a) $s_t = 4F/\pi D^2$

(b) $s_s = 2F/\pi d^2$

(c) $s_c = F/dc$

(d) $s_c = F/2db$

(e) $s_t = F/[c(m-d)]$

(f) $s_t = F/[2b(m-d)]$

(g) $s_b = 4Fc/\pi d^3$

(h) $s_s = F/2ce$

(i) $s_s = F/[(2b)(2e)]$

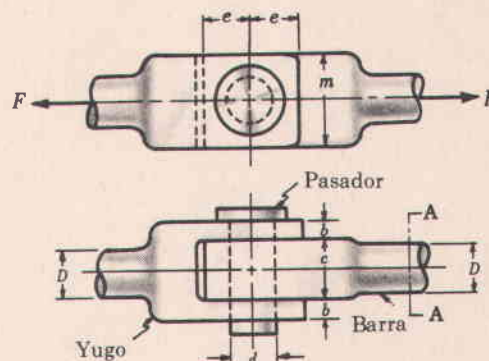


Fig. 11-8

(2) Dimensiones de las diferentes partes.

Resp. $D = 0,652$ pul, $d = 0,652$ pul, $c = 0,66$ pul, $b = 0,33$ pul, $m = 1,306$ pul, $e = 0,505$ pul

10. Algunas veces se usa una cuña como pasador de corte por razones económicas, en el caso de sobrecargas extremas. Un eje hecho de acero SAE 1045 con una resistencia última en tracción de 97.000 psi y un límite de fluencia en tracción de 58.000 psi está transmitiendo máxima potencia en torsión. El eje tiene dos pulgadas de diámetro. Una cuña no normalizada (para un eje de 2 pul) de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ pul debe usarse si es factible. ¿Qué largo debe tener la cuña si debe tener el 60% de la resistencia máxima del eje? La cuña debe ser de SAE 1030 estirado en frío, con una resistencia última en tracción de 80.000 psi y un límite de fluencia en tracción de 55.000 psi.

Resp. $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 3\frac{1}{2}$ pul

11. Un engranaje deslizante transmite un momento de torsión de 6000 lb-pul a un eje de $1\frac{1}{2}$ pul de diámetro mediante una cuña de $\frac{1}{2}$ pul de ancho por $\frac{3}{8}$ pul de espesor. Suponiendo que la cuña está hecha del mismo material del eje y es tan fuerte como él, ¿cuál es la longitud del cubo necesaria? Notar que en este caso la longitud del cubo no es igual a la longitud de la cuña.

Resp. Longitud del cubo = 1,77 pul basada en compresión

12. Una cuña cuadrada de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pul se usa para transmitir potencia desde un eje de 2 pul a un engranaje a través de un cubo. Un momento de torsión de 15.000 lb-pul se aplica al engranaje. ¿Cuál es la longitud necesaria de la cuña si la carga es estacionaria? La cuña está hecha de acero SAE 1035 laminado en frío con una resistencia última a la tracción de 95.000 psi y un límite de fluencia de 60.000 psi. Usar el procedimiento de la ASME para determinar los esfuerzos permisibles.

Resp. Longitud de la cuña = 1,75 pul. Usar 2 pul ya que la longitud de la cuña debe ser por lo menos igual al diámetro del eje para unas proporciones satisfactorias

13. Si una cuña y un eje están hechos del mismo material, determinar la longitud necesaria de la cuña para tener iguales resistencias en el eje y en ésta. La cuña es rectangular, con un ancho de $D/4$ y una altura de $3D/16$. El eje está únicamente sometido a torsión.

Resp. Longitud de la cuña = 1,57D

14. Un engranaje acunado a un eje de 2 pul debe transmitir un momento de torsión de 12.000 lb-pul en carga estacionaria. Una cuña cuadrada de $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ pul con un esfuerzo permisible en corte de 9000 psi debe usarse. ¿Qué tan larga debe ser la cuña? ¿Será satisfactorio para el eje un acero SAE 1035 con un esfuerzo al fallar en tracción de 80.000 psi y un límite de fluencia en tracción de 50.000 psi? Basar los cálculos en el código de ejes ASME.

Resp. Longitud de la cuña = 2,67 pul. El eje estaría esforzado por debajo de su esfuerzo permisible de 14.400 psi de acuerdo con el código

15. Determinar la relación de las capacidades de potencia de los dos sistemas siguientes: Un eje de 1 pul de diámetro con una cuña de $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \times 2$ pul y un eje de 1 pul de diámetro con un pasador de $\frac{1}{4}$ pul de diámetro. El pasador de acunamiento es perpendicular a la línea central del eje y pasa a través de su centro. El factor de concentración de esfuerzos para el eje es el dado en el código ASME. El factor de concentración de esfuerzos para el eje de 1 pul con un orificio radial de $\frac{1}{4}$ pul es 1,75. Suponer que solamente se transmite torsión y que el material usado para el eje es el mismo de la cuña y el pasador.

Resp. El eje con la cuña puede transmitir el triple de la potencia del eje con el pasador

16. Una cuña Woodruff de $\frac{1}{2} \times 1\frac{1}{4}$ pul hecha de acero SAE 1035 estirado en frío ($s_u = 92.000$ psi y $s_y = 78.000$ psi) se usa para acunar una polea a un eje de $1\frac{3}{4}$ pul hecho del mismo material. Usando un factor de seguridad de 1,5 basado en la resistencia a la fluencia del material, determinar la capacidad de momento de torsión de la cuña, en corte y en compresión. El área es $0,296 \text{ pul}^2$ y la cuña se extiende $0,25/2$ pul en el cubo de la polea. Calcular la capacidad de momento de torsión del eje de acuerdo con el código ASME.

Resp. Capacidad de la cuña en corte = 8075 lb-pul

Capacidad de la cuña en compresión = 7172 lb-pul

Capacidad del eje = 13.100 lb-pul

Capítulo 12

Tornillos de potencia y sujetadores roscados

LOS TORNILLOS DE POTENCIA suministran un medio para obtener gran ventaja mecánica en aplicaciones tales como gatos de tornillo, abrazaderas, prensas y actuadores de control de superficie en aviación. Ocasionalmente se usan en cambios de marcha para aplicaciones tales como los taladros de empuje.

LOS SUJETADORES ROSCADOS incluyen pernos pasantes, tornillos de cabeza, tornillos de máquinas, tornillos prisioneros y una variedad de implementos especiales que utilizan el principio del tornillo.

LA TERMINOLOGIA DE LAS ROSCAS DE LOS TORNILLOS

se ilustra en la figura 12-1. La forma de la rosca se describe ordinariamente en la sección axial. Las formas de rosca Acme y cuadrada se emplean generalmente para tornillos de potencia (Fig. 12-2). Para sujetadores roscados, las roscas Unified y American standard tienen la forma básica y las proporciones mostradas en la figura 12-3. Esta forma básica tiene el contenido máximo de metal. Para diferentes tipos de ajuste se hacen variaciones que tienden a remover más material. Véase cualquier texto corriente de diseño de máquinas o cualquier manual de ingeniería mecánica para tablas detalladas de dimensiones normales, series de roscas e información sobre clases de ajustes.

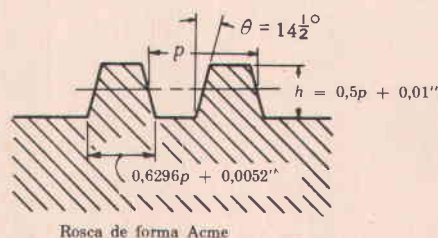
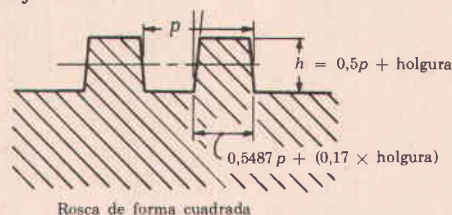
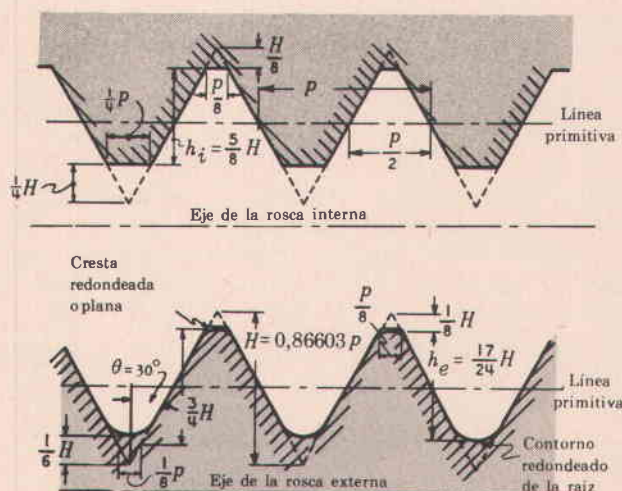
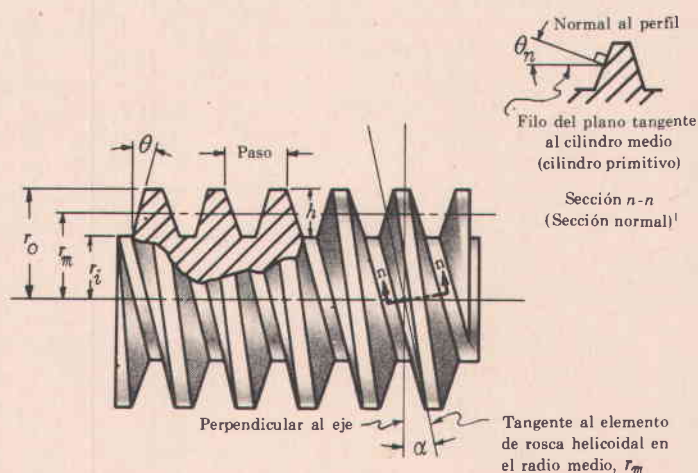


Fig. 12-2



Paso es la distancia desde un punto sobre un filete hasta el punto correspondiente sobre el filete adyacente, medida paralelamente al eje.

Avance es la distancia que avanzaría el tornillo relativa a la tuerca en una rotación. Para un tornillo de rosca sencilla, el avance es igual al paso. Para un tornillo de rosca doble, el avance es el doble del paso, etc.

El ángulo de la hélice α está relacionado con el avance y el radio medio r_m por la ecuación

$$\tan \alpha = \frac{\text{avance}}{2\pi r_m}$$

En algunos cálculos se usará el ángulo θ_n que mide la pendiente del perfil de la rosca en la sección normal. Está relacionado con el ángulo θ en la sección axial y al ángulo de la hélice como sigue:

$$\tan \theta_n = \tan \theta \cos \alpha$$

Nota: Cuando aparece $\cos \theta_n$ en las ecuaciones que siguen, se remplaza con frecuencia por $\cos \theta$. Esto da una ecuación aproximada pero, para los valores normalmente pequeños de α , no introduce error apreciable.

EL MOMENTO DE GIRO Y LA CARGA AXIAL están relacionados entre sí mediante la siguiente ecuación para avance **contra la carga** (o *elevando* la carga):

$$T = W \left[r_m \left(\frac{\tan \alpha + f / \cos \theta_n}{1 - f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + f_c r_c \right]$$

donde

T = momento aplicado para girar el tornillo o la tuerca, cualquiera que sea el que se esté girando

W = carga paralela al eje del tornillo

r_m = radio medio de la rosca

r_c = radio efectivo de la superficie de rozamiento contra la cual se apoya la carga, llamado *radio del collar*

f = coeficiente de rozamiento entre las roscas del tornillo y la tuerca

f_c = coeficiente de rozamiento en el collar

α = ángulo de la hélice de la rosca en el radio medio

θ_n = ángulo entre la tangente al perfil del diente (sobre el lado cargado) y una línea radial, medido en un plano normal a la hélice de la rosca en el radio medio.

El momento requerido para avanzar el tornillo (o la tuerca) **en el sentido de la carga** (o *descendiendo* la carga) es

$$T = W \left[r_m \left(\frac{-\tan \alpha + f / \cos \theta_n}{1 + f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + f_c r_c \right]$$

Este momento puede ser positivo o negativo. Si es positivo, debe efectuarse trabajo para avanzar el tornillo. Si es negativo, el significado es que, en equilibrio, el momento debe retardar la rotación, esto es, la carga axial aisladamente producirá rotación (situación de *taladro por empuje*). Se dice en este caso que el tornillo debe *sobrecargarse*, o que sufrirá *arrastré*.

LA EFICIENCIA DE UN MECANISMO DE TORNILLO es la relación entre el trabajo de salida y el trabajo de entrada.

$$\text{Eficiencia} = \frac{100(W)(\text{avance})}{2\pi T} \% = \frac{100 \tan \alpha}{\left(\frac{\tan \alpha + f / \cos \theta_n}{1 - f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + \frac{f_c r_c}{r_m}} \%$$

LOS ESFUERZOS EN LA ROSCA se calculan considerando que la rosca es una viga corta en voladizo proyectada desde el núcleo. (Véase figura 12-4.) La carga sobre la viga se toma como la carga axial del tornillo W , concentrada en el radio medio, esto es en la mitad de la altura h de la rosca. El ancho de la viga es la longitud de la rosca (medida en el radio medio) sometida a la carga. Con estas hipótesis el esfuerzo de flexión en la base de la rosca es, muy aproximadamente,

$$s_b = \frac{3Wh}{2\pi n r_m b^2}$$

y el esfuerzo cortante trasversal medio es

$$s_s = \frac{W}{2\pi n r_m b}$$

donde n es el número de vueltas de rosca sometidas a la carga y b es el ancho de la sección de la rosca en el núcleo.

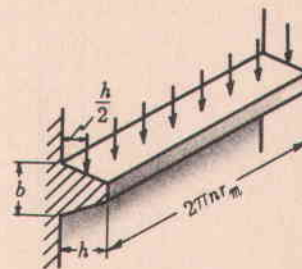


Fig. 12-4

La imagen de los esfuerzos en la unión de la rosca y el núcleo es realmente muy complicada, y las expresiones anteriores son apenas aproximaciones que sirven como guías en el diseño. En vez de r_m en estas expresiones, muchos proyectistas usan r_i para el tornillo y r_o para la tuerca, lo cual es una mejor aproximación ya que reconoce que la rosca de la tuerca es menos propensa a *robarse* que la del tornillo.

LA PRESION DE CONTACTO entre las superficies del tornillo puede ser un factor crítico en el diseño, especialmente para tornillos de potencia. Está dada aproximadamente por

$$P = \frac{W}{2\pi n r_m h}$$

Este cálculo es bajo porque (1) las holguras entre la raíz y la cresta de las roscas interna y externa significan que la carga no es soportada sobre la profundidad total h y (2) la carga no está distribuida uniformemente sobre la longitud de la rosca.

LOS ESFUERZOS EN EL NUCLEO del tornillo pueden calcularse considerando que las cargas y los momentos son soportados por el cilindro desnudo (despreciando el aumento de resistencia por efecto de la rosca). El esfuerzo cortante torsional es

$$s_s = \frac{2T}{\pi r_i^3}$$

donde r_i es el radio de fondo del tornillo. T es el momento apropiado, esto es, el momento de torsión al cual está sometida la sección considerada. Este puede ser el momento total aplicado, el momento por fricción en el collar únicamente, o el momento del *tornillo* solamente (total menos momento por fricción en el collar). Cada caso debe examinarse con cuidado para ver cuál se aplica.

El esfuerzo directo, que puede ser de tracción o compresión, es

$$s_n = \frac{W}{\text{área base}} = \frac{W}{\pi r_i^2}$$

Una modificación de la fórmula anterior se usa frecuentemente en los cálculos de los sujetadores roscados para tener en cuenta, aproximadamente, el efecto de aumento de resistencia producido por la rosca. Básicamente la modificación consiste en suponer que el cilindro tiene un radio mayor que el real. (Véase el capítulo 13.) Entonces

$$s_n = \frac{W}{\text{área de esfuerzo}}$$

Tanto las áreas de esfuerzo, como las áreas de base, se encuentran tabuladas en muchos textos y manuales.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El tornillo mostrado en la figura 12-5 se opera por medio de un momento aplicado al extremo inferior. La tuerca está cargada y su movimiento está restringido mediante guías. Suponer que el rozamiento en el cojinete de bolas es despreciable. El tornillo tiene un diámetro exterior de 2 pul y una rosca triple Acme, de 3 filetes por pul. El coeficiente de rozamiento de la rosca es 0,15. Determinar la carga que puede levantarse con un momento T de 400 lb-pul.

Solución:

$$T = W \left[r_m \left(\frac{\tan \alpha + f / \cos \theta_n}{1 - f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + f_c r_c \right]$$

donde:

profundidad de la rosca = 0,18 pul

$$r_m = 1,00 - 0,18/2 = 0,91 \text{ pul}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{avance}}{2\pi r_m} = \frac{1,00}{2\pi (0,91)} = 0,175$$

$$\alpha = 9,92^\circ$$

$$\theta = 14,5^\circ \text{ para rosca Acme}$$

$$\begin{aligned} \tan \theta_n &= (\tan \theta)(\cos \alpha) \\ &= (\tan 14,5^\circ)(\cos 9,92^\circ) = 0,255 \end{aligned}$$

$$\theta_n = 14,2^\circ$$

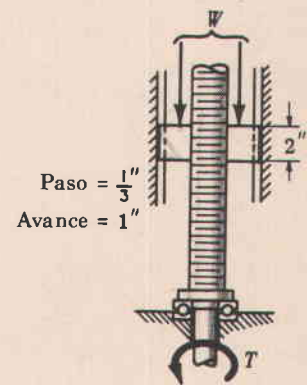


Fig. 12-5

Obsérvese que la diferencia entre θ_n y θ es tan pequeña que se hubiera podido utilizar θ . Entonces

$$400 = W \left[0,91 \left(\frac{0,175 + 0,15/0,968}{1 - (0,15)(0,175)/0,968} \right) + 0 \right] \quad \text{ó} \quad W = 1290 \text{ lb}$$

2. ¿Debe sobrecargarse el tornillo del problema 1?

Solución:

El tornillo deberá sobrecargarse si el momento en la ecuación siguiente es negativo.

$$T = W \left[r_m \left(\frac{-\tan \alpha + f / \cos \theta_n}{1 + f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + f_c r_c \right]$$

Como $f_c = 0$ para este problema, T será negativo si $(-\tan \alpha + f / \cos \theta_n)$ es negativo.

Del problema 1, $\tan \alpha = 0,175$ y $f / \cos \theta_n = 0,15/0,968 = 0,155$; por tanto, el tornillo deberá sobrecargarse, esto es, para prevenir su rotación cuando se aplica la carga W , debe aplicarse un momento de sostén.

3. Para el tornillo del problema 1 determinar la presión media de contacto entre las superficies del tornillo y la tuerca.

Solución:

$$P = \frac{W}{2\pi n r_m h} = \frac{1290}{2\pi (6)(0,91)(0,18)} = 210 \text{ psi}$$

$$\text{donde } n = \frac{\text{longitud tuerca}}{\text{paso}} = \frac{2}{1/3} = 6 \text{ vueltas de rosca compartiendo la carga.}$$

4. Deducir la ecuación para el momento T requerido para avanzar un tornillo contra una carga W .

Solución:

Con referencia a la figura 2-6, la fuerza normal total ejercida por los filetes de la tuerca contra los filetes del tornillo es F_n . Esta está distribuida sobre la longitud y sobre la profundidad de la rosca, pero para el propósito de este análisis puede considerarse concentrada en un punto en el radio medio del tornillo, r_m .

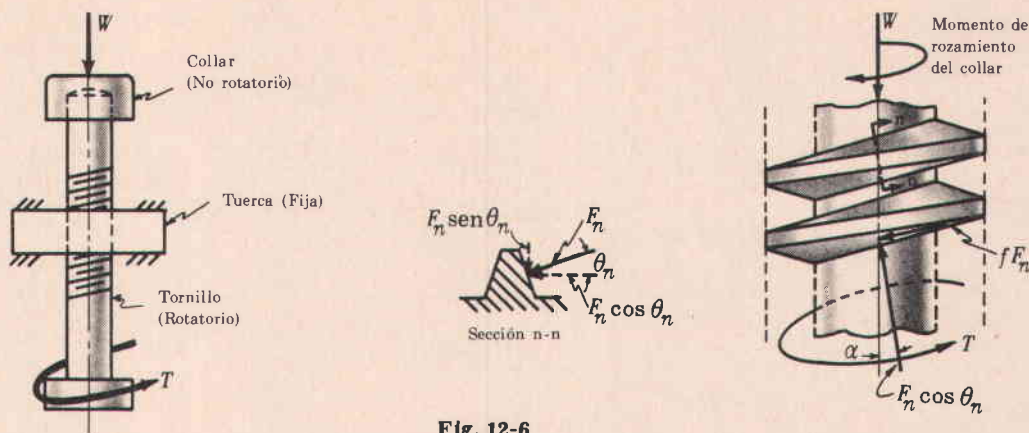


Fig. 12-6

El vector fuerza normal F_n aparece en su longitud verdadera en la sección normal. La componente $F_n \cos \theta_n$ es tangente al cilindro primitivo y forma un ángulo α (ángulo de la hélice) con el eje del tornillo. La componente $F_n \sin \theta_n$ es radial.

La fuerza de rozamiento es fF_n , la cual actúa a lo largo de la hélice de la rosca.

Actuando también sobre el tornillo está la carga axial W , el momento de rozamiento del collar $Wf_c r_c$ y el momento de torsión aplicado, T .

La suma de las fuerzas paralelas al eje del tornillo da

$$W - F_n \cos \theta_n \cos \alpha + fF_n \sin \alpha = 0$$

La suma de momentos alrededor del eje del tornillo da

$$T - F_n r_m \cos \theta_n \sin \alpha - fF_n r_m \cos \alpha - Wf_c r_c = 0$$

Eliminando F_n entre estas dos ecuaciones se obtiene

$$T = W \left[r_m \left(\frac{\tan \alpha + f/\cos \theta_n}{1 - f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + f_c r_c \right]$$

5. Los siguientes datos se aplican a la prensa en C de la figura 12-7.

Rosca American Standard

13 filetes por pul (rosca simple)

Diámetro exterior = $\frac{1}{2}$ pul

Diámetro del núcleo = 0,4001 pul

Area del núcleo = 0,1257 pul²

Coefficiente de rozamiento de la rosca = 0,12 (= f)

Coefficiente de rozamiento del collar = 0,25 (= f_c)

Radio medio del collar = 0,25 pul

Carga $W = 1000$ lb

El operario puede ejercer cómodamente una fuerza de 20 lb en el extremo de la manija.

(a) ¿Cuál es la longitud necesaria de la manija?

(b) ¿Cuál es el esfuerzo cortante máximo en el cuerpo del tornillo y dónde se presenta?

(c) ¿Cuál es la presión de contacto P sobre la rosca?

Solución:

(a) El momento requerido es

$$T = W \left[r_m \left(\frac{\tan \alpha + f/\cos \theta_n}{1 - f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + f_c r_c \right]$$

$$\text{donde } r_m = \frac{1}{4} (0,5000 + 0,4001) = 0,225 \text{ pul, } \tan \alpha = \frac{\text{avance}}{2\pi r_m} = \frac{1/13}{2\pi (0,225)} = 0,0544$$

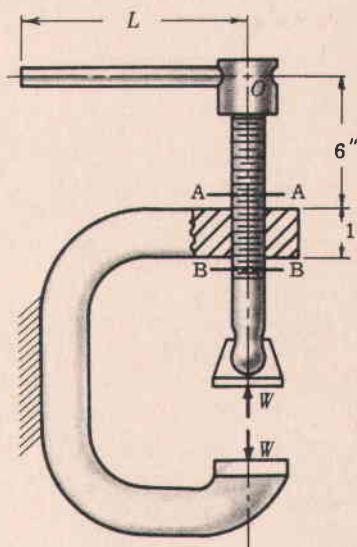


Fig. 12-7

Se toma $\theta_n = \theta = 30^\circ$ ya que el ángulo de la hélice es tan pequeño. Entonces

$$T = 1000 \left[0,225 \left(\frac{0,0544 + 0,12/0,866}{1 - (0,12)(0,0544)/0,866} \right) + (0,25)(0,25) \right]$$

$$= 43,8 \text{ (momento del tornillo)} + 62,5 \text{ (momento del collar)} = 106,3 \text{ lb-pul}$$

Para desarrollar este momento con una fuerza de 20 lb, se necesita $L = 106,3/20 = 5,32 \text{ pul}$.

- (b) La sección A-A, justamente encima de la tuerca, está sometida a momento de torsión y a flexión. La sección B-B, justamente debajo de la tuerca, está sometida a momento de torsión y a carga directa de compresión. Es necesario verificar ambas secciones para el esfuerzo cortante máximo.

En A-A

$$\text{Esfuerzo cortante torsional, } s_s = \frac{Tr}{J} = \frac{(106,3)(0,200)}{0,00251} = 8470 \text{ psi}$$

donde $T = 106,3 \text{ lb-pul}$ (de lo anterior), $r = r_i = 0,200 \text{ pul}$, $J = \frac{1}{2} \pi r_i^4 = 0,00251 \text{ pul}^4$

$$\text{Esfuerzo de flexión, } s_t = \frac{M_b c}{I} = \frac{(120)(0,200)}{0,00126} = 19.100 \text{ psi}$$

donde $M_b = (20)(6) = 120 \text{ lb-pul}$, $c = r_i = 0,200 \text{ pul}$, $I = \frac{1}{2} \pi r_i^4 = 0,00126 \text{ pul}^4$

$$\text{Esfuerzo cortante máximo, } \tau(\max) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_t\right)^2 + s_s^2} = 12.750 \text{ psi}$$

En B-B

Esta sección está sometida al momento del rozamiento en el collar $W f_c r_c$. Por tanto el esfuerzo cortante torsional es

$$s_s = \frac{(W f_c r_c) r_i}{J} = \frac{(1000)(0,25)(0,25)(0,200)}{0,00251} = 4970 \text{ psi}$$

$$\text{El esfuerzo directo de compresión es } s_c = \frac{W}{A} = \frac{1000}{0,1257} = 7960 \text{ psi.}$$

$$\text{El esfuerzo cortante máximo es } \tau(\max) = \sqrt{(7960/2)^2 + (4970)^2} = 6370 \text{ psi}$$

La conclusión es que el esfuerzo cortante máximo se presenta en la sección A-A y es 12.750 psi.

$$(c) \quad P = \frac{W}{2 \pi n r_m h} = \frac{1000}{2 \pi (13)(0,225)(0,050)} = 1090 \text{ psi}$$

donde $n = \frac{\text{longitud tuerca}}{\text{paso}} = \frac{1}{1/13} = 13 \text{ filetes}$, y $h = r_o - r_i = 0,250 - 0,200 = 0,050 \text{ pul}$.

6. Se propone construir un gato de tornillo de acuerdo con el esquema de la figura 12-8. Ninguno de los tornillos gira. El diámetro exterior del tornillo es 2 pul. La rosca es cuadrada (profundidad = $\frac{1}{2}$ paso), sencilla, y el coeficiente de rozamiento de la rosca se calcula que es 0,15.

(a) ¿Cuál es la eficiencia del gato?

- (b) ¿Qué carga puede elevarse si el esfuerzo cortante en el cuerpo de los tornillos se limita a 4000 psi? Suponer que el momento de torsión se aplica a la tuerca de modo que no se produzcan esfuerzos de flexión en el tornillo inferior.

Solución:

- (a) Se presenta una acción diferencial del tornillo. En una vuelta de la tuerca la carga es elevada una cantidad igual a la diferencia en filetes de los dos tornillos.

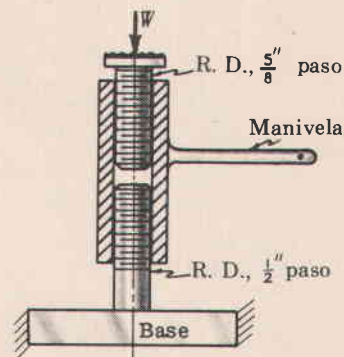


Fig. 12-8

Por tanto, el trabajo efectuado en una vuelta es

$$\begin{aligned}\text{Trabajo efectuado por vuelta} &= W (\text{avance del tornillo superior} - \text{avance del tornillo inferior}) \\ &= W \left(\frac{5}{8} - \frac{1}{2} \right) = W/8 \text{ lb-pul}\end{aligned}$$

No existe rozamiento en el collar ya que no hay rotación en el tornillo al cual se aplica la carga.

El momento T' requerido para girar la tuerca, con relación al tornillo es:

$$T' = W \left[r_m' \left(\frac{\tan \alpha' + f/\cos \theta_n'}{1 - f \tan \alpha' / \cos \theta_n'} \right) \right] = W \left[\frac{27}{32} \left(\frac{0,118 + 0,15}{1 - (0,15)(0,118)} \right) \right] = 0,230 W \text{ lb-pul (superior)}$$

$$\text{donde } r_m' = r_o' - \frac{\text{profundidad rosca}}{2} = 1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32} \text{ pul, } \tan \alpha' = \frac{\text{avance}}{2\pi r_m'} = \frac{5/8}{2\pi(27/32)} = 0,118$$

Para girar la tuerca con relación al tornillo inferior se requiere el siguiente momento T'' . Notar que en este caso la tuerca avanza en la dirección de la carga aplicada a ella.

$$T'' = W \left[r_m'' \left(\frac{-\tan \alpha'' + f/\cos \theta_n''}{1 + f \tan \alpha'' / \cos \theta_n''} \right) \right] = W \left[\frac{7}{8} \left(\frac{-0,0910 + 0,15}{1 + (0,15)(0,0910)} \right) \right] = 0,051 W \text{ lb-pul (inferior)}$$

$$\text{donde } r_m'' = r_o'' - \frac{\text{profundidad rosca}}{2} = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} \text{ pul, } \tan \alpha'' = \frac{\text{avance}}{2\pi r_m''} = \frac{1/2}{2\pi(7/8)} = 0,0910,$$

y se toma $\theta_n'' = \theta'' = 0^\circ$.

Por tanto el momento total T que debe aplicarse a la tuerca es $T = T' + T'' = 0,281 W \text{ lb-pul}$

$$\text{Eficiencia} = \frac{\text{trabajo de salida por vuelta}}{\text{trabajo de entrada por vuelta}} = \frac{W/8}{2\pi(0,281 W)} = 0,071 = 7,1\%$$

- (b) El tornillo superior es crítico ya que está sometido al mayor momento y tiene la menor área en el núcleo. Existen un esfuerzo directo de compresión s_c y un esfuerzo cortante de torsión s_s que deben tenerse en cuenta.

$$s_c = \frac{W}{\text{área base}} = \frac{W}{\pi r_i^2} = \frac{W}{\pi(11/16)^2} = 0,674 W$$

$$\text{donde } r_i = r_o - \text{profundidad de la rosca} = 1 - \frac{5}{16} = \frac{11}{16} \text{ pul}$$

$$s_s = \frac{Tr}{J} = \frac{(0,230 W)(11/16)}{0,350} = 0,452 W$$

$$\text{donde } r = r_i = \frac{11}{16} \text{ pul } J = \frac{1}{2} \pi r_i^4 = 0,350 \text{ pul}^4, \text{ y } T = T' \text{ de (a)} = 0,230 W$$

$$\text{Esfuerzo cortante máximo, } \tau(\max) = \sqrt{(s_c/2)^2 + s_s^2}$$

$$4000 = \sqrt{(0,674 W/2)^2 + (0,452 W)^2} \text{ o } W = 7100 \text{ lb}$$

7. Un implemento para limpiar válvulas, operado manualmente, se maneja forzando una tuerca hacia abajo a lo largo del vástago que posee ranuras helicoidales, cuadradas en una sección axial. La acción de sobrecarga rota el vástago y gira la válvula en su asiento, bien sea mediante la punta de un destornillador o mediante una cápsula de succión, de acuerdo al tipo de válvula. Suponer los siguientes datos, adicionales a los mostrados en la figura 12-9.

Coefficiente de rozamiento f entre tuerca y vástago = 0,10.

Coefficiente de rozamiento f_c entre válvula y asiento = 0,35.

Radio medio de rozamiento entre válvula y asiento = 1,0 pul.

Determinar el ángulo de hélice mínimo α que podría usarse bajo las condiciones supuestas.

Solución:

El ángulo de hélice debe ser por lo menos tan grande que asegure la acción de sobrecarga. Este valor será el que hace $T = 0$ en la ecuación

$$T = W \left[r_m \left(\frac{-\tan \alpha + f/\cos \theta_n}{1 + f \tan \alpha/\cos \theta_n} \right) + f_c r_c \right]$$

$$\text{Entonces, } \tan \alpha = \frac{r_m f + r_c f_c \cos \theta_n}{r_m \cos \theta_n - r_c f_c f} = \frac{(0,17)(0,1) + (1,0)(0,35)(1)}{(0,17)(1) - (1,0)(0,35)(0,1)} = 2,72 \text{ y } \alpha (\text{min}) = 69,8^\circ.$$

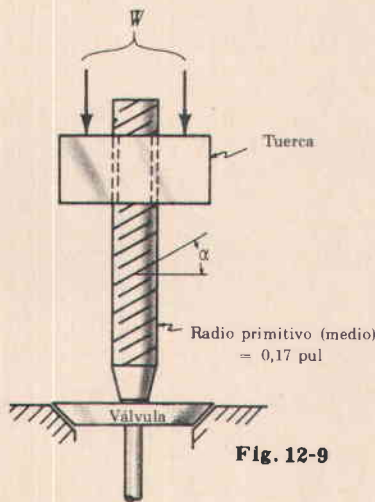


Fig. 12-9

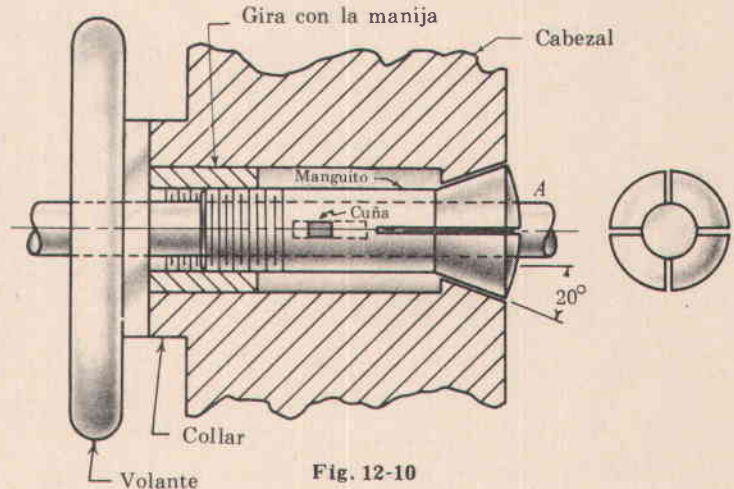


Fig. 12-10

8. El portamanguito de la figura 12-10 se opera girando el volante para introducir el manguito en su asiento cónico en el cabezal. Esto aprieta las cuatro piezas del manguito contra la pieza, aprisionándola en su sitio. Suponer los siguientes datos:

Coefficiente de rozamiento entre el manguito y el asiento cónico = 0,20.

Coefficiente de rozamiento en el collar = 0,15.

Coefficiente de rozamiento de la rosca = 0,10.

Radio efectivo del collar, $r_c = 0,75$ pul.

Rosca, $60^\circ - V$, diámetro exterior 1 pul, 0,84 pul de diámetro en la base y 16 filetes por pulgada.

Si cada parte del manguito debe ejercer una fuerza de 100 lb contra la pieza, ¿cuál es el momento requerido en el volante?

Solución:

Si se desprecia la rigidez de las partes del manguito, entonces un esquema de cuerpo libre de una de las partes del manguito será como lo muestra la figura 12-11.

W es la fuerza axial total sobre el manguito. P es la fuerza normal del asiento cónico contra la parte del manguito. Pueden escribirse las siguientes ecuaciones para el equilibrio de las fuerzas paralelas y perpendiculares al eje del manguito:

$$W/4 = P \sin 20^\circ + 0,20 P \cos 20^\circ$$

$$P \cos 20^\circ - 0,20 P \sin 20^\circ = 100$$

La solución simultánea da $W = 243$ lb. Esta es la fuerza axial que debe desarrollar el mecanismo de tornillo.

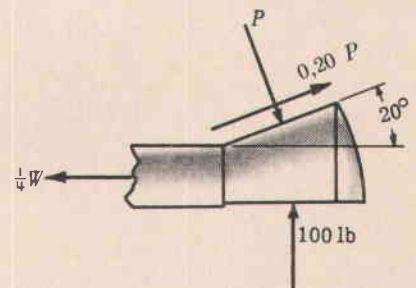


Fig. 12-11

El momento de torsión requerido sobre el volante (tuerca del mecanismo de tornillo) es

$$T = W \left[r_m \left(\frac{\tan \alpha + f/\cos \theta_n}{1 - f \tan \alpha/\cos \theta_n} \right) + f_c r_c \right]$$

$$\text{donde } r_m = \frac{1 + 0,84}{4} = 0,460 \text{ pul y } \tan \alpha = \frac{\text{avance}}{2\pi r_m} = \frac{1/16}{2\pi (0,460)} = 0,0216.$$

Usando además $\theta_n = \theta = 30^\circ$ y los valores dados de f_c y r_c , se obtiene $T = 43$ lb-pul.

9. Calcular el momento máximo de torsión que puede aplicarse al apretar un tornillo de $\frac{3}{4}$ pul si el esfuerzo cortante en el cuerpo del tornillo no debe sobrepasar de 20.000 psi.

Diámetro exterior del tornillo = 0,7500 pul.

Diámetro de la base = 0,6201 pul.

La sección de la rosca tiene 60° de ángulo interno ($\theta = 30^\circ$). Filetes por pulgada = 10.

Radio efectivo de rozamiento bajo la tuerca, $r_c = 0,50$ pul.

El coeficiente de rozamiento entre la rosca y el collar se calcula que es 0,10.

Solución:

$$\text{Esfuerzo cortante máximo en el cuerpo del tornillo, } \tau(\max) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}s_t\right)^2 + s_s^2}$$

donde

$$s_t = \text{esfuerzo directo de tracción} = \frac{W}{\pi r_t^2} = \frac{W}{\pi (0,3100)^2} = 3,31 W$$

$$s_s = \frac{T' r_t}{J} = \frac{T' r_t}{\frac{1}{2} \pi r_t^4} = 21,35 T', \text{ y}$$

$T' =$ momento del tornillo = momento en la llave — momento de rozamiento en el collar.

Sin embargo,

$$T = W \left[r_m \left(\frac{\tan \alpha + f / \cos \theta_n}{1 - f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + r_c f_c \right]$$

donde

$$r_m = \frac{0,7500 + 0,6201}{4} = 0,3425 \text{ pul, } \tan \alpha = \frac{\text{avance}}{2\pi r_m} = \frac{1/10}{2\pi (0,3425)} = 0,0465$$

$$f = f_c = 0,10, \quad r_c = 0,50 \text{ pul.}$$

Tomando $\theta_n = \theta = 30^\circ$, tenemos

$$T = W \left[0,3425 \left(\frac{0,0465 + 0,10/0,866}{1 - (0,10)(0,0465)/0,866} \right) + (0,50)(0,10) \right]$$

$$= 0,056 W + 0,050 W = 0,106 W$$

Entonces $s_s = 21,35 T' = (21,35)(0,056 W) = 1,195 W$.

Resolviendo para W en la ecuación de $\tau(\max)$, $W = 9800 \text{ lb.}$

Así, el momento de torsión en la llave es $T = 0,106 W = (0,106)(9800) = 1040 \text{ lb-pul.}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

10. Los siguientes datos se aplican a la prensa mostrada en la figura 12-12.

Diámetro exterior del tornillo = $\frac{1}{2}$ pul.
 Diámetro del núcleo = 0,4350 pul.
 Paso (rosca simple) = 0,0500 pul.
 Radio de rozamiento del collar = 0,200 pul.
 Coeficiente de rozamiento del collar = 0,15.
 Coeficiente de rozamiento del tornillo = 0,15.
 Suponer que el operario puede ejercer cómodamente una fuerza máxima de 30 lb sobre la manija.

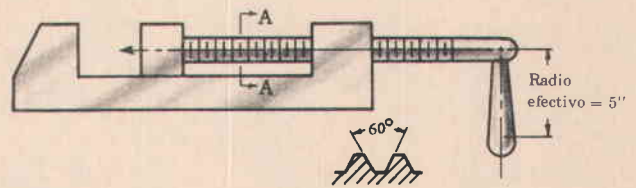


Fig. 12-12

- Determinar (a) la fuerza de prensado desarrollada entre las mandíbulas de la prensa
 (b) la eficiencia de la prensa
 (c) el momento en el cuerpo del tornillo en la sección A-A

Resp. (a) 1905 lb, (b) 10%, (c) 57 lb-pul

11. Deducir la expresión del momento de torsión requerido para avanzar un tornillo o tuerca *en el sentido de la carga*. (Sugerencia: Usar un esquema como el de la figura 12-6, pero invirtiendo el sentido del momento de rozamiento en el collar T y el sentido de la fuerza de rozamiento fF_n .)

12. La figura 12-13 muestra cuatro situaciones diferentes en lo que respecta a localización de la carga y aplicación del momento. En cada caso la carga axial W es 1000 lb, el momento de torsión aplicado externamente es 90 lb-pul y el momento de rozamiento en el collar es 30 lb-pul.

- (1) Establecer para cada caso, el valor de la fuerza axial y el momento de torsión que debe usarse al calcular esfuerzos en el cuerpo del tornillo para una sección, justamente por encima de la tuerca.
 (2) Lo mismo, pero para una sección, justamente por debajo de la tuerca.

Resp. (1) (a) 1000 lb, 60 lb-pul
 (b) 1000 lb, 30 lb-pul
 (c) 0 lb, 90 lb-pul
 (d) 0 lb, 0 lb-pul

Resp. (2) (a) 0 lb, 0 lb-pul
 (b) 0 lb, 90 lb-pul
 (c) 1000 lb, 30 lb-pul
 (d) 1000 lb, 60 lb-pul

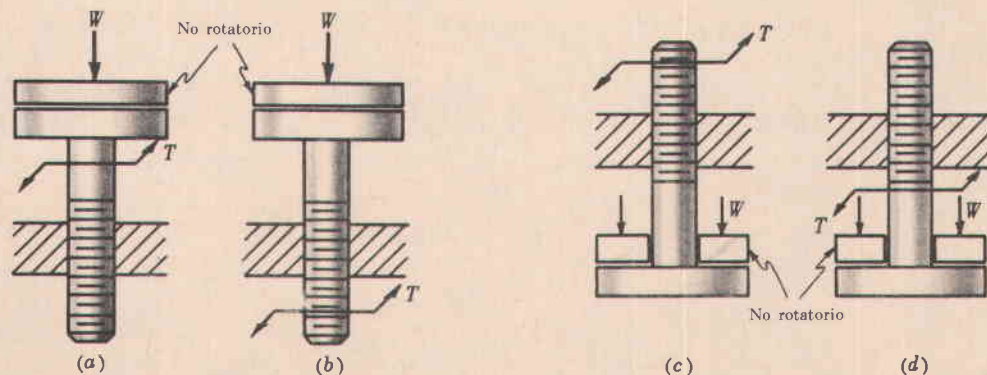


Fig. 12-13

13. Un perno de 1 pul está apretado para desarrollar una fuerza axial inicial de 10.000 lb. Usando los datos que se dan a continuación, determinar

- (a) el momento de torsión necesario para aplicar a la tuerca
 (b) el esfuerzo cortante máximo en el cuerpo del perno

Diámetro exterior del perno, 1 pul; diámetro del núcleo, 0,8376 pul; 8 filetes por pul; $f_c = f = 0,15$; $r_c = 0,625$ pul. Resp. (a) 1938 lb-pul, (b) 12.650 psi

14. Usando los datos del problema 13, ¿cuál es el coeficiente de rozamiento necesario bajo la cabeza del perno de modo que no sea necesario sostenerla mientras se aprieta? Suponer el mismo radio efectivo de rozamiento de la tuerca. Resp. 0,16

15. En una válvula de compuerta empleada en una línea de agua a alta presión, la compuerta pesa 1500 lb y la fuerza de rozamiento debida a la presión del agua que se opone a la apertura, es 500 lb. El vástago de la válvula no es rotatorio y se eleva por medio de una rueda con rosca interna que actúa como una tuerca rotatoria sobre el vástago de la válvula. La rueda se presiona contra un collar de soporte de $1\frac{5}{8}$ pul de diámetro interior y 3 pul de diámetro exterior. El vástago de la válvula tiene 3 filetes cuadrados (rosca sencilla) por pulgada. Suponiendo que el coeficiente de rozamiento para el collar es 0,25 y para la rosca es 0,10, determinar
- El momento que debe aplicarse a la rueda para elevar la válvula de compuerta
 - La eficiencia del mecanismo de tornillo y collar
 - El esfuerzo cortante máximo en el cuerpo del tornillo
- Resp. (a) 818 lb-pul, (b) 13%, (c) 1215 psi
16. Un tensor de doble rosca se usa para tensionar un cable metálico. Las roscas son sencillas, una derecha y otra izquierda, de sección cuadrada. El diámetro exterior del tornillo es $1\frac{1}{2}$ pul y el paso es $\frac{1}{3}$ pul. El coeficiente de rozamiento entre los tornillos y las tuercas es 0,15. ¿Cuál es el momento necesario sobre el tensor si el cable debe ser tensionado a 2000 lb? Resp. 618 lb-pul
17. Un tornillo de acero que conduce una tuerca de bronce debe desarrollar una carga axial de 80.000 lb en una prensa de extrusión. El tornillo tiene un diámetro exterior de 4 pul y una rosca cuadrada sencilla (profundidad = $\frac{1}{2}$ paso) con un avance de $\frac{2}{3}$ pul. La longitud de la tuerca debe escogerse de modo que la presión de contacto entre la rosca del tornillo y la tuerca no exceda de 2300 psi y que el esfuerzo cortante sobre la rosca de la tuerca no exceda de 4000 psi. Determinar la longitud aconsejable de la tuerca. Resp. 6 pul (controla la presión de contacto.)
18. La figura 12-14 muestra un tipo de picaporte de una ventana. Suponiendo que los coeficientes de rozamiento son 0,3 y 0,2 sobre la rampa y el collar respectivamente, ¿qué fuerza F sobre la manija se requiere para desarrollar una fuerza de 70 lb prensando la ventana? Resp. 10 lb

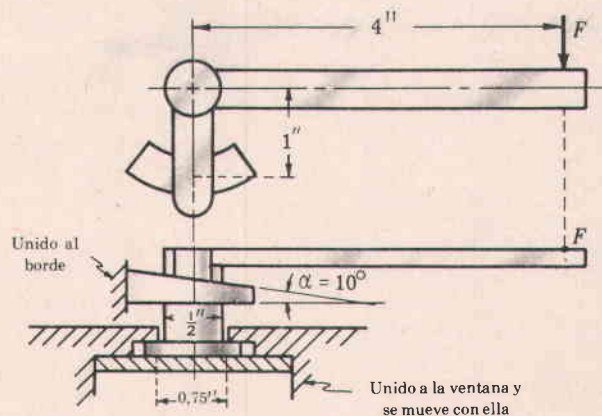


Fig. 12-14

Capítulo 13

Pernos

LAS UNIONES CON PERNOS SOMETIDOS A TRACCION se encuentran corrientemente en el diseño de sujetadores. El perno está sometido a una carga inicial de tracción, W_1 , seguida con frecuencia por la aplicación de una carga externa, W_2 , como muestra la figura 13-1. La carga resultante W sobre el perno se determina por medio de

$$W = W_1 + W_2 \left(\frac{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n}{b + m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} \right)$$

ó $W = W_1 + W_2 \left(\frac{m}{m + b} \right)$

donde W_1 = carga inicial en el perno debida al apretamiento, lb

W_2 = carga externa, lb

W = carga resultante sobre el perno debida a W_1 y W_2 , lb

m_1, m_2 y m_3 se definen como las deformaciones en pul por lb de carga para los elementos sujetos con pernos, m_1, m_2 y m_3 . Estos símbolos se refieren a todas las partes en el conjunto, incluyendo el empaque

m = suma de m_1, m_2 , etc.

b se define como la deformación en pul por lb de carga para el perno.

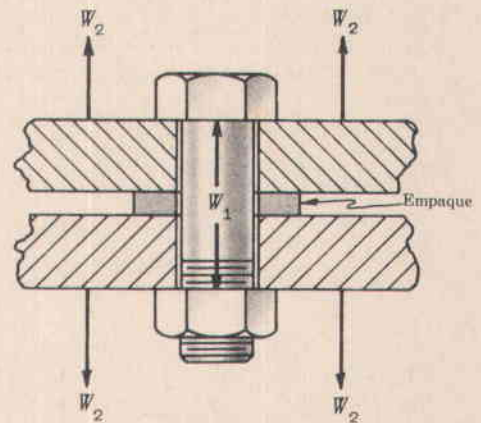


Fig. 13-1

LA SEPARACION DE LA UNION ocurrirá si $W_2 = W$. La ecuación dada anteriormente es la de una línea recta de pendiente $m/(m + b)$ y ordenada al origen, W_1 . La gráfica de esta línea, como la muestra la figura 13-2, da un método rápido para determinar cuándo se va a presentar separación de los miembros. La línea AC es la situación extrema de pendiente nula que se presenta cuando los miembros no tienen prácticamente ninguna deformación por lb de carga en comparación con el perno, esto es, $m/b = 0$. La línea AB representa la situación extrema en que el perno no tiene prácticamente ninguna deformación por lb de carga en comparación con los miembros, esto es, $b/m = 0$. La situación real se presenta entre estos extremos, como indican las líneas AD y DE.

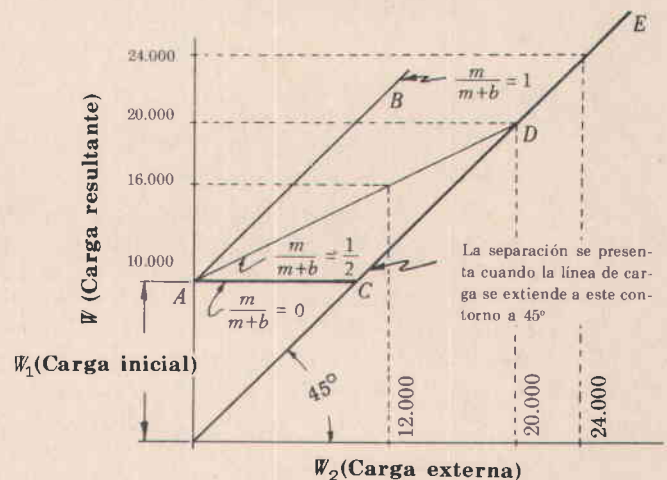


Fig. 13-2

LA TENSION INICIAL DEL PERNO debida al apretamiento puede resultar del uso de una llave de torsión o puede depender del juicio de un mecánico experto. Los resultados experimentales indican que la carga inicial W_1 en un perno apretado por un mecánico experto puede calcularse por

$$W_1 = Kd$$

donde d = diámetro nominal del perno y K varía entre 10.000 y 16.000.

Si se usa una llave de torsión para apretar el perno, el valor de la carga inicial W_1 puede aproximarse por

$$W = T/0,2d$$

donde T = momento de apretamiento aplicado y d = diámetro nominal del perno. La ecuación anterior se obtiene usando la ecuación del momento del tornillo (capítulo 12), despreciando el ángulo de la hélice, suponiendo un coeficiente de rozamiento de 0,15 para las roscas y la tuerca, y suponiendo que el radio de rozamiento del collar de la tuerca es aproximadamente 2/3 del diámetro primitivo del perno. Para roscas bien lubricadas, la tensión inicial del perno puede llegar al doble de la indicada por las expresiones anteriores. El uso de la ecuación del momento del tornillo se prefiere a la aproximación anterior.

La carga inicial en el perno puede calcularse también de la expresión teórica

$$T = \text{momento de la rosca} + \text{momento del collar} = W_1 r_m \left(\frac{\tan \alpha + f / \cos \theta_n}{1 - f \tan \alpha / \cos \theta_n} \right) + W_1 f_c r_c$$

donde r_m = radio medio de la rosca, pul α = ángulo de la hélice
 f = coeficiente de rozamiento de la rosca θ_n = ángulo de la rosca
 f_c = coeficiente de rozamiento del collar r_c = radio de rozamiento del collar, pul

LOS ESFUERZOS PRODUCIDOS EN PERNOS SOMETIDOS A TRACCION son el resultado del corte torsional combinado con la carga axial resultante en el perno. El esfuerzo cortante máximo en un perno en tracción puede calcularse por

$$\tau(\max) = \sqrt{(W_1/2A_r)^2 + (16T_f/d_r^3)^2}$$

donde $\tau(\max)$ = esfuerzo cortante máximo en el cuerpo del tornillo, psi

A_r = área del núcleo, pul²

T_f = momento de la rosca, lb-pul

d_r = diámetro de la rosca en el núcleo, pul

W = carga axial resultante en el perno, lb

Para un diseño menos conservador A_r y d_r pueden remplazarse por A_s y d_s basándose en el área de esfuerzos A_s la cual es un valor medio del área obtenida con el diámetro primitivo promedio y el área obtenida con el diámetro menor promedio, para tolerancias de la clase 3A, y $d_s = \sqrt{4A_s/\pi}$.

En general, para cargas estáticas, el esfuerzo cortante máximo producido en el perno no puede exceder de cerca de 3/4 del valor de la resistencia a la fluencia en corte del material; sin embargo, algunas veces, especialmente en el caso de pernos pequeños ($\frac{1}{2}$ pul y menos), se excede el punto de fluencia. Para cargas variables el perno debe diseñarse para fatiga. Debe observarse que corrientemente los pernos pierden su esfuerzo de torsión inicial cuando están sometidos a cargas dinámicas. Esto es debido al hecho de que la cabeza del perno y/o la tuerca se devuelve si la resistencia por rozamiento en el collar es insuficiente.

LOS ESFUERZOS POR IMPACTO resultan cuando los pernos se someten a cargas aplicadas repentinamente o cargas de impacto.

$$U = \frac{1}{2} F \delta$$

donde F = fuerza causada por impacto, lb; δ = deformación causada por impacto, pul; U = energía de impacto, lb-pul.

LA ALTURA REQUERIDA PARA LA TUERCA puede calcularse suponiendo que cada vuelta de la rosca soporta una parte igual de la carga resultante W , como muestra la figura 13-3.

La resistencia del perno en tracción debe ser igual a la resistencia de la rosca en corte. Para el perno en tracción, $W = \frac{1}{4}\pi d_r^2 s_t$; para la rosca en corte, $W = \pi d_r h s_s$; para materiales dúctiles, $s_s = \frac{1}{2} s_t$. Entonces

$$\frac{1}{4}\pi d_r^2 = \frac{1}{2}\pi d_r h \quad \text{o} \quad h = \frac{1}{2} d_r$$

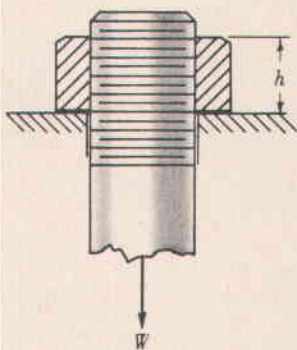


Fig. 13-3

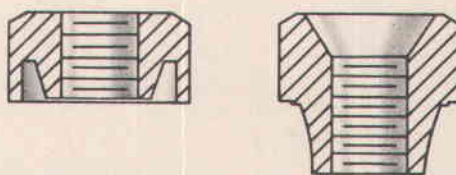


Fig. 13-4

La hipótesis de que cada filete de la rosca comparte proporcionalmente la carga no es verdadera. Como la tuerca está bajo compresión y el perno bajo tracción, la carga se desplaza hacia los filetes inferiores de la tuerca. Para pernos con cargas muy grandes, se usan algunas veces tuercas especiales para obtener una mejor distribución de la carga, como muestra la figura 13-4.

LA RESISTENCIA A LA FATIGA DE UN PERNO depende de las cargas máximas y mínimas a las que está sometido. Cuando la carga externa W_2 es fluctuante, la carga inicial del perno W_1 debe ser suficiente para prevenir la separación, con un factor de seguridad razonable. La separación estará a punto de ocurrir cuando la carga externa W_2 sea igual a la carga resultante en el perno W . Entonces

$$W_2 = W_1 + W_2 \left(\frac{m}{m+b} \right)$$

o sea que W_1 debe ser $\geq W_2 \left(1 - \frac{m}{m+b} \right)$ para prevenir la separación. Cuando no ocurre separación, la carga puede variar entre W_1 y $W_1 + W_2 \left(\frac{m}{m+b} \right)$.

LA CONCENTRACION DE ESFUERZOS EN LA RAIZ de una rosca ordinaria corriente es alta. Los ensayos fotoelásticos muestran factores de concentración de esfuerzos estáticos hasta de 5,62. Esto puede no ser muy grave para pernos hechos de materiales dúctiles cuando están sometidos a cargas estáticas. Sin embargo, se ha encontrado que el factor de concentración de esfuerzos disminuye el límite de fatiga de las roscas ordinarias corrientes en factores que varían de 2 a 4. Así, el esfuerzo fluctuante en un perno roscado debe multiplicarse por un factor conveniente de concentración de esfuerzos.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir la ecuación de la carga resultante en un perno W en función de la carga inicial W_1 y de la carga externa aplicada W_2 .

Solución:

Consideremos dos elementos unidos por medio de pernos. La figura 13-5 muestra los elementos y el perno como cuerpos libres sólo con la carga inicial de apretamiento W_1 . La figura 13-6 muestra los elementos y el perno como cuerpos libres después de la aplicación de la carga externa W_2 . Notar que el cambio en la longitud del perno es igual al cambio de los elementos, si no existe separación de las partes. Entonces

$$(\Delta L)_b = (\Delta L)_1 + (\Delta L)_2$$

$$y \quad (W - W_1)b = [W_1 - (W - W_2)]m_1 + [W_1 - (W - W_2)]m_2$$

$$o \quad W = W_1 + W_2 \left(\frac{m_1 + m_2}{b + m_1 + m_2} \right) = W_1 + W_2 \left(\frac{m}{m + b} \right)$$

donde los símbolos son los mismos dados previamente. (Nota: la carga se supone aplicada al perno.)

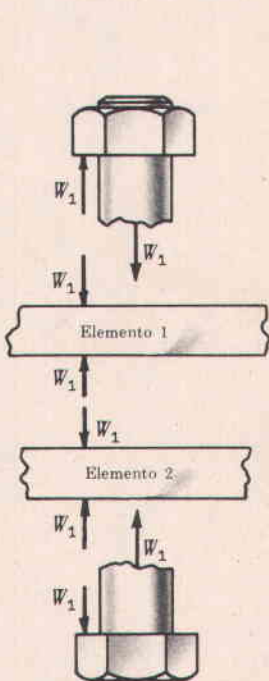


Fig. 13-5

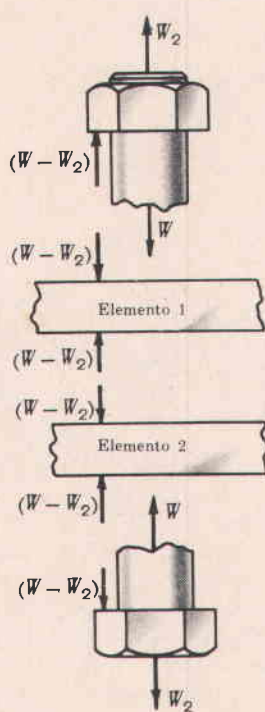


Fig. 13-6

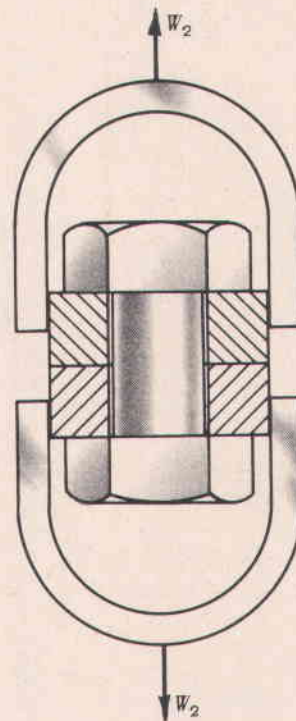


Fig. 13-7

2. Un perno se usa para sujetar dos elementos como muestra la figura 13-7. Los elementos y el perno son del mismo material y tienen igual área en su sección transversal. Determinar bajo qué carga externa W_2 se producirá separación si la carga inicial de apretamiento W_1 es 5000 lb.

Solución:

Como los elementos unidos y el perno son del mismo material y tienen la misma sección transversal, tienen la misma deformación por lb de carga. Así, $m = b$ y $W = W_1 + W_2 \left(\frac{m}{m + b} \right) = W_1 + \frac{1}{2} W_2$.

Ocorre separación cuando $W = W_2$; entonces $W_2 = 5000 + \frac{1}{2} W_2 = 10.000$ lb antes de que se produzca separación.

3. Varios elementos se unen entre sí por medio de pernos en forma tal que la deformación por lb de carga para los elementos es la misma que para el perno, esto es $m = b$ o $m/(m + b) = \frac{1}{2}$. Usando la figura 13-2 determinar gráficamente lo siguiente:
- ¿Cuál es la carga externa que debe aplicarse al perno para producir la separación de los elementos, si la carga inicial de apretamiento sobre el perno es 10.000 lb?
 - ¿Cuál es la carga resultante en el perno para una carga externa de 12.000 lb?
 - ¿Cuál es la carga resultante en el perno para una carga externa de 24.000 lb?

Solución: Referirse a la figura 13-2.

- Ocorre separación en el punto D para el cual una carga externa $W_2 = 20.000$ lb justamente causará la separación.
 - Para una carga externa $W_2 = 12.000$ lb, la carga resultante en el perno es $W = 16.000$ lb.
 - Para una carga externa $W_2 = 24.000$ lb, la carga resultante es $W = 24.000$ lb (ha ocurrido separación).
4. El conjunto mostrado en la figura 13-8 se ha cargado previamente apretando la tuerca de modo que el perno tiene una carga inicial de 1200 lb. Si la relación entre la deformación por lb de carga en el elemento y la deformación por lb de carga en el perno es $1/3$, ¿cuál es la magnitud de la carga en el perno cuando se aplica una carga externa $W_2 = 2000$ lb en la forma indicada?

Solución:

Como $m/b = 1/3$, $W = W_1 + W_2 \left(\frac{m}{m+b} \right) = W_1 + \frac{1}{4} W_2 = 1200 + \frac{1}{4} (2000) = 1700$ lb.

Como $W_2 > W$, los elementos se han separado y la carga final sobre el perno es 2000 lb.

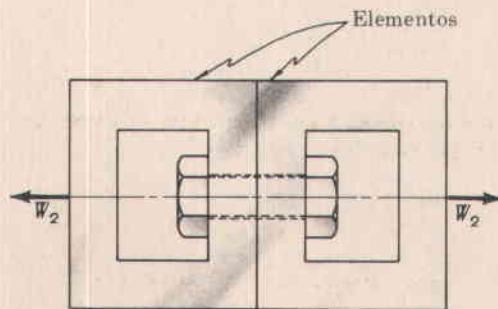


Fig. 13-8

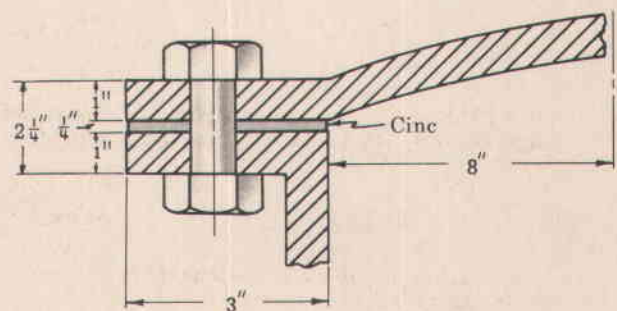


Fig. 13-9

5. La tapa de un recipiente a presión de hierro gris, mostrada en la figura 13-9, se mantiene en su sitio por medio de diez pernos de acero de $\frac{1}{2}$ pul que tienen una carga inicial de apretamiento de 5000 lb cuando el recipiente está a 70°F y la presión inicial es la atmosférica. Determinar la carga en cada perno (a) si la presión aumenta a 200 psi, (b) si el recipiente se calienta a 250°F con presión interna atmosférica, (c) si el recipiente se calienta a 250°F con una presión interna de 200 psi.

E para el acero = 30×10^6 psi, para la fundición de hierro gris = 12×10^6 psi, para el cinc = 12×10^6 psi.

Coefficiente de dilatación lineal para el acero = $6,6 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$, para la fundición de hierro gris = $5,6 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$, para el cinc = $17,8 \times 10^{-6}/^\circ\text{F}$.

Solución:

- (a) El área de la sección transversal de la pestaña y el empaque de cinc por perno es

$$A = \frac{1}{10} (\pi D_m t) = \frac{1}{10} \pi \left(\frac{16+22}{2} \right) (3) = 17,9 \text{ pul}^2$$

Área de la sección transversal de un perno de $\frac{1}{2}$ pul = $0,196 \text{ pul}^2$.

Así, área neta para el cinc y la aleta de hierro = $17,9 - 0,196 = 17,7 \text{ pul}^2/\text{perno}$.

De $s = \frac{\Delta L}{L} E = \frac{P}{A}$, tenemos $\frac{\Delta L}{P} = \frac{L}{AE}$ pul de deformación por lb de carga.

$$(L/AE)_{\text{cinc}} = \frac{0,25}{(17,7)(12)(10^6)} = \frac{1}{(850)(10^6)} \text{ pul/lb carga}$$

$$(L/AE)_{\text{HG}} = \frac{2,0}{(17,7)(12)(10^6)} = \frac{1}{(106)(10^6)} \text{ pul/lb carga}$$

$$(L/AE)_{\text{perno}} = \frac{2,25}{(0,196)(30)(10^6)} = \frac{1}{(2,62)(10^6)} \text{ pul/lb carga}$$

$$m = \frac{1}{(850)(10^6)} + \frac{1}{(106)(10^6)} \text{ pul/lb carga}, \quad b = \frac{1}{(2,62)(10^6)} \text{ pul/lb carga}, \quad \frac{m}{m+b} = \frac{1}{37}$$

$$W_2 = \frac{\pi(16^2)}{4} \left(\frac{200}{10} \right) = 4020 \text{ lb por perno, y } W = 5000 + \frac{4020}{37} = 5110 \text{ lb}$$

$$(b) \quad (\Delta L)_{\text{cinc}} \text{ debida al cambio de temp.} = \frac{(0,25)(180)(17,8)}{10^6} = \frac{(180)(4,45)}{10^6} \text{ pul}$$

$$(\Delta L)_{\text{HG}} \text{ debida al cambio de temp.} = \frac{(2)(180)(5,6)}{10^6} = \frac{(180)(11,2)}{10^6} \text{ pul}$$

$$(\Delta L)_{\text{perno}} \text{ debida al cambio de temp.} = \frac{(2,25)(180)(6,6)}{10^6} = \frac{(180)(14,9)}{10^6} \text{ pul}$$

$$(\Delta L)_{\text{cinc}} + (\Delta L)_{\text{HG}} = \frac{180}{10^6} (4,45 + 11,2) = \frac{180}{10^6} (15,65) \text{ pul}$$

$(\Delta L)_{\text{perno}} = (\Delta L)_{\text{elementos}}$. $(\Delta L)_{\text{perno}}$ aumentará tanto por un aumento en temperatura como por un aumento en la carga. Sea W'_1 la nueva carga en el perno; recordando que $W_1 = 5000$ lb.

$$(\Delta L)_{\text{perno}} = \frac{(W'_1 - 5000)(2,25)}{(0,196)(30)(10^6)} + \frac{(180)(14,9)}{10^6}$$

$(\Delta L)_{\text{elementos}}$ tenderá a disminuir por un aumento en la carga, pero tenderá a aumentar por un aumento de temperatura; así

$$(\Delta L)_{\text{elementos}} = -\frac{(W'_1 - 5000)(2,25)}{(17,7)(12)(10^6)} + \frac{(180)(15,65)}{10^6}$$

Haciendo $(\Delta L)_{\text{perno}} = (\Delta L)_{\text{elementos}}$ se obtiene $W'_1 = 5360$ lb. Esta es la nueva carga inicial en el perno.

(c) Después de la aplicación de la presión externa la carga resultante en el perno será $W = 5360 + 4020/37 = 5469$ lb.

6. Un perno largo de acero, 12 UNC, de $\frac{1}{2}$ pul por 10 pul está sometido a una carga de impacto. La energía cinética que debe absorber es 35 lb-pul. (a) Determinar el esfuerzo en el vástago del perno si no existe rosca entre la tuerca y la cabeza del perno. (b) Encontrar el esfuerzo en el vástago si su área se reduce al área de la raíz de la rosca.

Solución:

(a) La energía de impacto se absorbe por el alargamiento del vástago del perno, que tiene un área de 0,196 pul².

$$U = \frac{F}{2} \delta = \frac{F}{2} \left(\frac{FL}{AE} \right) = \frac{F^2 L}{2AE} \quad \text{o} \quad F = \sqrt{\frac{2AEU}{L}} = \sqrt{\frac{(2)(0,196)(30)(10^6)(35)}{10}} = 6400 \text{ lb (carga de impacto)}$$

El área en la raíz es $A_r = 0,1257$ pul². El esfuerzo con base en esta área es $s = 6400/0,1257 = 50.900$ psi. En este valor se ha despreciado la concentración de esfuerzos.

- (b) Si se reduce el diámetro al de la raíz,

$$F = \sqrt{\frac{(2)(0,1257)(30)(10^8)(35)}{10}} = 5140 \text{ lb y } s = \frac{5140}{0,1257} = 40.900 \text{ psi}$$

Esto ilustra cómo el esfuerzo debido al impacto puede reducirse haciendo el diámetro del vástago igual al diámetro en la raíz de la rosca. Los esfuerzos de impacto pueden reducirse también aumentando la longitud del perno.

7. Un perno de 1", 8NC-2 tiene 15 pul entre los elementos peroados. Se aprieta a una carga inicial de 10.000 lb. Suponer un coeficiente de rozamiento para la rosca y el collar de 0,625 pul. (a) Determinar el momento de torsión necesario que debe aplicarse para apretar la tuerca, usando la ecuación teórica del momento en la rosca de un tornillo. (b) Determinar el esfuerzo cortante máximo en el perno.

Solución:

(a) Para la rosca especificada $d_o = 1''$ $d_m = 0,9233''$ $\tan \alpha = \frac{\text{avance}}{\pi d_m} = \frac{0,125}{\pi(0,9233)} = 0,04312$
 $d_i = 0,8466''$ $r_m = 0,4617''$

$$T = 10.000 \left[0,4617 \left(\frac{0,15/0,866 + 0,04312}{1 - (0,15)(0,04312)/0,866} \right) + (0,625)(0,15) \right] = 1080 + 938 = 2018 \text{ lb-pul.}$$

Obsérvese que la parte del momento de torsión aplicado absorbida por la rosca es 1080 lb-pul y la absorbida por el collar es 938 lb-pul.

(b) $s_x = \frac{(10.000)(4)}{\pi (0,8466)^2} = 17.750 \text{ psi}$, $\tau_{xy} = \frac{(1080)(16)}{\pi (0,8466)^3} = 9050 \text{ psi}$, y $\tau(\max) = \sqrt{8875^2 + 9050^2} = 12.700 \text{ psi}$.

8. Deducir una expresión para el esfuerzo máximo producido en el alma de un perno horizontal cuando la cabeza se somete al impacto de un peso concéntrico W con una velocidad V . Despreciar la flexión debida a W y la concentración de esfuerzos. Ver la figura adjunta.

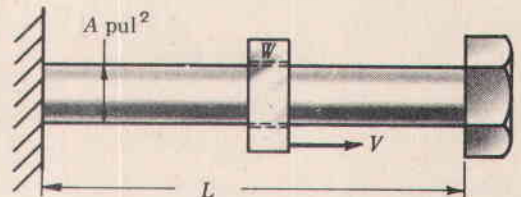


Fig. 13-10

Solución:

La energía cinética del peso móvil debe absorberla el perno por impacto. Usando lb, pul y segundos,

$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}P\delta, \quad (W/g)V^2 = (sA)(sL/E), \quad \text{y} \quad s = V\sqrt{WE/gAL} \text{ psi (tracción)}$$

9. La carga externa aplicada a una unión con pernos fluctúa entre cero y 1600 lb. La relación entre la deformación en pul por lb de carga para el perno y la de los elementos es 3. El límite de fatiga s_f del material del perno en carga axial con inversión es 30.000 psi y el límite de fluencia es 50.000 psi. El área en la raíz de la rosca es 0,1257 pul². Suponer un factor de concentración de esfuerzos $K_f = 2,5$ y un factor de seguridad $N = 2$ basado en la resistencia a la fluencia del material. En este caso K_f incluye los efectos de superficie y tamaño. Determinar:

- (a) La carga inicial de apretamiento mínima que debe aplicarse para prevenir la separación.
 (b) El esfuerzo medio, s_m , y el esfuerzo variable, s_v , con base en la carga inicial determinada en (a).
 (c) Hacer el diagrama de esfuerzos de trabajo de Soderberg para el material y determinar si el perno está seguramente cargado con base en la carga inicial determinada en (a).

Solución:

(a) $W_1 \geq W_2(1 - \frac{m}{m+b})$ para prevenir la separación, donde $\frac{m}{m+b} = \frac{1}{4}$. Entonces

$$W_1(\min) = 1600(1 - \frac{1}{4}) = 1200 \text{ lb}$$

(b) $W(\max) = 1200 + 1600/4 = 1600 \text{ lb}$

$$W(\min) = 1200 + 0 = 1200 \text{ lb}$$

$$W_m = 1400 \text{ lb (carga media)}$$

$$W_v = 200 \text{ lb (carga variable)}$$

$$s_m = 1400/0,1257 = 11.150 \text{ psi}$$

$$K_f s_v = 2,5(200/0,1257) = 3980 \text{ psi}$$

(c) La suma del esfuerzo promedio y del variable se indica en el punto A de la figura 13-11. Como el punto A cae por debajo de la línea de esfuerzo de trabajo, el perno está cargado seguramente. Notar que el factor de concentración de esfuerzos se aplicó únicamente al esfuerzo variable, y no al esfuerzo promedio el cual puede considerarse estático.

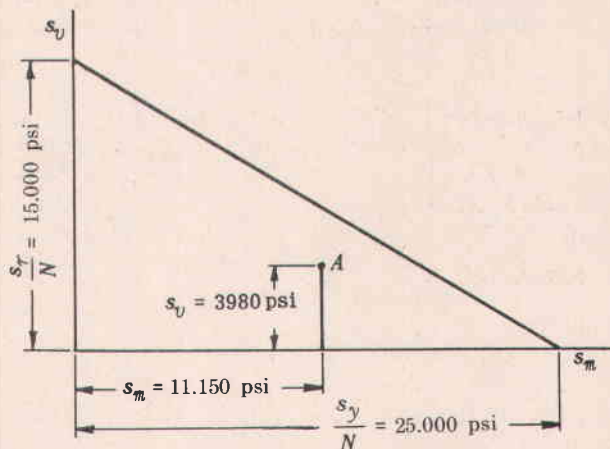


Fig. 13-11

PROBLEMAS PROPUESTOS

10. La tapa de un recipiente a presión se mantiene en su sitio por medio de diez pernos UNC de $\frac{3}{4}$ ". La presión es 200 psi y el área efectiva de la tapa expuesta a la presión es 314 pul². La relación entre las rigideces de los pernos y las partes unidas es $\frac{1}{4}$, donde la rigidez se define como pul de deformación por lb de carga. Cada perno está apretado inicialmente a 6000 lb, antes de aplicar la presión. (a) ¿Se separará la unión como resultado de la carga debida a la presión interna? (b) Si la unión no se separa, determinar el esfuerzo de tracción en cada perno, debido a la carga axial. Resp. (a) Los miembros no se separan. (b) $s = 33.000 \text{ psi}$

11. Un cilindro de aceite mantiene sus extremos en el sitio por medio de cuatro pernos pasantes, cada uno con un área de 0,2 pul² y apretando con una carga inicial de 3000 lb. El área transversal del cilindro es 2 pul². La longitud efectiva de los pernos y el cilindro puede tomarse como la misma, e igual a 18 pul. Considerando rígidas las placas extremas, determinar la carga en cada perno si se aplica una presión interna que produce una fuerza de 6000 lb sobre la cabeza y el pistón, en la posición donde la biela está completamente extendida. El material del perno y el cilindro es acero SAE 1030 con una resistencia última de 80.000 psi y un límite de fluencia de 50.000 psi. Resp. 3430 lb

12. Un perno pasante de acero 10-UNC-2A, de $\frac{3}{4}$ ", se emplea para apretar dos placas extremas contra un cilindro con un d.e. de 4 pul y un d.i. de 3 pul. La fuerza inicial de apretamiento en el perno es 12.000 lb. El área en la raíz del perno es 0,3020 pul². Ensayos hechos sobre una máquina de compresión para medir la flexibilidad del cilindro y las placas extremas, sin el perno, muestran una deformación de 0,001 pul como resultado de una carga de 32.000 lb. Si se aplica una presión interna con aceite de 3000 psi dentro del cilindro, ¿cuál será la carga del perno? Resp. 20.344 lb

13. Una cabeza de cilindro de hierro gris se sujeta a un cilindro de 20 pul (diámetro interior) por medio de 8 pernos. Considerar que el perno es extremadamente flexible en comparación con las partes unidas. Para una presión

interna de 200 psi, ¿cuál sería la fuerza axial sobre cada perno, si los pernos fueran apretados justamente hasta el punto de prevenir la apertura de la unión bajo una presión de 300 psi? Resp. 11.775 lb por perno

14. Un perno se usa para sujetar dos placas con un empaque entre ellas. Se sabe que la relación entre la deformación del perno por unidad de carga y la deformación de las partes unidas por unidad de carga es $\frac{1}{4}$. ¿Qué porcentaje de la carga aplicada a las placas se añade, por perno, a la carga inicial de apretamiento? Suponer que las placas no se separan bajo la carga.

Resp. El 80% de la carga aplicada va al perno

15. Deducir una expresión del esfuerzo de tracción producido en un perno vertical cuando un peso concéntrico W cae desde una altura h pul, como se muestra en la figura 13-12

$$\text{Resp. } s = \frac{W}{A} \left(1 + \sqrt{\frac{2AEh}{WL} + 1} \right) \text{ psi (tracción)}$$

16. La carga externa aplicada a una unión con pernos fluctúa entre cero y 1400 lb. El perno está apretado con una carga inicial de 1300 lb. El área de la raíz del perno es 0,1620 pul². La relación entre pul de deformación por lb de carga para el perno y la de los elementos es 3.

- Determinar las cargas máxima y mínima en el perno.
- Determinar el esfuerzo promedio y el esfuerzo variable, suponiendo un factor de concentración de esfuerzos de 2,8 que incluye los efectos de superficie y tamaño.
- Hacer un diagrama de esfuerzos de trabajo de Soderberg y determinar si el perno está cargado seguramente para un factor de seguridad de 1,8. El material tiene un límite de fluencia de 40.000 psi y un límite de fatiga en carga axial con inversión de 20.000 psi.

Resp. (a) $W(\text{max}) = 1650 \text{ lb}$, $W(\text{min}) = 1300 \text{ lb}$

(b) $s_m = 9260 \text{ psi}$, $s_v = 3030 \text{ psi}$

(c) El perno está cargado seguramente

17. Determinar la carga inicial de apretamiento y el esfuerzo cortante máximo en un perno de $\frac{1}{2}$ pul cuando se unen dos miembros y la tuerca está apretada con un momento de 600 lb-pul. Suponer un coeficiente de rozamiento de 0,15 para la rosca y el collar. El radio del collar puede tomarse como 0,35 pul. Despreciar la concentración de esfuerzos.

Resp. Carga inicial del perno = 5260 lb. Esfuerzo cortante máximo = 33.000 psi (con base en un diámetro en la raíz = 0,3978 pul)

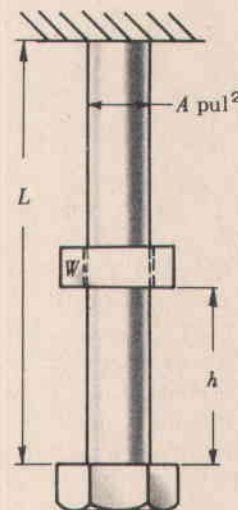


Fig. 13-12

Capítulo 14

Embragues

UN EMBRAGUE es un implemento de rozamiento que permite la conexión y la desconexión de ejes. El diseño de los embragues y los frenos es comparable en muchos aspectos. Esto se ilustra bien mediante un embrague de múltiples discos, el cual se usa también como freno. Un problema de diseño más evidente en el diseño de frenos comparado con el diseño de embragues es el de la generación y disipación de calor. Los embragues de rozamiento generan calor como resultado del movimiento relativo entre las partes, pero normalmente la cantidad de deslizamiento no es tan grande como la de un freno. En el análisis de un embrague es muy frecuente imaginar que las partes no se mueven entre sí, aun cuando no se debe pasar por alto el hecho que la transmisión de potencia por rozamiento generalmente envuelve algún deslizamiento. Por esta razón, cuando se necesita tener transmisión positiva de potencia debe apelarse a un implemento positivo tal como un embrague de mandíbulas.

EMBRAGUES DE DISCOS O LAMINAS

UN EMBRAGUE DE MULTIPLES DISCOS

se muestra en la figura 14-1. Las láminas A son generalmente de acero y están colocadas sobre estrías en el eje C, para permitir el movimiento axial (excepto para el último disco). Las láminas B son generalmente de bronce y están colocadas en estrías del elemento D.

El número de parejas de superficies que transmiten la potencia es uno menos que la suma de los discos de acero y bronce, y es además un número par si el diseño es tal que no se requieren cojinetes axiales.

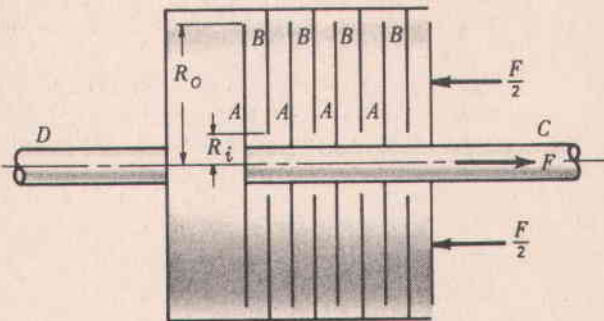


Fig. 14-1

$$n = n_{\text{acero}} + n_{\text{bronce}} - 1$$

Para el sistema mostrado, $n = 5 + 4 - 1 = 8$ parejas de superficies en contacto.

La capacidad de momento de torsión está dada por

$$T = FfR_f n$$

donde T = capacidad de momento, lb-pul

F = fuerza axial, lb

f = coeficiente de rozamiento

R_f = radio de rozamiento = $\frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right)$ si se supone que la presión de contacto es uniforme

$$= \frac{R_o + R_i}{2} \text{ si se supone desgaste uniforme}$$

R_o = radio exterior de contacto de las superficies, pul

R_i = radio interior de contacto de las superficies, pul

n = número de parejas de superficies en contacto.

La fuerza axial F está dada por

$$F = p\pi(R_o^2 - R_i^2)$$

donde p es la presión media.

La capacidad de potencia es

$$HP = TN/63.000$$

donde T = momento en el eje, lb-pul y N = velocidad de rotación, rpm.

Para desgaste uniforme, la variación de presión está dada por

$$p = \frac{C}{r} = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)r}$$

donde C es una constante y r es el radio del elemento diferencial mostrado en la figura 14-3.

EMBRAGUES CONICOS

UN EMBRAGUE CONICO debe su eficiencia a la acción de cuña de la parte cónica en la parte receptora.

(a) La capacidad de momento de torsión de un embrague cónico con sus partes ajustadas con base en presión uniforme es

$$T = \frac{Ff}{\sin \alpha} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) \right]$$

La capacidad de momento puede escribirse también como

$$T = Ff \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{3R_m b \sin^2 \alpha} \right)$$

donde T = momento, lb-pul

F = fuerza axial, lb

f = coeficiente de rozamiento

R_o = radio exterior de contacto, pul

R_i = radio interior de contacto, pul

R_m = radio medio = $\frac{1}{2}(R_o + R_i)$, pul

b = ancho de la cara, pul

α = ángulo del cono

$$\text{o } T = F_n f \left[\frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) \right] \quad \text{donde } F_n = p(2\pi R_m)(b).$$

(b) La capacidad de momento de un embrague cónico, con base en un desgaste uniforme, viene dada por

$$T = \frac{FfR_m}{\sin \alpha} \quad \text{o} \quad T = F_n f R_m$$

La variación de presión, suponiendo desgaste uniforme, es

$$p = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)r} \quad (\text{Véase la figura 14-8.})$$

$$\text{La presión máxima se presenta en el radio menor: } p_{\max} = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)R_i}$$

$$\text{La presión mínima se presenta en el radio mayor: } p_{\min} = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)R_o}$$

$$\text{Presión media} = \frac{F}{\pi(R_o^2 - R_i^2)}$$

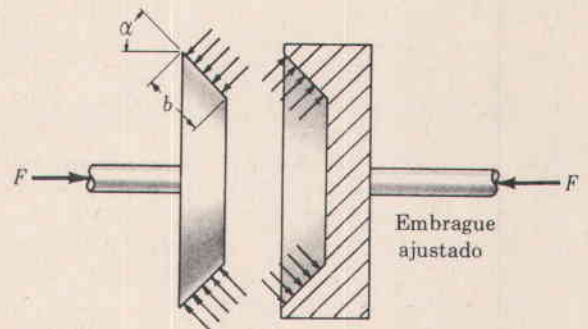


Fig. 14-2

ACOPLAMIENTO DE EMBRAGUES CONICOS. Un problema que se presenta con los embragues cónicos y no ocurre con los embragues de múltiples discos es la posibilidad de que se necesite una fuerza mayor para acoplar el embrague que la que se requiere durante la operación cuando el receptor y el cono giran a la misma velocidad. El análisis se complica por el hecho que la dirección de las fuerzas de rozamiento depende de la forma del acoplamiento, esto es, de la relación entre el movimiento rotatorio relativo y el movimiento axial relativo del receptor y el cono. Un procedimiento conservador consiste en suponer que no se presenta movimiento rotatorio relativo durante el acoplamiento, para lo cual la fuerza axial máxima F_e necesaria para acoplar el receptor y el cono es

$$F_e = F_n(\sin \alpha + f \cos \alpha)$$

Esta fuerza es la máxima requerida para obtener la fuerza normal deseada F_n , la cual a su vez desarrolla la fuerza de rozamiento que produce el momento de rozamiento deseado.

FUERZA AXIAL PARA MANTENER ACOPLADOS EL RECEPTOR Y EL CONO. La fuerza requerida para mantener acoplados el cono y el receptor, teniendo en cuenta el rozamiento, varía entre

$$F = F_n \sin \alpha \quad \text{y} \quad F = F_n(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Debido a la vibración, el rozamiento puede no ser muy confiable y es conservador suponer que la fuerza axial para mantener acopladas las partes la da el mayor valor de F : $F = F_n \sin \alpha$.

FUERZA AXIAL REQUERIDA PARA DESACOPLAR EL RECEPTOR Y EL CONO. Normalmente, con los ángulos de cono comúnmente usados, no se necesita una fuerza para desacoplar las partes, aun cuando es posible que si $f \cos \alpha > \sin \alpha$, sea necesaria una fuerza axial F_d para desacoplar las partes:

$$F_d = F_n(f \cos \alpha - \sin \alpha)$$

LA CAPACIDAD DE POTENCIA DE UN EMBRAGUE CONICO es la siguiente, de acuerdo con si se supone desgaste uniforme o presión uniforme:

$$\text{Desgaste uniforme: } H_p = \frac{TN}{63.000} = \frac{(F_n f D_m / 2) N}{63.000} = \frac{F f R_m}{\sin \alpha} \left(\frac{N}{63.000} \right)$$

$$\text{Presión uniforme: } H_p = \frac{TN}{63.000} = F_n f \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) \frac{N}{63.000} = \frac{F f}{\sin \alpha} \left(\frac{2}{3} \right) \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) \frac{N}{63.000}$$

donde F = fuerza axial, lb

f = coeficiente de rozamiento

R_o = radio exterior, pul

R_i = radio interior, pul

N = velocidad, rpm

α = ángulo del cono

$F_n = p(2\pi R_m)(b)$, donde p es la presión media, R_m es el radio medio del cono, y b es el ancho de la cara

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir la capacidad de momento de torsión de una pareja de superficies presionadas entre sí con una fuerza axial F . Suponer presión uniforme. (Véase la figura 14-3.)

Solución:

Considerar un área diferencial $dA = 2\pi r dr$. Fuerza diferencial normal $= dN = p dA = p(2\pi r dr)$. Fuerza diferencial de rozamiento $= dQ = f dN = f(p 2\pi r dr)$. Momento diferencial de rozamiento $= dT = r dQ = r(fp 2\pi r dr)$; integrando con p y f como constantes, el momento total es

$$T = 2\pi fp \int_{R_i}^{R_o} r^2 dr = 2\pi fp \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{3} \right)$$

La fuerza axial $F = p(\pi)(R_o^2 - R_i^2)$; de donde la presión media $p = \frac{F}{\pi(R_o^2 - R_i^2)}$.

Remplazando este valor de p en $T = 2\pi fp \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{3} \right)$, se obtiene $T = Ff \left[\frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) \right] = FfR_f$.

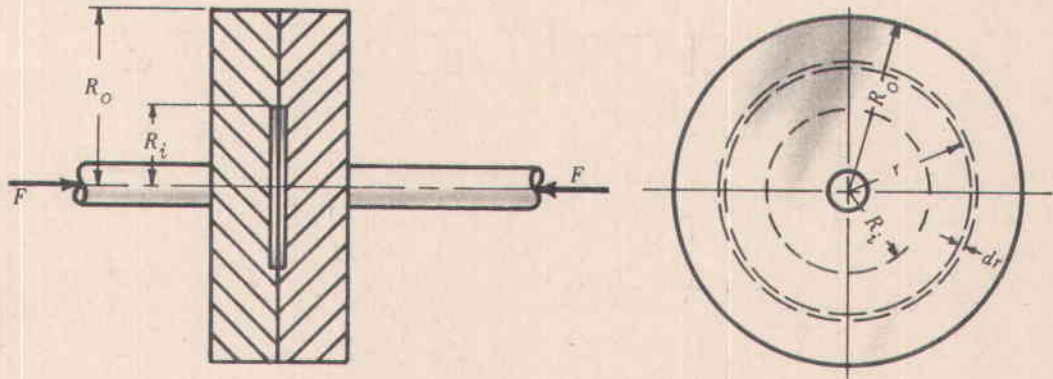


Fig. 14-3

2. Deducir la capacidad de momento de torsión de una pareja de superficies presionadas entre sí con una fuerza axial F . Suponer desgaste uniforme. (Véase la figura 14-3.)

Solución:

Cuando un embrague es nuevo, quizás es verdad que la presión es casi uniforme. Si las superficies son relativamente rígidas, la parte exterior, donde la velocidad es alta, se desgastará más que la parte interior. Después del desgaste inicial, es razonable suponer que la curva del perfil mantendrá su forma; o, que el desgaste de ahí en adelante será uniforme.

El desgaste uniforme puede expresarse de una manera diferente diciendo que en cualquier intervalo de tiempo el trabajo hecho por unidad de área es constante:

$$\frac{(\text{fuerza de rozamiento})(\text{velocidad})}{\text{área}} = \frac{(fp 2\pi r dr)(r\omega)}{2\pi r dr} = \text{constante } C'$$

o $p = C'/r\omega$. Entonces, como f y ω son constantes, $p = C/r$, donde C es una constante.

Otro método para demostrar que la presión varía inversamente con el radio es considerar que el desgaste δ es proporcional a la presión p y a la velocidad V . Así, $\delta = KpV = Kp(r\omega)$, o $p = C/r$, ya que δ y K son constantes y ω es fija para un embrague dado.

Como en el problema 1, el momento de rozamiento diferencial es $dT = r(fp 2\pi r dr)$; el momento de torsión total es

$$T = \int_{R_i}^{R_o} rf \left(\frac{C}{r} \right) 2\pi r dr = 2\pi fC \left(\frac{R_o^2 - R_i^2}{2} \right)$$

$$\text{Para encontrar } C: F = \int_{R_i}^{R_o} p(2\pi r dr) = \int_{R_i}^{R_o} (C/r)(2\pi r dr) = 2\pi C(R_o - R_i), \quad \text{o } C = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)}$$

Remplazando este valor de C en la ecuación de T : $T = Ff \left(\frac{R_o + R_i}{2} \right) = FfR_f$.

3. Comparar el radio de rozamiento con base en presión uniforme y en desgaste uniforme para dos casos:

(1) $R_o = 4$ pul, $R_i = 3,5$ pul; (2) $R_o = 4$ pul, $R_i = 1$ pul.

Solución:

(1) Presión uniforme, $R_f = \frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{4^3 - 3,5^3}{4^2 - 3,5^2} \right) = 3,76$ pul. Desgaste uniforme, $R_f = \frac{R_o + R_i}{2} = \frac{4 + 3,5}{2} = 3,75$ pul

(2) Presión uniforme, $R_f = \frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{4^3 - 1^3}{4^2 - 1^2} \right) = 2,8$ pul. Desgaste uniforme, $R_f = \frac{R_o + R_i}{2} = \frac{4 + 1}{2} = 2,5$ pul.

Así, para valores bajos de R_o/R_i la diferencia entre desgaste uniforme y presión uniforme es muy pequeña. A medida que R_o/R_i aumenta, la diferencia se hace mayor.

4. Hacer la gráfica de la relación entre el radio de rozamiento y el radio exterior (R_f/R_o) contra la relación entre el radio interior y el radio exterior (R_i/R_o), suponiendo presión uniforme y desgaste uniforme. (Véase la figura 14-4 para la solución.)

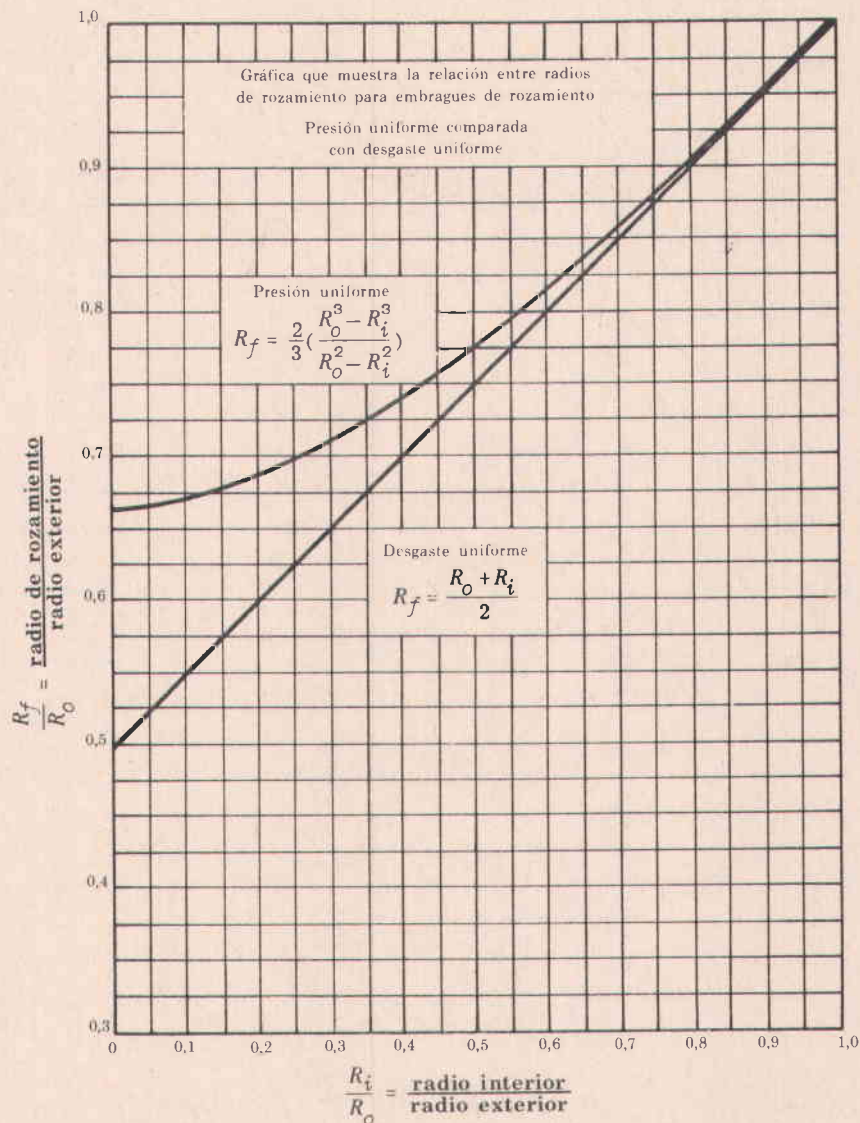


Fig. 14-4

5. Determinar las presiones máxima, mínima y media en un embrague de placas en el cual la fuerza axial es 1000 lb, el radio interior de contacto es $R_i = 2$ pul, el radio exterior es $R_o = 4$ pul. Se supone desgaste uniforme. (Véase la figura 14-5.)

Solución:

La variación de presión está dada por

$$p = \frac{C}{r} = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)(r)}$$

La presión máxima ocurre cuando $r = R_i$

$$p(\max) = \frac{1000}{2\pi(4 - 2)(2)} = 39,8 \text{ psi.}$$

La presión mínima ocurre en $r = R_o$

$$p(\min) = \frac{1000}{2\pi(4 - 2)(4)} = 19,9 \text{ psi.}$$

$$\text{Presión media } p = \frac{\text{fuerza}}{\text{área de contacto}} = \frac{F}{\pi(R_o^2 - R_i^2)} = \frac{1000}{\pi(4^2 - 2^2)} = 26,5 \text{ psi.}$$

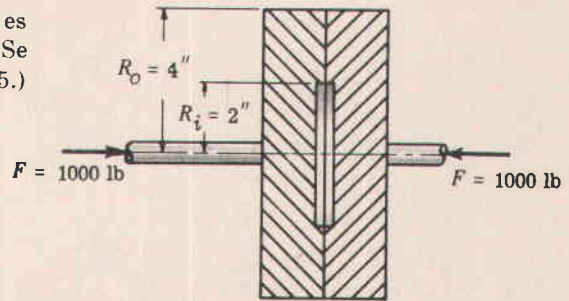


Fig. 14-5

6. Un embrague de múltiples discos tiene 4 discos de acero y 3 discos de bronce y cada superficie tiene un área de contacto de 4 pul² y un radio medio de 2 pul. El coeficiente de rozamiento es 0,25. ¿Cuál es la capacidad de potencia para una fuerza axial de 90 lb, si el embrague gira a 400 rpm? Suponer desgaste uniforme en las placas del embrague.

Solución:

$$T = FfR_f n = 90(0,25)(2)(6) = 270 \text{ lb-pul} \quad \text{HP} = TN/63.000 = 270(400)/63.000 = 1,71.$$

7. Un embrague de múltiples discos, de acero sobre bronce, debe transmitir 5 HP a 750 rpm. El radio interior de contacto es 1,50 pul y el radio exterior es 2,75 pul. El embrague opera en aceite con un coeficiente de rozamiento esperado de 0,10. (El aceite se usa para dar un acoplamiento más suave, una mejor disipación de calor, aun cuando se reduce la capacidad.) La presión media permisible es 50 psi, máximo. (Se usan presiones bajas de diseño con el fin de suministrar un tamaño suficiente para dar una buena capacidad de disipación de calor.)

- (1) ¿Cuál es el total de discos de acero y bronce requerido?
- (2) ¿Cuál es la presión media?
- (3) ¿Cuál es la fuerza axial requerida?
- (4) ¿Cuál es la presión máxima que se presenta?

Solución:

- (a) Primero se determina la capacidad de momento de un par de superficies en contacto, suponiendo desgaste uniforme.

$$T = Ff \left(\frac{R_o + R_i}{2} \right) = 834(0,10) \left(\frac{2,75 + 1,50}{2} \right) = 177 \text{ lb-pul}$$

$$\text{donde } F = p \pi (R_o^2 - R_i^2) = 50 \pi (2,75^2 - 1,50^2) = 834 \text{ lb.}$$

- (b) El momento total aplicado es $T = (\text{HP})(63.000)/N = 5(63.000)/750 = 420 \text{ lb-pul.}$

- (c) Número de parejas de superficies = $\frac{\text{momento total}}{\text{momento por pareja}} = \frac{420}{177} = 2,37$

Como el número debe ser par, usar 4 parejas de superficies con 3 discos de acero y 2 de bronce.

(d) Usando 4 parejas de superficies, puede usarse una presión reducida.

$$\text{Momento real por pareja de superficies} = \frac{\text{momento total}}{\text{parejas de superficies}} = \frac{420}{4} = 105 \text{ lb-pul}$$

(e) Hallar la fuerza real requerida: $T' = Ff \left(\frac{R_o + R_i}{2} \right)$, $105 = F(0,1) \left(\frac{2,75 + 1,50}{2} \right)$, $F = 495 \text{ lb}$.

$$\text{La presión media es } \frac{F}{A} = \frac{495}{\pi (2,75^2 - 1,50^2)} = 29,6 \text{ psi.}$$

(f) La presión máxima ocurre cuando $r = R_i$: $p(\text{max}) = \frac{F}{2\pi(R_o - R_i)r} = \frac{495}{2\pi(2,75 - 1,50)(1,50)} = 42 \text{ psi}$.

Respuestas: (1) Cuatro pares de superficies con 3 discos de acero y 2 discos de bronce, o un total de 5 discos.
(2) Presión media = 29,6 psi. (3) Fuerza axial = 495 lb. (4) Presión real máxima = 42 psi.

8. Un embrague de múltiples discos está compuesto de 5 discos de acero y 4 de bronce. El embrague se necesita para transmitir un momento de 160 lb-pul. Si el diámetro interior está restringido a 2 pul, determinar, (1) el diámetro exterior necesario para los discos, y (2) la fuerza axial necesaria. El coeficiente de rozamiento puede tomarse como 0,1 y la presión *media* no debe sobrepasar 50 psi. Suponer desgaste uniforme.

Solución:

Momento por pareja de superficies = $160/8 = 20 \text{ lb-pul}$. Entonces

$$20 = Ff \left(\frac{D_o + D_i}{4} \right) = \left[\frac{\pi}{4} (D_o^2 - D_i^2) p \right] f \left(\frac{D_o + D_i}{4} \right) = \left[\frac{\pi}{4} (D_o^2 - 2^2) (50) (0,1) \left(\frac{D_o + 2}{4} \right) \right]$$

de donde, por ensayo y error, $D_o \cong 2\frac{7}{8} \text{ pul}$.

$$\text{Para } D_o = 2\frac{7}{8} \text{ pul, } F = \frac{T}{f(D_o + D_i)/4} = 164 \text{ lb (y presión media} = \frac{164}{\frac{1}{4}\pi[(2\frac{7}{8})^2 - 2^2]} = 49 \text{ psi)}.$$

9. ¿En qué condiciones es más apropiado suponer presión uniforme en lugar de desgaste uniforme, al hacer el análisis de un embrague?

Solución:

Es más apropiado suponer presión uniforme cuando los discos son flexibles, para permitir deformación cuando ocurre desgaste.

10. Un motor que gira a una velocidad *constante* ω conduce una carga mediante una disposición de engranajes de reversa y un embrague, como se muestra en la figura 14-6. Se dispone de un freno para llevar la carga al reposo. Deben compararse dos métodos de operación:
(1) En el primer método, el embrague está acoplado y la carga se lleva a la velocidad del motor

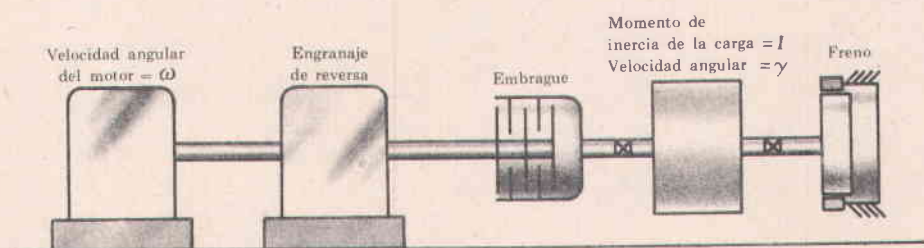


Fig. 14-6

ω en t segundos. El embrague se desacopla y el freno lleva la carga al reposo. El engranaje de reversa es acoplado para invertir el sentido de la rotación y la carga es acelerada hasta la velocidad $-\omega$.

- (2) En el segundo método, el embrague está acoplado y la carga se lleva a la velocidad ω en t segundos. La inversión en el sentido de giro se obtiene desacoplando el embrague, cambiando el engranaje de reversa y acoplando de nuevo el embrague. El motor gira hasta que la carga rota a $-\omega$.

Comparar el trabajo de rozamiento disipado como calor en los dos métodos diferentes de operación.

Solución:

A. Considerando primero el método (1).

Sea T = momento de rozamiento desarrollado por el embrague (el cual es también el momento del motor) y $d\theta$ = ángulo diferencial de rotación del motor. Entonces el trabajo hecho por el motor para llevar la carga a la velocidad ω es

$$W_m = \int_0^t T d\theta = \int_0^t T \omega dt$$

ya que $d\theta/dt = \omega$ (la velocidad constante del motor). Pero el momento de torsión dado por el embrague sobre la carga produce una aceleración angular α de la carga. Entonces $T = I\alpha$, donde I es el momento polar de inercia de la masa de la carga, y

$$W_m = \int_0^t I\alpha\omega dt = I\omega \int_0^t \alpha dt$$

Como $d\gamma/dt = \alpha$, donde γ es la velocidad angular de la carga, variando desde 0 hasta la velocidad del motor ω , el trabajo hecho por el motor es

$$W_m = I\omega \int_0^\omega d\gamma = I\omega[\omega - 0] = I\omega^2$$

El trabajo de rozamiento disipado como calor, W_f , es la energía entregada por el motor menos la energía cinética de rotación:

$$W_f = W_m - \frac{1}{2}I\omega^2 = I\omega^2 - \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}I\omega^2$$

Si el freno se aplica a la carga con el embrague desacoplado, la energía perdida por rozamiento es la energía cinética de las partes en rotación, o sea $\frac{1}{2}I\omega^2$. Si se acopla el engranaje de reversa y la carga se lleva a la velocidad del motor $-\omega$, el trabajo hecho por rozamiento se obtiene en forma similar al anterior y es $\frac{1}{2}I\omega^2$.

La energía total perdida se compone de tres partes: (a) La energía perdida por rozamiento en el embrague cuando la carga va desde la velocidad 0 hasta ω , $\frac{1}{2}I\omega^2$. (b) La energía perdida al frenar $\frac{1}{2}I\omega^2$. (c) La energía perdida en el embrague cuando la carga va de velocidad 0 a $-\omega$, $\frac{1}{2}I\omega^2$. Así la energía total perdida en el método (1) es $(3/2)I\omega^2$.

El tiempo para la inversión completa es t segundos para ir de 0 a ω , más t segundos para ir de ω a 0, más t segundos para ir de 0 a $-\omega$. (Esto supone que el tiempo de frenada es igual al tiempo de aceleración y que no se da tolerancia para el acoplamiento y desacoplamiento del embrague o para acoplar el engranaje de reversa.) El tiempo total es $3t$ segundos, en el método (1).

B. Considerando ahora el método (2).

El trabajo de rozamiento para llevar la carga a la velocidad del motor ω es, como antes, $\frac{1}{2}I\omega^2$.

Si se desacopla el embrague, se acopla el engranaje de reversa, y se acopla de nuevo el embrague, con el motor funcionando a velocidad constante ω , el trabajo hecho por el motor es

$$\text{trabajo} = \int_{t_1}^{t_2} T\omega dt = \int_{t_1}^{t_2} -I\alpha\omega dt = -I\omega \int_{+\omega}^{-\omega} d\gamma = 2I\omega^2$$

Obsérvese que el momento del motor se aplica a la entrada del engranaje de reversa; por tanto el sentido del momento del motor es opuesto al del momento aplicado a la carga, esto es $T = -I\alpha$.

Como la energía cinética cuando la carga está rotando a ω es la misma que cuando la carga está rotando a $-\omega$, todo el trabajo hecho por el motor aparece como calor en el deslizamiento del embrague. Así, la energía total usada en el trabajo de rozamiento en el método (2) es $(\frac{1}{2}I\omega^2 + 2I\omega^2) = (5/2)I\omega^2$.

El tiempo total para un ciclo completo, por el método (2), es t segundos para llevar la carga de velocidad 0 a ω , más $2t$ segundos para ir de ω a $-\omega$, o sea, un total de $3t$ segundos.

Así, el tiempo para un ciclo completo es el mismo para ambos métodos, pero el método (1) es más eficiente que el (2). El método (1) pierde $(3/2)I\omega^2$ en trabajo de rozamiento, mientras el método (2) pierde $(5/2)I\omega^2$ en trabajo de rozamiento.

Invertir por el método (2) es realmente más rápido que por el (1) debido al menor tiempo necesario por la manipulación del freno, el embrague y el engranaje.

11. Deducir la capacidad de momento de torsión de un embrague cónico con base en la hipótesis que la presión entre el cono y el receptor es uniforme. (Véase la figura 14-7.)

Solución:

- (a) Considerar un elemento diferencial encerrado por círculos de radios r y $(r + dr)$. El área del elemento diferencial es $dA = 2\pi r \left(\frac{dr}{\sin \alpha} \right)$.

- (b) La integral de los momentos diferenciales es

$$\int dT = \int_{R_i}^{R_o} (2\pi r \frac{dr}{\sin \alpha}) p f r$$

$$T = \frac{2\pi p f}{\sin \alpha} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{3} \right)$$

- (c) Se define la fuerza F_n como la fuerza debida a la presión aplicada al área como si fuera estirada en un plano:

$$F_n = p (2\pi R_m b)$$

- (d) Para relacionar F_n con la fuerza axial F , se considera un elemento diferencial con ángulo central $d\phi$. El área diferencial es

$$dA = 2\pi R_m b (d\phi / 2\pi) = R_m b d\phi$$

La fuerza normal diferencial es $dN = p R_m b d\phi$. La componente horizontal de la fuerza diferencial es dF ; entonces

$$\int dF = \int_0^{2\pi} p R_m b d\phi \sin \alpha \quad \text{o} \quad F = 2\pi p R_m b \sin \alpha = F_n \sin \alpha$$

- (e) Reemplazando la presión p de la ecuación de (c) en la ecuación de (b) se obtiene

$$T = \frac{F_n f}{R_m b \sin \alpha} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{3} \right) = F_n f \left[\frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) \right] = \frac{F f}{\sin \alpha} \left[\frac{2}{3} \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{R_o^2 - R_i^2} \right) \right]$$

ya que $R_m = \frac{1}{2}(R_o + R_i)$, $(b \sin \alpha) = R_o - R_i$, y $F_n = F / (\sin \alpha)$.

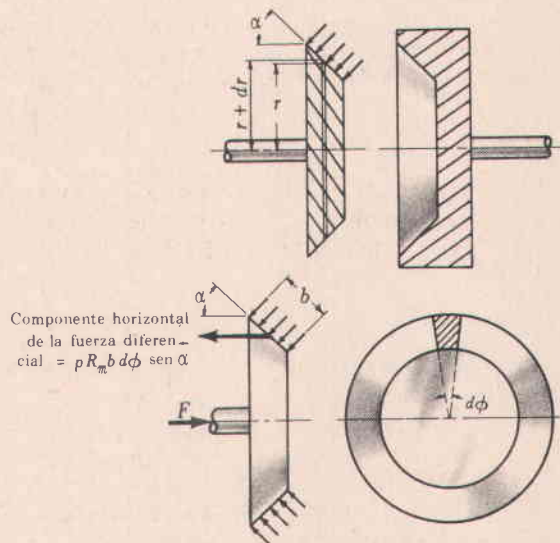


Fig. 14-7

12. Deducir la capacidad de momento de torsión de un embrague cónico, con base en la hipótesis de un desgaste uniforme. (Véase la figura 14-8.)

Solución:

- (a) Para que el desgaste sea uniforme, el trabajo hecho por unidad de área debe ser constante. Se considera un

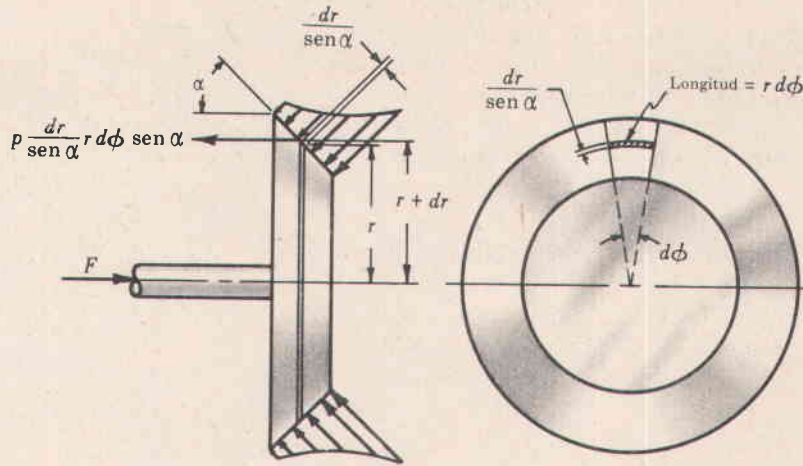


Fig. 14-8

elemento diferencial encerrado por círculos de radios r y $(r + dr)$.

$$\frac{\text{trabajo hecho en } N \text{ rev}}{\text{área}} = \frac{pf[2\pi r (dr/\sin \alpha)] (2\pi r N)}{2\pi r (dr/\sin \alpha)} = \text{constante}$$

o $p = C/r$, donde C es una constante.

Este resultado también puede obtenerse considerando que el desgaste en cualquier punto es constante y es proporcional al producto de la presión por la velocidad. Así, desgaste = $KpV = Kp(\omega r) = \text{constante}$, o $p = C/r$, ya que ω es constante.

$$(b) \text{ Momento } T = \int_{R_i}^{R_o} pf(2\pi r \frac{dr}{\sin \alpha}) r = 2\pi Cf \left(\frac{R_o^2 - R_i^2}{2 \sin \alpha} \right),$$

donde $C = pr$.

$$(c) F_n = \int_{R_i}^{R_o} p(2\pi r \frac{dr}{\sin \alpha}) = \frac{2\pi C}{\sin \alpha} (R_o - R_i)$$

(d) Para eliminar C , se reemplaza el valor de C de la ecuación de (c) en la ecuación de (b) y se obtiene

$$T = F_n f R_m$$

(e) La relación entre F_n y F puede obtenerse estableciendo primero la fuerza normal diferencial sobre el área diferencial considerada como un rectángulo con dimensiones diferenciales $dr/(\sin \alpha)$ y $r(d\phi)$:

$$dF_n = p(dr/\sin \alpha)r d\phi$$

(f) La suma de las componentes horizontales de las fuerzas diferenciales es F :

$$F = \int_{R_i}^{R_o} \int_0^{2\pi} p \frac{dr}{\sin \alpha} r d\phi \sin \alpha = \int_{R_i}^{R_o} \int_0^{2\pi} \frac{C}{r} (dr) r d\phi$$

$$= 2\pi C (R_o - R_i)$$

De (c), $2\pi C (R_o - R_i) = F_n \sin \alpha$; así, $F = F_n \sin \alpha$, lo mismo que para presión uniforme.

Haciendo $F_n = F/(\sin \alpha)$ en (d), el momento de torsión está dado por

$$T = F_n f R_m = \frac{F}{\sin \alpha} f R_m$$

13. Un embrague cónico de superficie blanda debe manejar un momento de 1865 lb-pul a 1250 rpm. El diámetro mayor del embrague es 13,75 pul, el ángulo del cono es $6\frac{1}{4}^\circ$, el ancho de la cara b , es 2,50 pul, y el coeficiente de rozamiento es 0,20. Con referencia a la figura 14-9 determinar:

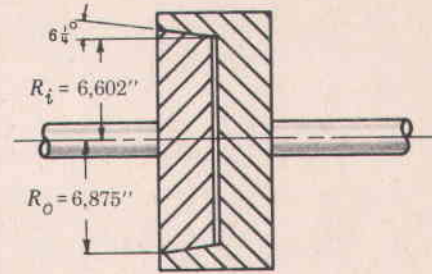


Fig. 14-9

- La fuerza axial F requerida para transmitir el momento.
- La fuerza axial requerida para embragar, F_e , si el acoplamiento ocurre cuando el embrague no está girando.
- La presión normal media p sobre las superficies de contacto, cuando se transmite el momento máximo.
- La presión normal máxima suponiendo desgaste uniforme.

Solución:

$$(a) R_m = R_o - \frac{1}{2} b \sin \alpha = \frac{1}{2} (13,75) - \frac{1}{2} (2,50 \sin 6\frac{1}{4}^\circ) = 6,74 \text{ pul}$$

$$T = \frac{F}{\sin \alpha} f R_m, \quad 1865 = \frac{F}{\sin 6\frac{1}{4}^\circ} (0,20) (6,74), \quad F = 151 \text{ lb}$$

$$(b) F_e = F_n (\sin \alpha + f \cos \alpha) = \frac{T}{f R_m} (\sin \alpha + f \cos \alpha) = \frac{1865}{0,20 (6,74)} (\sin 6\frac{1}{4}^\circ + 0,20 \cos 6\frac{1}{4}^\circ) = 428 \text{ lb}$$

$$(c) p = \frac{F}{\pi (R_o^2 - R_i^2)} = \frac{151}{\pi (6,875^2 - 6,602^2)} = 13,0 \text{ psi}, \quad \text{donde } R_i = R_o - b \sin \alpha = 6,60 \text{ pul}$$

$$(d) p(\max) = \frac{F}{2\pi (R_o - R_i) R_i} = \frac{151}{2\pi (6,875 - 6,60) (6,60)} = 13,3 \text{ psi}$$

14. Considerando el mismo embrague y las mismas condiciones del problema 13, pero suponiendo presión uniforme, determinar:

- La fuerza axial F requerida para transmitir el momento.
- La fuerza axial requerida para embragar, F_e , si el acoplamiento ocurre cuando el embrague no está girando.
- La presión normal media p sobre las superficies de contacto cuando se transmite el momento máximo.

Solución:

$$(a) T = F f \left(\frac{R_o^3 - R_i^3}{3 R_m b \sin^2 \alpha} \right), \quad 1865 = F (0,20) \left[\frac{6,875^3 - 6,60^3}{3 (6,74) (2,50) (0,109^2)} \right], \quad F = 148 \text{ lb}$$

$$(b) F_e = F_n (\sin \alpha + f \cos \alpha) = 1360 (\sin 6\frac{1}{4}^\circ + 0,20 \cos 6\frac{1}{4}^\circ) = 421 \text{ lb}, \quad \text{donde } F_n = F / \sin \alpha = 1360 \text{ lb.}$$

$$(c) F_n = p (2\pi R_m b), \quad 1360 = p (2\pi) (6,74) (2,50), \quad p = 12,9 \text{ psi}$$

15. Comparar la capacidad de potencia de dos embragues, uno de los cuales es de múltiples discos y otro cónico. Ambos embragues operan a la misma velocidad, tienen el mismo diámetro medio, y en ambos se ejerce la misma carga axial. El coeficiente de rozamiento es el mismo para los dos embragues. El embrague de múltiples discos tiene 4 discos de acero y 3 de bronce. El ángulo total del cono en el embrague cónico es de 20° (ángulo del cono 10°). Suponer desgaste uniforme en ambos embragues.

Solución:

$$\frac{T (\text{embrague discos})}{T (\text{embrague cónico})} = \frac{6 F f R_m}{(F / \sin \alpha) f R_m} = 6 \sin \alpha = 6 \sin 10^\circ = 1,044$$

Así, para las dimensiones dadas, capacidad de potencia del embrague de discos = $1,044 \times$ capacidad de potencia del embrague cónico.

16. Un embrague cónico, forrado en asbesto, debe transmitir 900 lb-pul después de acoplado. Si la fuerza axial máxima disponible es de 200 lb, ¿cuál es el ancho de la cara requerido? El ángulo total del cono es 24° y la presión media máxima está limitada a 16 psi. El coeficiente de rozamiento es 0,20. Suponer desgaste uniforme.

Solución:

$$\text{Fuerza para acoplar, } F_e = F_n(\sin \alpha + f \cos \alpha), \quad 200 = F_n(\sin 12^\circ + 0,20 \cos 12^\circ), \quad F_n = 496 \text{ lb}$$

$$T = F_n f R_m, \quad 900 = 496(0,20)R_m, \quad R_m = 9,07 \text{ pul. Usar } R_m = 9\frac{1}{8} \text{ pul.}$$

$$F_n = p(2\pi R_m b), \quad 496 = 16(2\pi)(9\frac{1}{8})b, \quad b = 0,54 \text{ pul. Usar } b = \frac{9}{16} \text{ pul.}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

17. En un embrague de múltiples discos, el ancho radial del material de rozamiento debe ser $\frac{1}{5}$ del radio máximo. El coeficiente de rozamiento es 0,25. (a) ¿Cuántos discos se requieren para transmitir 70 HP a 3000 rpm? El diámetro máximo del embrague no puede exceder 10 pul. La fuerza axial está limitada a 150 lb. (b) ¿Cuál es la presión unitaria media sobre cada superficie de contacto? Resp. 11 discos, 4,64 psi
18. Un embrague de múltiples discos tiene 9 placas con superficies de contacto de 2 pul de diámetro interior y 4 pul de diámetro exterior. Si el coeficiente de rozamiento es 0,2 y la presión normal media máxima permisible es 40 psi, ¿cuál es la fuerza de operación requerida y cuántos HP puede entregar el embrague a 500 rpm? Resp. 377 lb, 7,2 HP
19. Un embrague de discos consta de dos discos de acero en contacto con un disco forrado en tela de asbesto, con un radio exterior de 10 pul y uno interior de 8 pul. Determinar la potencia en HP que puede transmitirse a 1000 rpm, si el coeficiente de rozamiento es 0,35 y los discos están presionados entre sí por una fuerza axial de 2000 lb. Resp. 100 HP
20. Un embrague de múltiples discos tiene seis pares de superficies de contacto de acero y acero forrado en asbesto, alternativamente. Los diámetros exterior e interior de las superficies de contacto son 10 y 7 pul respectivamente. ¿Qué potencia puede transmitirse a 600 rpm, si el coeficiente de rozamiento es 0,2 y la fuerza axial es 100 lb? Resp. 4,86 HP
21. Un embrague cónico forrado en cuero transmite potencia a 1200 rpm. El ángulo total del cono es 20° (ángulo del cono 10°). El ancho de la cara de las superficies de contacto es $3\frac{1}{2}$ pul. El coeficiente de rozamiento es 0,25. Determinar el diámetro medio necesario del embrague para transmitir 22 HP. La presión media máxima es 10 psi. Resp. Diámetro medio = 9,13 pul; usar $9\frac{1}{8}$ pul
22. Un embrague cónico forrado en cuero debe transmitir 20 HP a 1000 rpm. El ángulo del cono es 10° ($\alpha = 10^\circ$) y el diámetro medio de las superficies de contacto es 8 pul. El coeficiente de rozamiento es 0,3. Determinar, (a) el ancho requerido b para limitar la presión de contacto a un valor medio máximo de 10 psi, (b) la carga axial necesaria para embragar, con ambas partes estacionarias, para obtener la capacidad de momento requerida. Suponer desgaste uniforme. Resp. (a) 4,17 pul; usar $4\frac{1}{4}$ pul. (b) 493 lb
23. Un embrague cónico con superficies de hierro fundido y coeficiente de rozamiento de 0,2 debe transmitir 40 HP a 500 rpm. El diámetro máximo está limitado a 12 pul. El ángulo del cono, α , es 15° . La presión media está limitada alrededor de 50 psi. Determinar, (a) el ancho de la cara b , y (b) la fuerza requerida para mantener acoplado el embrague. Suponer desgaste uniforme. Resp. (a) $b = 2,32$ pul (solución por ensayo y error), usar $b = 2\frac{5}{8}$ pul lo cual da una presión media de 52 psi. (b) 1150 lb

24. Un embrague cónico blando tiene un ángulo de cono de 10° , un diámetro medio de 12 pul, y un ancho en la cara de 4 pul. Usando un coeficiente de rozamiento de 0,2, con la suposición que el desgaste es uniforme, y una presión media de 10 psi, para una velocidad de 500 rpm, determinar, (a) la fuerza requerida para acoplar el embrague, y (b) la potencia que puede transmitirse. Resp. 560 lb, 14,3 HP
25. Un embrague cónico blando debe manejar un momento de 1900 lb-pul a 1200 rpm. El diámetro mayor del embrague es 14 pul y el ángulo comprendido es 20° . El ancho de la cara es 3 pul. Usando un coeficiente de rozamiento de 0,2 determinar, (a) la fuerza axial requerida para acoplar el embrague, (b) la presión unitaria normal requerida cuando el embrague opera a plena capacidad. Suponer presión uniforme. Resp. 523 lb, 11,1 psi
26. Un embrague cónico blando debe manejar un momento de 1865 lb-pul a 1250 rpm. El diámetro mayor del embrague es 13,75 pul y el ángulo comprendido es $12,5^\circ$. El ancho de la cara de las superficies de contacto es 2,5 pul. Usando un coeficiente de rozamiento de 0,20 determinar, (a) la fuerza (F_e) para acoplar el embrague, (b) la presión unitaria normal requerida sobre las superficies de contacto cuando el embrague opera a plena capacidad. Resp. 428 lb, 13,15 psi
27. Un embrague cónico está montado sobre un eje que transmite potencia a 225 rpm. El diámetro pequeño del cono es 9 pul, la cara del cono tiene 2 pul y forma un ángulo de 15 grados con la horizontal. Determinar la fuerza axial necesaria para acoplar el embrague de modo que transmita 6 HP, si el coeficiente de rozamiento entre las superficies de contacto es 0,25. ¿Cuál es la presión máxima sobre las superficies de contacto, suponiendo desgaste uniforme? Resp. 706 lb, 24,9 psi
28. Un embrague cónico de superficie blanda tiene un ángulo comprendido de 20 grados, un diámetro medio de 12 pul, y ancho en la cara de 4 pulgadas. Usando un coeficiente de rozamiento de 0,2 pul y una presión media admisible de 10 psi, determinar la fuerza requerida para acoplar el embrague y la potencia que puede transmitirse a 500 rpm. Resp. 560 lb, 14,4 HP
29. Una máquina desarrolla 40 HP a 1250 rpm y está acoplada con un embrague cónico integral con el volante. El cono tiene un ángulo en su cara de 12,5 grados y un diámetro medio de 14 pul. El coeficiente de rozamiento es 0,20 y la presión normal sobre la cara del embrague no debe exceder 12 psi. Determinar el ancho de la cara requerida y la fuerza necesaria para acoplar el embrague, suponiendo desgaste uniforme. Resp. 2,96 pul, 592 lb
30. Un embrague cónico forrado en cuero tiene una superficie de contacto con un radio medio de 15 pul y transmite 20 HP cuando gira a 800 rpm. Para un ángulo del cono de 20 grados y un coeficiente de rozamiento de 0,30, determinar la fuerza axial requerida para mantener las superficies en contacto. Resp. 121,5 lb

Capítulo 15

Diseño de Frenos

LOS FRENOS son elementos de máquinas que absorben energía cinética o potencial en el proceso de detener una pieza que se mueve o de reducirle la velocidad. La energía absorbida se disipa en forma de calor. La capacidad de un freno depende de la presión unitaria entre las superficies de frenado, del coeficiente de rozamiento y de la capacidad del freno para disipar el calor equivalente a la energía que está siendo absorbida. El comportamiento de un freno es análogo al de un embrague, con la diferencia que el embrague conecta una parte móvil con otra parte móvil, mientras que el freno conecta una parte móvil a una estructura.

LOS FRENOS DE ZAPATA EXTERNA O DE BLOQUE constan de zapatas o bloques presionados contra la superficie de un cilindro giratorio llamado tambor del freno. La zapata puede estar rígidamente montada sobre una palanca articulada, como muestra la figura 15-1, o puede estar articulada a la palanca, como muestra la figura 15-2.

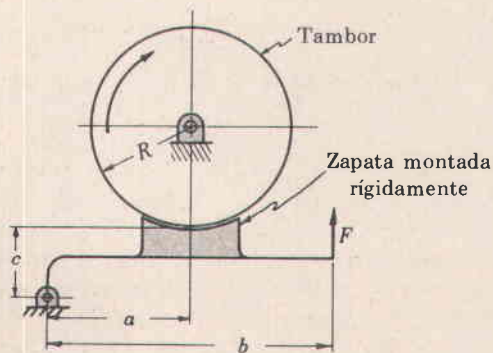


Fig. 15-1

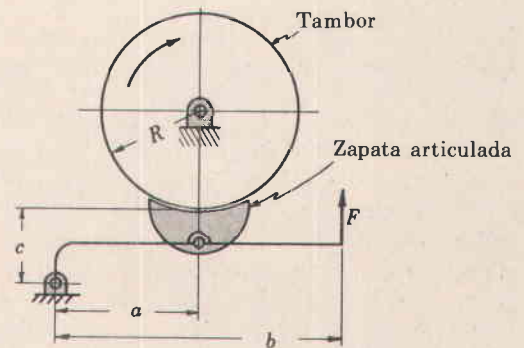


Fig. 15-2

El diseño de un **FRENO DE BLOQUE SENCILLO** se puede hacer con base en el análisis de fuerzas y momentos de la palanca y de la zapata, a manera de un cuerpo libre, como muestra la figura 15-3. Se puede suponer que la fuerza normal N y la fuerza de rozamiento fN actúan en el punto medio de contacto de la zapata, sin cometer un error apreciable, para ángulos θ menores de 60° . Sumando momentos alrededor de la articulación fija O ,

$$(N+W)a - fNc - Fb = 0 \quad \text{o} \quad F = \frac{(N+W)a - fNc}{b}$$

Obsérvese que para una rotación del tambor en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, la fuerza de rozamiento fN ayuda a la fuerza F en la aplicación del freno y el freno es parcialmente **autoactuante**. Para un coeficiente de rozamiento dado, el freno puede diseñarse para que sea completamente autoactuante (o autocerrante). Para que esta condición exista, F debe ser igual a cero o negativo en la ecuación anterior. Podemos suponer también que el peso W es despreciable; entonces

$$F = \frac{Na - fNc}{b} \leq 0$$

es decir, que cuando $\frac{a}{c} \leq f$ el freno es autocerrante.

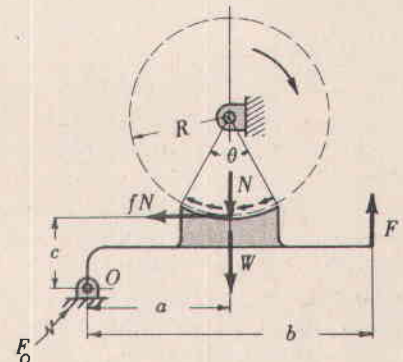


Fig. 15-3

El momento de frenado T para una situación autocerrante es

$$T = fNR \text{ lb-pul}$$

donde f = coeficiente de rozamiento

N = fuerza normal total, en lb

R = radio del tambor del freno, en pul

Cuando el ángulo de contacto es grande, digamos 60° o más, puede resultar un error apreciable al suponer que la fuerza de rozamiento normal actúa en el punto medio de contacto de la zapata. Un análisis más preciso demuestra que la fuerza de rozamiento fN es desplazada lejos de la superficie del tambor, hasta un punto D , situado a una distancia h del centro del tambor, para una zapata articulada, como muestra la figura 15-4. La zapata articulada es la construcción más frecuente cuando se utilizan zapatas externas largas. El momento de frenado T es ahora

$$T = fNh = fN \left(\frac{4R \sin \frac{1}{2}\theta}{\theta + \sin \theta} \right) \quad (\text{Véase el problema 5.})$$

donde $h = \frac{4R \sin \frac{1}{2}\theta}{\theta + \sin \theta}$. Esto se basa en la suposición de que el desgaste en la dirección de la fuerza normal resultante N es uniforme, lo cual significa que la presión p_n varía como el coseno del ángulo ϕ o

$$p_n = C \cos \phi$$

donde C es una constante igual a $\frac{2N}{wR(\theta + \sin \theta)}$, y w es el ancho de la zapata del freno, en pul.

La magnitud de h determina, entonces, la localización de la articulación, para una zapata articulada. Se satisfacen dos condiciones: (1) La zapata es un elemento sometido a dos fuerzas y la resultante de la fuerza normal y de la fuerza de rozamiento debe pasar a través de la articulación. (2) La distribución de presión es como se había supuesto. Si la articulación de la zapata está localizada a una distancia diferente de la h calculada, el momento de la fuerza normal resultante y de la fuerza de rozamiento alrededor de la articulación será igual a cero, pero ahora la distribución de presiones supuesta no puede existir. En consecuencia, la presión debe cambiar y ocurrirá un desgaste mayor en el borde principal o de salida. Sin embargo, si la articulación está localizada a una distancia pequeña del valor teórico de h basado en la distribución de presión $p_n = C \cos \phi$, se puede utilizar la ecuación anterior, sin error apreciable. La articulación también puede localizarse en cualquier punto a lo largo de la resultante de las fuerzas normal y de rozamiento, sin que se afecte la distribución de presión supuesta.

La presión media está dada por $p_{av} = \frac{2C \sin \frac{1}{2}\theta}{\theta}$.

LOS FRENOS DE DOBLE ZAPATA se utilizan comúnmente para reducir las cargas en el eje y en los cojinetes, para obtener mayor capacidad y para reducir la cantidad de calor generado por pulgada cuadrada. (Véase la figura 15-5.) La fuerza normal N_L que actúa sobre la zapata izquierda no es necesariamente igual a la fuerza normal N_R que actúa sobre la zapata derecha. Para frenos de doble bloque, cuyas zapatas tengan ángulos de contacto pequeños, digamos de menos de 60° , el momento de frenado puede aproximarse por

$$T = f(N_L + N_R)R$$

Si el ángulo de contacto de la zapata es mayor de 60° , se requiere una evaluación más precisa del momento de frenado para las zapatas articuladas, el cual está dado, entonces, por

$$T = f(N_L + N_R) \left(\frac{4R \sin \frac{1}{2}\theta}{\theta + \sin \theta} \right)$$

Cuando se vayan a utilizar zapatas rígidas largas se aplicará un análisis similar al de las zapatas internas, que se presenta en la figura 15-6.

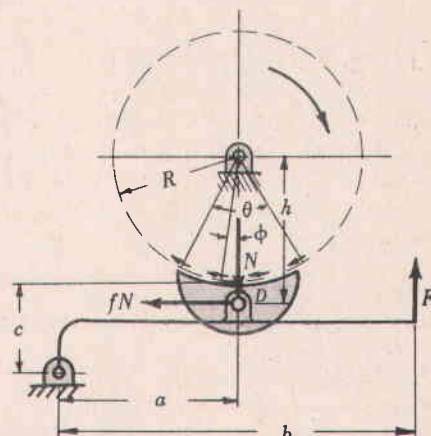


Fig. 15-4

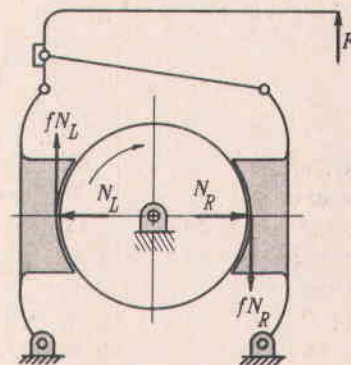


Fig. 15-5

El diseño de **FRENOS DE ZAPATA INTERNA** del tipo simétrico que se muestra en la figura 15-6, puede aproximarse por las ecuaciones dadas a continuación.

El momento de frenado T puede determinarse por

$$T = fwr^2 \left(\frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{\sin \theta_m} \right) (p_m + p'_m)$$

donde f = coeficiente de rozamiento

w = ancho de la cara de la zapata, en pul

r = radio interno del tambor, en pul

θ_1 = ángulo central comprendido desde la articulación de la zapata hasta el talón del revestimiento, en grados

θ_2 = ángulo central comprendido desde la articulación de la zapata hasta la punta del revestimiento, en grados

p_m = presión máxima, en psi (zapata derecha)

p'_m = presión máxima, en psi (zapata izquierda) = $\frac{cFp_m}{M_n + M_f}$

Lo anterior se basa en la distribución de presión supuesta

$$p = p_m \frac{\sin \theta}{\sin \theta_m}$$

donde θ_m = ángulo central comprendido desde la articulación de la zapata hasta el punto de máxima presión, en grados

$$\theta_m = 90^\circ \text{ si } \theta_2 > 90^\circ, \quad \theta_m = \theta_2 \text{ si } \theta_2 < 90^\circ.$$

El momento M_f de las fuerzas de rozamiento con respecto a la articulación de la zapata puede determinarse por

$$M_f = \frac{f p_m w r}{\sin \theta_m} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta (r - a \cos \theta) d\theta$$

donde a = distancia desde el centro del tambor hasta la articulación de la zapata, en pul.

El momento M_n de las fuerzas normales con respecto a la articulación de la zapata puede determinarse por

$$M_n = \frac{p_m w r a}{\sin \theta_m} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta$$

La fuerza actuante F puede determinarse igualando a cero la suma de los momentos alrededor del pasador. Para una rotación del tambor en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, la zapata

derecha tiene propiedades autoactuantes, $F = \frac{M_n - M_f}{c}$; para la zapata izquierda $F = \frac{M'_n + M'_f}{c}$

donde c = brazo del momento de la fuerza actuante F , en pul, $M'_n = \frac{M_n p'_m}{p_m}$, $M'_f = \frac{M_f p'_m}{p_m}$.

Las ecuaciones anteriores se basan en las siguientes hipótesis:

- 1) La presión normal en cualquier punto de contacto con la zapata es proporcional a su distancia vertical desde el punto de articulación.
- 2) La zapata es rígida.
- 3) El coeficiente de rozamiento no cambia con la presión y la velocidad.

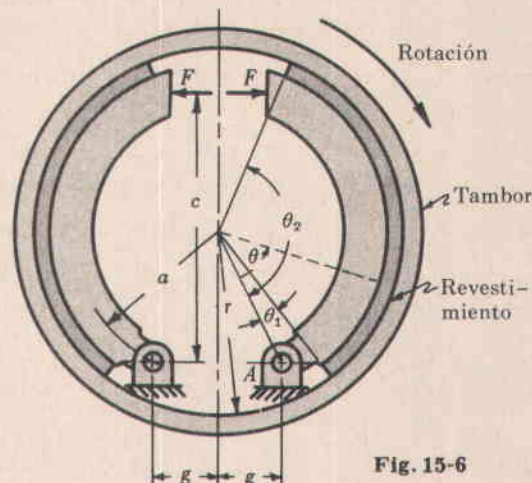


Fig. 15-6

LOS FRENOS DE BANDA constan de una banda flexible enrollada parcialmente alrededor del tambor; se accionan halando la banda fuertemente contra el tambor. La capacidad del freno depende del ángulo de abrazamiento, del coeficiente de rozamiento y de las tensiones en la banda. En la figura 15-7 se muestra un freno simple de banda. Para este tipo de freno el sentido de rotación del tambor es tal que la banda anclada al marco constituye el ramal tenso F_1 , como se muestra.

En cuanto a correas con velocidad cero, la relación entre el ramal tirante y el ramal flojo de la banda es

$$F_1/F_2 = e^{f\alpha}$$

donde F_1 = tensión en el ramal tirante de la banda, en lb

F_2 = tensión en el ramal flojo de la banda, en lb

e = base de los logaritmos naturales

f = coeficiente de rozamiento

α = ángulo de abrazamiento, en radianes

La capacidad de momento de frenado, T , es

$$T = (F_1 - F_2)r \text{ lb-pul}$$

donde r = radio del tambor del freno, en pul. Este tipo de freno de banda no tiene propiedades autocerrantes.

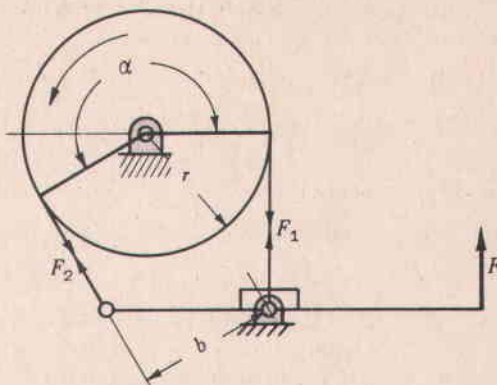


Fig. 15-7

La figura 15-8 muestra un freno simple de banda de doble acción. Este tipo de diseño funciona igualmente bien para cualquier sentido de rotación, ya que los brazos de los momentos de las tensiones en el ramal flojo y en el tirante son iguales.

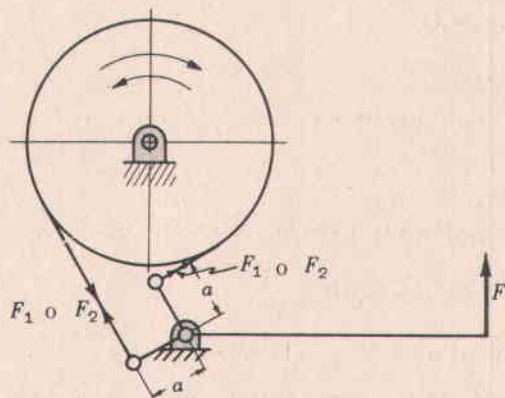


Fig. 15-8

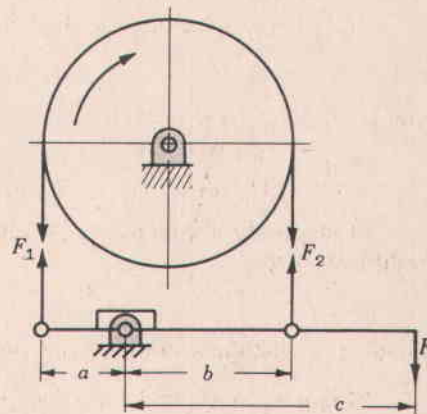


Fig. 15-9

El freno de banda diferencial mostrado en la figura 15-9 tiene propiedades autoactuantes y puede diseñarse para que sea autocerrante. El freno de banda diferencial se diseña generalmente de modo que el sentido de rotación del tambor permita que el ramal tirante de la banda ayude en la aplicación del freno. Con referencia a la figura 15-9, si tomamos la suma de momentos con respecto a la articulación, tendremos

$$Fc + F_1 a - F_2 b = 0 \quad \text{o} \quad F = \frac{F_2 b - F_1 a}{c}$$

Haciendo $F_1 = F_2 e^{f\alpha}$,

$$F = \frac{F_2 (b - e^{f\alpha} a)}{c}$$

de la cual puede verse que para un freno autocerrante, esto es cuando $F = 0$ o negativo,

$$b \leq a e^{f\alpha} \quad \text{o} \quad b/a \leq e^{f\alpha}$$

Debe observarse que el freno de banda diferencial puede ser autocerrante únicamente para un sentido de rotación. Un freno autocerrante de este tipo se utiliza para permitir el movimiento en un solo sentido y prevenirlo en el sentido opuesto, como podría ocurrir cuando un transportador o una grúa actúan por gravedad. El freno autocerrante requiere una fuerza en sentido opuesto al de la aplicación del freno, para poderlo soltar. Así mismo, cuando el freno se ha cerrado y se aplica un momento adicional, las tensiones de la banda F_1 y F_2 aumentarán, pero la relación entre F_1 y F_2 no permanecerá igual a $e^{f\alpha}$, ya que esta relación prevalece únicamente cuando el freno está deslizándose o está a punto de deslizarse.

La presión unitaria máxima p_m se presenta en el extremo tirante de la banda y está determinada por

$$p_m = \frac{F_1}{w r}$$

La presión normal media entre la banda y el tambor (la cual se utiliza para calcular la generación de calor) es

$$p_{av} = \frac{F_1}{w r f \alpha} \left(\frac{e^{f\alpha} - 1}{e^{f\alpha}} \right)$$

EL CALOR GENERADO durante la aplicación de un freno debe disiparse por transferencia de calor, o de lo contrario el freno se recalienta y puede quemar el revestimiento. La rata de calor generado H_g es igual a la rata de trabajo de rozamiento:

$$H_g = p_{av} A_c f V / 778 \text{ Btu/min}$$

donde p_{av} = presión media de contacto, en psi f = coeficiente de rozamiento

A_c = área de contacto, en pul² V = velocidad periférica del tambor, en pies/minuto.

El calor generado puede determinarse también considerando la cantidad de energía cinética o potencial que se está absorbiendo:

$$H_g = (E_p + E_k) / 778 \text{ Btu/min}$$

donde E_p = energía potencial total absorbida, en lb-pie/min

E_k = energía cinética total absorbida, en lb-pie/min

El calor disipado H_d puede calcularse por

$$H_d = C \Delta t A_r \text{ Btu/min}$$

donde C = coeficiente de transferencia de calor, en Btu por pul² por minuto por °F de diferencia de temperatura

Δt = diferencia de temperatura entre la superficie radiante expuesta y el aire que la rodea

A_r = área de la superficie de radiación, en pul²

C puede ser del orden de 0,0006 para un Δt de 100°F y aumenta hasta 0,0009 para un Δt de 400°F.

Las expresiones dadas para el calor disipado son apenas aproximadas y deben servir únicamente como una indicación de la capacidad del freno para disipar calor. El comportamiento exacto del freno debe determinarse por ensayo. Otro índice conveniente de la capacidad del freno es HP/wd , el cual está limitado aproximadamente por 0,3 donde w = ancho de la banda o de la zapata y d = diámetro del tambor, en pulgadas.

La experiencia ha demostrado también que el producto de la presión media p_{av} (psi de área proyectada) por la velocidad de frotamiento V (pies/min) debe estar limitado en la forma siguiente: $p_{av} V \leq 28.000$ para aplicaciones continuas de carga tales como en operaciones de descenso, y disipación pobre de calor; $p_{av} V \leq 55.000$ para aplicaciones intermitentes de carga con períodos comparativamente grandes de reposo y disipación reducida de calor. $p_{av} V \leq 83.000$ para aplicaciones continuas de carga y una buena disipación de calor, tal como en un baño de aceite.

A continuación se dan algunos valores medios de temperaturas de operación, coeficientes de rozamiento y presiones máximas de contacto para materiales de frenos.

Material	Temp. máx, °F	f	p_{max} , psi
Metal sobre metal	600	0,25	200
Madera sobre metal	150	0,25	70
Cuero sobre metal	150	0,35	25
Asbesto sobre metal, en aceite	500	0,40	50
Metal sinterizado sobre hierro fundido, en aceite	500	0,15	400

PROBLEMAS RESUELTOS

1. El tambor de un freno de 14 pul de radio hace contacto con una zapata simple, como muestra la figura 15-10, y sostiene un momento de 2000 lb-pul a 500 rpm. Para un coeficiente de rozamiento de 0,3 determinar:

- La fuerza normal total N sobre la zapata.
- La fuerza F que se debe aplicar al freno si la rotación es en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.
- La fuerza F que se debe aplicar al freno si la rotación es en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.
- La dimensión de c necesaria para que el freno sea autocerrante, suponiendo que las otras dimensiones permanecen como se muestra.
- La rata de calor generado, en Btu/min.

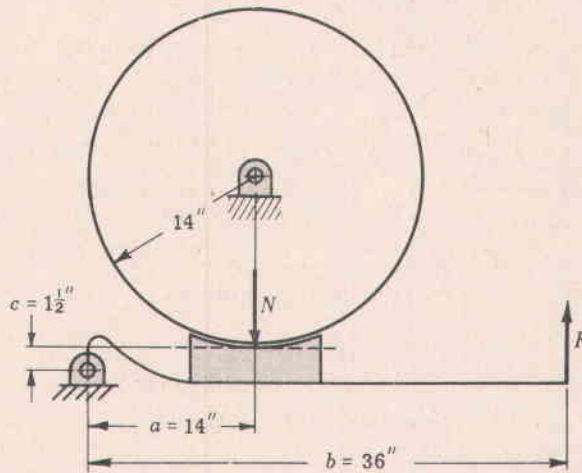


Fig. 15-10

Solución:

- Momento = $fNr = 0,3N(14) = 2000$, $N = 476$ lb
Fuerza de rozamiento = $fN = 2000/14 = 143$ lb
- Para rotación en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, la suma de momentos alrededor de la articulación es igual a cero:

$$(1,5)(143) + 36F - (14)(476) = 0, \quad F = 179 \text{ lb}$$

- Para rotación en sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, la suma de momentos alrededor de la articulación es igual a cero:

$$(14)(476) + (1,5)(143) - 36F = 0, \quad F = 191 \text{ lb}$$

- Para que sea autocerrante, lo cual puede ocurrir únicamente cuando el tambor gira en el sentido del movimiento de las agujas del reloj,

$$a \leq fc \quad \text{o} \quad c \geq a/f = 14/0,3 = 46,7 \text{ pul}$$

$$(e) \quad H_g = \frac{fNV}{778} = \frac{(0,3)(476)[\pi 28(500)/12]}{778} = 674 \text{ Btu/min}$$

2. Un freno de bloque de doble zapata, como el que se muestra en la figura 15-11, tiene una fuerza de 300 lb aplicada en el extremo de la palanca de operación. Determinar el momento que puede soportar el freno si la rotación del tambor es en el sentido del movimiento de las agujas del reloj y el coeficiente de rozamiento es 0,3.

Solución:

Primero se considera la palanca de operación como un cuerpo libre y se evalúan las componentes horizontal y vertical de las fuerzas que actúan sobre las uniones A y B del pasador, tomando la suma de fuerzas y momentos cuando sea necesario.

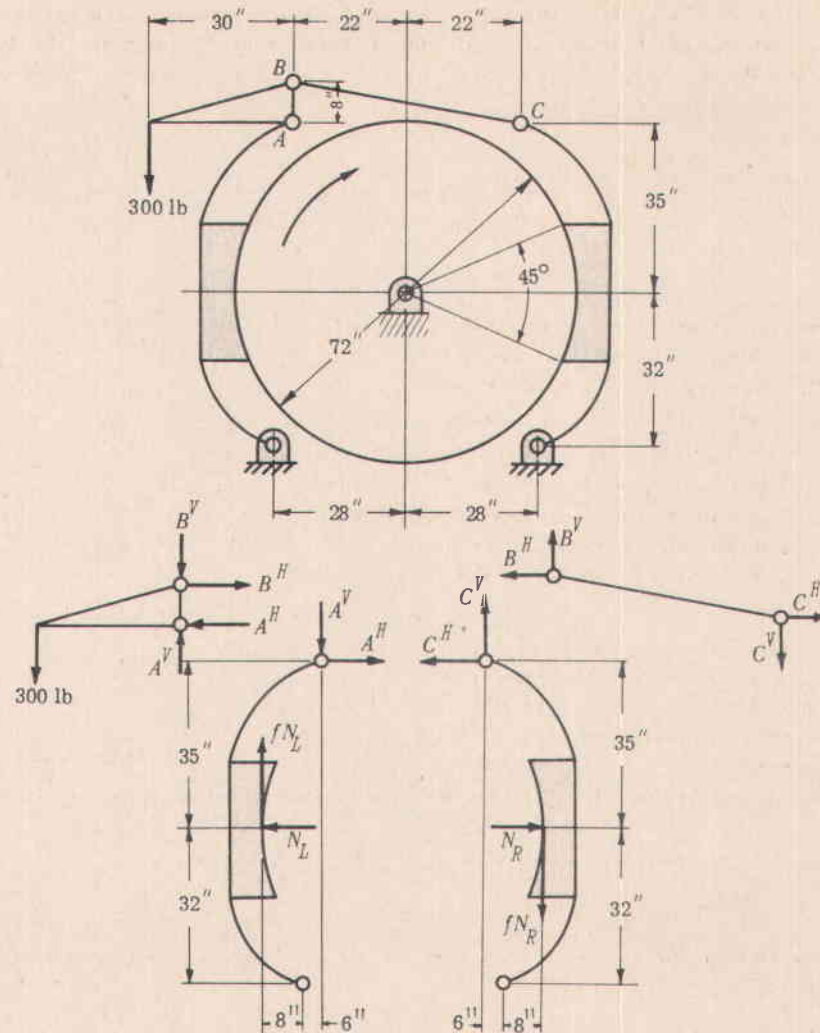


Fig. 15-11

$$A^H = B^H, \quad A^V - B^V - 300 = 0, \quad 8B^H = 300(30) \quad \text{o} \quad B^H = 1125 \text{ lb}$$

En seguida se considera el eslabón BC como un cuerpo libre y se hacen nuevas evaluaciones de las fuerzas horizontal y vertical que actúan en las uniones B y C del pasador.

$$B^H = C^H, \quad B^V = C^V, \quad 44B^V = 8B^H \quad \text{o} \quad B^V = 204,3 \text{ lb}$$

Finalmente, se consideran las palancas izquierda y derecha de la zapata como cuerpos libres y se determinan las magnitudes de las fuerzas normales sobre las zapatas izquierda y derecha. Tomando la suma de momentos alrededor de la articulación de la palanca izquierda,

$$N_L(32) - (0,3 N_L)(8) - 1125(67) - 504,3(6) = 0, \quad N_L = 2650 \text{ lb}$$

Tomando la suma de momentos alrededor de la articulación de la palanca derecha,

$$N_R(32) + (0,3 N_R)(8) - 1125(67) + 204,3(6) = 0, \quad N_R = 2150 \text{ lb}$$

El momento de frenado es

$$T = (0,3)(2650 + 2150)(6/2) = 4320 \text{ lb-pie}$$

3. Un freno simple de banda tiene el ramal tirante de la banda unido a una articulación fija. El ángulo de abrazamiento es de 280° alrededor de un tambor de 18 pulgadas de diámetro. Si se sostiene un momento de 1500 lb-pul a 900 rpm y el coeficiente de rozamiento es 0,2 determinar las tensiones requeridas en la correa.

Solución:

De $F_1/F_2 = e^{f\alpha} = e^{(0.2)(280\pi/180)} = e^{0.98} = 2,665$ y $9(F_1 - F_2) = 1500$ obtenemos

$$F_1 = 266,5 \text{ lb y } F_2 = 100 \text{ lb}$$

4. Un freno diferencial de banda tiene una fuerza de 50 lb aplicada en el extremo de la palanca, como muestra la figura 15-12. El coeficiente de rozamiento es 0,4.

- (a) Si se aplica al tambor un momento de 400 lb-pul en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, determinar las fuerzas máxima y mínima en la banda.
- (b) ¿Cuál es el momento máximo que puede soportar el freno si la rotación del tambor es en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj?

Solución:

- (a) Para una rotación en el sentido del movimiento de las agujas del reloj se debe verificar si el freno es autocerrante. El freno es autocerrante si $b/a \leq e^{f\alpha}$, donde $e^{f\alpha} = e^{0.4\pi} = 3,5$. Aquí $b/a = 4/2 = 2$, que es menor que 3,5; por tanto el freno es autocerrante y $F_1/F_2 = e^{f\alpha}$ no se aplica.

Igualando a cero la suma de momentos alrededor de la articulación fija y utilizando la relación del momento,

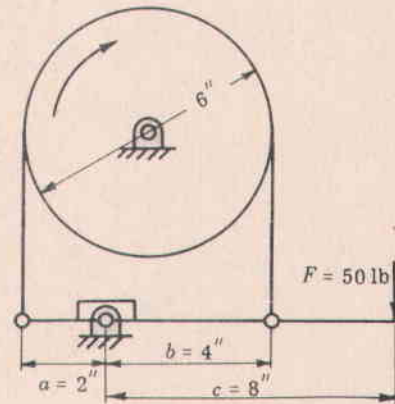
$$2F_1 + 8(50) - 4F_2 = 0 \quad \text{y} \quad 3(F_1 - F_2) = 4000.$$

obtenemos $F_1 = 2866 \text{ lb}$, $F_2 = 1533 \text{ lb}$.

- (b) Para una rotación contraria al sentido del movimiento de las agujas del reloj, el freno no es autocerrante y se aplica $F_1'/F_2' = e^{f\alpha}$. Entonces

$$4F_1' - 8(50) - 2F_2' = 0 \quad \text{y} \quad F_1'/F_2' = e^{f\alpha} = 3,5 \quad \text{de donde} \quad F_1' = 116 \text{ lb}, \quad F_2' = 33 \text{ lb}$$

El momento máximo que se puede soportar es $T = 3(116 - 33) = 249 \text{ lb-pul}$.

**Fig. 15-12**

5. Para un freno de zapata simétrica presionada contra un tambor, como muestra la figura 15-13(a), determinar: La fuerza normal resultante, la fuerza de rozamiento resultante, la localización de estas fuerzas y el momento alrededor del centro del tambor. Suponer que el desgaste es uniforme.

Solución:

- (a) Si el desgaste es uniforme, la remoción de material de la cara del revestimiento debe ser tal que el radio de curvatura de la cara de la zapata del freno sea constante e igual al radio del tambor, como muestra la figura 15-13(b). El desgaste radial W es proporcional al producto de la presión p_n por la velocidad V :

$$W = K p_n V$$

donde K es constante para un material dado.

Una vez que ha tenido lugar el desgaste radial, un punto tal como M se mueve hasta M' para mantener el contacto entre la zapata y el tambor. El desplazamiento horizontal δ del punto M es

$$\delta = K p_n V / \cos \phi$$

Pero como δ debe ser el mismo para todos los puntos, o sea constante, entonces

$$p_n = C \cos \phi$$

donde $C = \delta/KV$. C es también la presión máxima, la cual se presenta en $\phi = 0$.

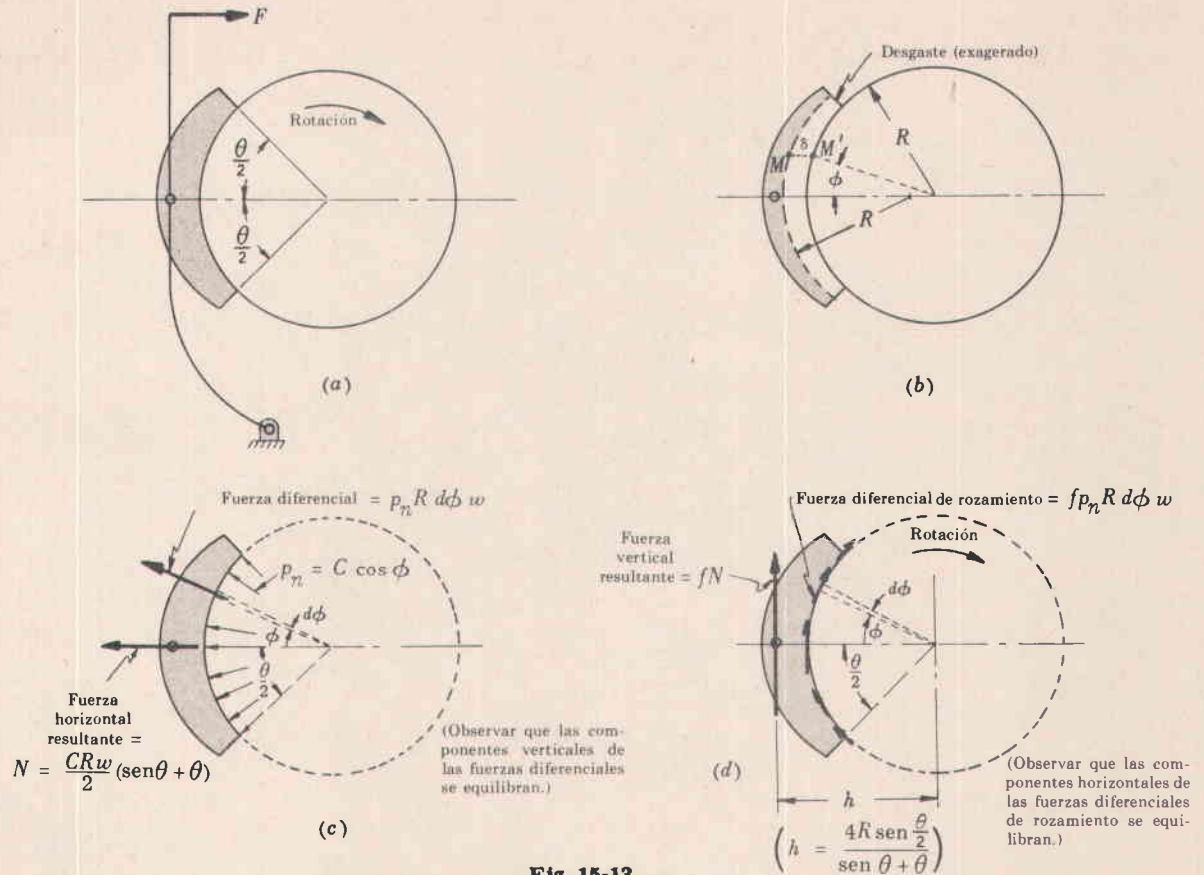


Fig. 15-13

- (b) Como la zapata es simétrica y la presión normal es simétrica, la fuerza horizontal resultante es la suma de las componentes horizontales de las fuerzas normales diferenciales y la fuerza vertical resultante es la suma de las componentes verticales de las fuerzas diferenciales de rozamiento. (Véanse las figuras 15-13(c) y 15-13(d).)

$$\text{Fuerza horizontal resultante} = N = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\theta} (C \cos \phi) R d\phi w \cos \phi = \frac{CRw}{2} (\text{sen } \theta + \theta)$$

$$(c) \text{ Fuerza vertical resultante} = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\theta} f(C \cos \phi) R d\phi w \cos \phi = fN$$

- (d) La localización de la fuerza resultante N se halla con base en la simetría de la distribución de la carga: N pasa por el centro del pasador de la zapata, sobre el eje horizontal de simetría. (Véase la figura 15-13(c).)
- (e) La localización de la fuerza vertical fN puede obtenerse igualando el momento de la fuerza resultante al momento de las fuerzas diferenciales de rozamiento, alrededor de cualquier punto de referencia. Tomemos el centro del tambor como punto de referencia.

$$fNh = 2 \int_0^{\frac{1}{2}\theta} f(C \cos \phi) R d\phi w R = 2fCR^2w \text{sen } \frac{1}{2}\theta$$

donde h es la distancia desde el centro del tambor hasta la línea de localización de fN .

$$\text{Ahora, haciendo } C = \frac{2N}{Rw(\text{sen } \theta + \theta)} \text{ en la ecuación anterior, se obtiene } h = \frac{4R \text{sen } \frac{1}{2}\theta}{\text{sen } \theta + \theta}.$$

- (f) El momento de la fuerza de rozamiento fN alrededor del centro del tambor es el momento de frenado T .

$$T = fNh = fN \left(\frac{4R \text{sen } \frac{1}{2}\theta}{\text{sen } \theta + \theta} \right)$$

- (g) Si el pasador de la zapata está localizado a la distancia h del centro del tambor, se puede hacer el diagrama de cuerpo libre, haciendo pasar tanto la fuerza normal N como la fuerza de rozamiento fN por el centro del pasador de la zapata, para satisfacer la distribución de presión $p_n = C \cos \phi$. (Véase la figura 15-13(e).) El análisis de fuerzas puede hacerse, entonces, sin tener en cuenta la distribución de carga sobre las zapatas. Si el pasador está localizado a una distancia diferente de la h calculada anteriormente, la fuerza resultante debe aún pasar por el centro del pasador, aunque la hipótesis $p_n = C \cos \phi$ no puede satisfacerse. Será suficiente suponer que las fuerzas componentes N y fN actúan en el centro del pasador, con lo cual no se comete un error apreciable. Nota: La articulación puede estar localizada en cualquier sitio a lo largo de la resultante de N y fN , sin afectar la distribución de presión.

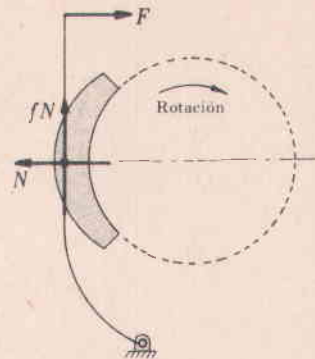


Fig. 15-13 (e)

6. Una zapata simétrica articulada subtiende un ángulo de 90° sobre un tambor de 20 pulgadas de diámetro. ¿A qué distancia del centro del tambor debe colocarse la articulación a fin de evitar un momento de giro debido a la fuerza resultante de rozamiento, suponiendo que el desgaste es uniforme? Suponer que la articulación está localizada a lo largo de la fuerza normal.

Solución:

La distancia h desde el centro del tambor hasta la articulación es $h = \frac{4R \sin \frac{1}{2}\theta}{\theta + \sin \theta} = \frac{(4)(10)(0,707)}{\frac{1}{2}\pi + 1} = 11 \text{ pul.}$

7. Un freno interno del tipo mostrado en la figura 15-6 tiene un diámetro de 12 pulgadas. Las fuerzas actuantes F son iguales y las zapatas tienen un ancho de 1,5 pul. Para un coeficiente de rozamiento de 0,3 y una presión máxima permisible de 150 psi, con $\theta_1 = 0$, $\theta_2 = 130^\circ$, $\theta_m = 90^\circ$, $a = 5 \text{ pul}$ y $c = 9 \text{ pul}$, determinar el valor de las fuerzas actuantes F y la capacidad de momento del freno.

Solución:

El momento de las fuerzas de rozamiento alrededor de la articulación derecha es

$$M_f = \frac{f p_m w r}{\sin \theta_m} \int_0^{\theta_2} (\sin \theta)(r - a \cos \theta) d\theta = \frac{f p_m w r}{\sin \theta_m} [r - r \cos \theta_2 - \frac{1}{2} a \sin^2 \theta_2]$$

$$= (0,3)(150)(1,5)(6) [6 + 6(0,643) - 2,5(0,766)^2] = 3400 \text{ lb-pul}$$

El momento de las fuerzas normales alrededor de la articulación derecha es

$$M_n = \frac{p_m w r a}{\sin \theta_m} \int_0^{\theta_2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{p_m w r a}{\sin \theta_m} [\frac{1}{2} \theta_2 - \frac{1}{4} \sin 2\theta_2] = 9300 \text{ lb-pul}$$

$$F = (M_n - M_f)/c = (9300 - 3400)/9 = 656 \text{ lb}$$

La capacidad de momento de frenado de la zapata derecha es $T = f p_m w r^2 \left(\frac{\cos \theta_1 - \cos \theta_2}{\sin \theta_m} \right) = 4000 \text{ lb.}$

Para la zapata izquierda, $T = 1860 \text{ lb-pul}$, basado en que $p'_m = 69,7 \text{ psi}$, puesto que $p'_m = \frac{F c p_m}{M_n + M_f}$.
Momento total = $4000 + 1860 = 5860 \text{ lb-pul}$.

8. Un tambor de 18 pul de diámetro tiene dos zapatas que subtienden ángulos de 90° cada una. El ancho de las caras de las zapatas es 4 pul y se están generando 4000 Btu/min. Si la diferencia de temperatura permisible entre la superficie del tambor y el medio ambiente es 300°F , ¿se recalentará el freno?

Solución:

Se iguala el calor que se genera al calor disipado y se halla el área necesaria A_r .

$$4000 = C \Delta t A_r, 4000 = (0,0008)(300)A_r, A_r = 16.700 \text{ pul}^2 \text{ (necesaria)}$$

donde $C = 0,0008 \text{ (Btu por pul}^2 \text{ por minuto por } ^\circ\text{F de diferencia de temperatura)}$ para un Δt de 300°F .

Sin contar el plato, el área real de la superficie del tambor expuesta al aire, A , es

$$A = \frac{1}{2} \pi (18)(4) = 113 \text{ pul}^2. \text{ Por consiguiente el tambor se recalentará.}$$

14. Para un freno interno similar al que se muestra en la figura 15-6, donde $\theta_1 = 15^\circ$, $\theta_2 = 150^\circ$, $f = 0,35$, $p_m = 125$ psi, $w = 2$ pul, $r = 6$ pul, $c = 10$ pul y $a = 5$ pul, determinar el momento de frenado.
 Resp. $T = 7960$ lb-pul

15. Un freno de doble bloque con zapatas de madera y tambor de hierro fundido ($f = 0,3$) está dispuesto como muestra la figura 15-18.
- (a) Dibujar el diagrama de cuerpo libre de cada parte y señalar todas las fuerzas.
- (b) Determinar la fuerza de operación F requerida para absorber 35 caballos de fuerza, con una velocidad del tambor de 300 rpm en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.
- Resp. $F = 103$ lb

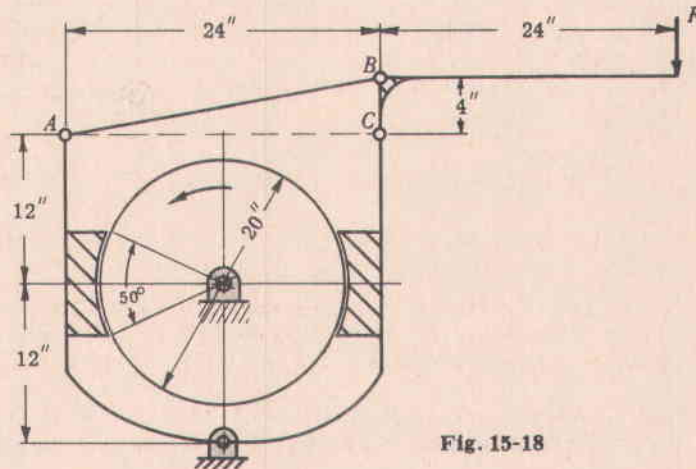


Fig. 15-18

16. El freno de doble bloque que se muestra en la figura 15-19 tiene dos zapatas de madera aplicadas a un tambor de hierro fundido. El coeficiente de rozamiento para estos dos materiales es 0,3. El tambor gira a 1500 rpm. Determinar la potencia perdida en forma de calor. Resp. 62,3 HP

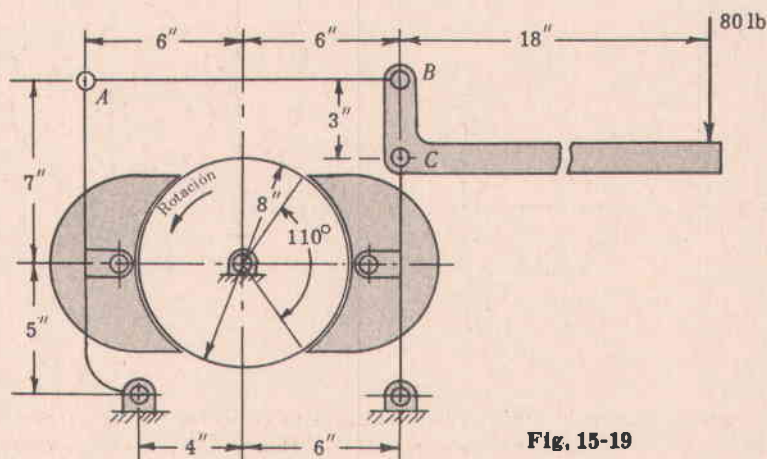


Fig. 15-19

Capítulo 16

Resortes

EL DISEÑO DE RESORTES se basa en las relaciones entre fuerza, momento de torsión, deformación y esfuerzo. Los resortes tienen muchas aplicaciones en relación con el diseño de máquinas, tales como amortiguar impactos y choques por carga, almacenar energía, mantener el contacto entre los miembros de una máquina, para dispositivos de medición de fuerzas, para controles de vibraciones y para otras funciones relacionadas.

LOS RESORTES DE MULTIPLES HOJAS pueden ser del tipo voladizo simple, como se muestra en la figura 16-1(a) o de hojas semielípticas, como muestra la figura 16-1(b). El diseño de estos resortes se basa generalmente en las relaciones de fuerza, deformación y esfuerzo que se aplican a vigas de resistencia constante y espesor uniforme. Tales vigas son de perfil triangular.

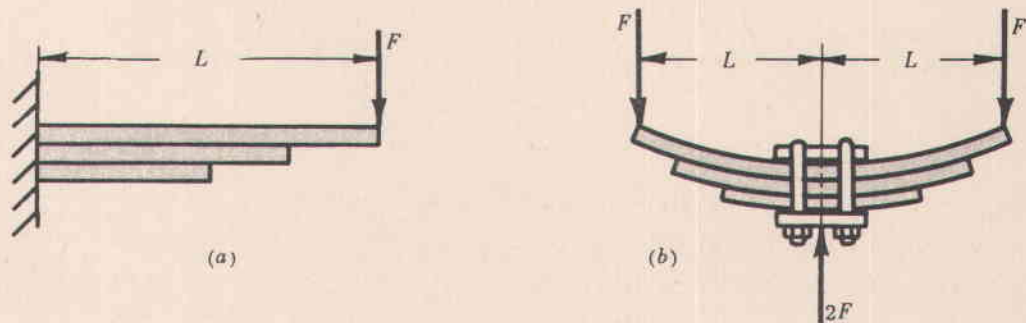


Fig. 16-1

Básicamente, el resorte de múltiples hojas puede considerarse como una placa triangular, como muestra la figura 16-2(a), cortada en n franjas de ancho b , las cuales están apiladas en forma graduada, como muestra la figura 16-2(b). Un resorte graduado hecho de una viga triangular se reduce a un punto en su extremo, lo cual es satisfactorio desde el punto de vista del esfuerzo de flexión. Sin embargo, debe disponerse de suficiente metal para soportar el esfuerzo cortante transversal y para proporcionar conexiones para la carga, la cual a su vez debe soportar frecuentemente acarreamientos, empujes y acciones de giro. Esto puede lograrse añadiendo una o más hojas adicionales de longitud completa, n_e , de ancho y espesor uniforme, sobre la pila graduada, como muestra la figura 16-3.

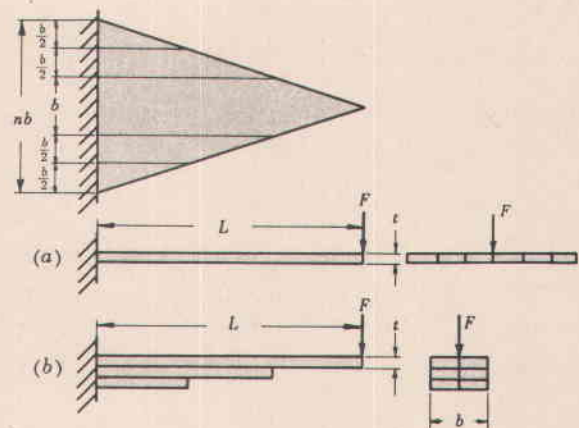


Fig. 16-2

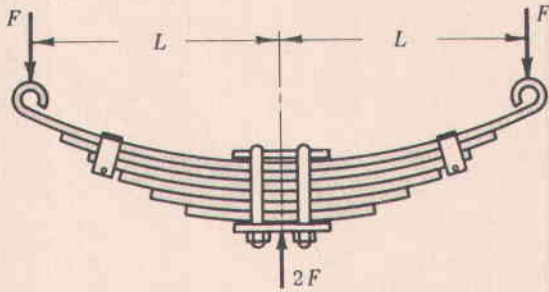


Fig. 16-3

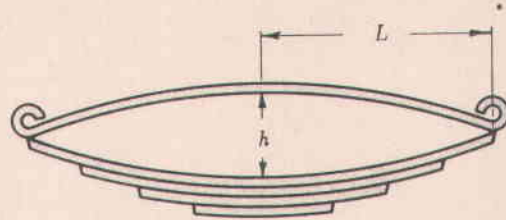


Fig. 16-4

Obsérvese que el número de hojas adicionales de longitud completa, n_e , es siempre uno menos que el número total de hojas de longitud completa, n . Las hojas adicionales de longitud completa no son vigas de resistencia constante y tendrán un esfuerzo de flexión aproximadamente 50% más grande que las hojas graduadas, a menos que sean preesforzadas durante el montaje. El preesforzamiento puede obtenerse haciendo que las hojas adicionales formen un radio de curvatura diferente al de las hojas graduadas. Esto dejará un vacío h entre las hojas adicionales y las hojas graduadas antes del montaje, como se muestra en la figura 16-4. Entonces, después de montadas, las hojas adicionales tendrán un esfuerzo inicial de signo opuesto al esfuerzo al cual estarán sometidas cuando se aplique la carga. El vacío puede determinarse de modo que todas las hojas queden igualmente esforzadas cuando se aplique la carga.

Si las hojas adicionales de longitud completa se instalan sin un preesfuerzo inicial, se producirá en ellas un **ESFUERZO DE FLEXION**, s_e , dado por

$$s_e = \frac{18 FL}{bt^2(3n_e + 2n_g)}$$

donde F = carga total aplicada en el extremo del resorte, en lb
 L = longitud del voladizo o la mitad de la longitud del resorte semielíptico, en pul
 b = ancho de cada hoja del resorte, en pul
 t = espesor de cada hoja del resorte, en pul
 n_e = número de hojas adicionales de longitud completa
 n_g = número de hojas graduadas

EL ESFUERZO DE FLEXION, s_g , producido en las hojas graduadas (si éstas se montan con hojas adicionales de longitud completa en las cuales no hay preesfuerzo inicial), será

$$s_g = \frac{12 FL}{bt^2(3n_e + 2n_g)} = \frac{2s_e}{3}$$

LA DEFORMACION DE UN RESORTE DE MULTIPLES HOJAS compuesto de hojas graduadas y de hojas adicionales de longitud completa será

$$y = \frac{12 FL^3}{bt^3 E(3n_e + 2n_g)}$$

donde y = deformación en el extremo del resorte, en pul
 E = módulo de elasticidad, en psi

Esta ecuación determinará la deformación si $n_e = 0$, así como también si hay hojas adicionales y éstas son preesforzadas o no lo son.

EL ESFUERZO DE FLEXION, s , producido en resortes de hojas con hojas adicionales de longitud completa que han sido preesforzadas, de tal forma que todas las hojas tengan el mismo esfuerzo cuando se aplique la carga total (o en resortes de hojas sin hojas adicionales) puede determinarse por

$$s = \frac{6FL}{nbt^2}$$

donde s = esfuerzo de flexión, en psi n = número total de hojas

EL ESFUERZO DE FLEXION será el mismo en todas las hojas de un resorte de múltiples hojas, compuesto de hojas graduadas y de hojas adicionales de longitud completa, si éstas son preesforzadas, dándoles una forma inicial, de modo que el vacío h mostrado en la figura 16-4 sea

$$h = \frac{2FL^3}{nbt^3E}$$

donde h = vacío entre las hojas graduadas y las hojas adicionales de longitud completa, en pul

LOS RESORTES HELICOIDALES generalmente se hacen de alambre o varilla de sección transversal circular, como se muestra en la figura 16-5. Estos resortes están sometidos a un esfuerzo cortante de torsión y a un esfuerzo cortante transversal. Existe además un esfuerzo adicional debido a la curvatura de la hélice. Con el fin de tomar en cuenta los efectos del esfuerzo cortante transversal y de la curvatura, se acostumbra multiplicar el esfuerzo cortante torsional por un factor de corrección K , llamado factor Wahl.

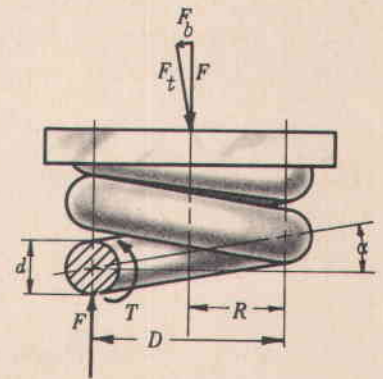


Fig. 16-5

EL ESFUERZO CORTANTE producido en un resorte helicoidal debido a una carga axial F es

$$s_s = K \frac{8FD}{\pi d^3} = K \frac{8FC}{\pi d^2}$$

donde s_s = esfuerzo cortante total, en psi

D = diámetro medio de la bobina, en pul

$K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0.615}{C}$, llamado el factor Wahl

F = carga axial, en lb

d = diámetro del alambre, en pul

$C = \frac{D}{d}$, llamado índice del resorte

LA DEFORMACION de un resorte helicoidal debida a una carga axial F es

$$y = \frac{8FD^3n}{d^4G} = \frac{8FC^3n}{dG}$$

donde n = número de espiras activas y = deformación axial, en pul G = módulo de rigidez, en psi

LA RAZON ELASTICA o constante elástica se define como las libras de carga por pulgada de deformación.

$$k = \frac{F}{y}$$

$$k = \frac{Gd}{8C^3n} \text{ para un resorte helicoidal sometido a carga axial}$$

LA RAZON ELASTICA para resortes en paralelo que tienen razones elásticas individuales, como se muestra en la figura 16-6(a), es

$$k = k_1 + k_2 + k_3$$

LA RAZON ELASTICA para resortes en serie, como los que se muestran en la figura 16-6(b), es

$$k = \frac{1}{1/k_1 + 1/k_2 + 1/k_3}$$

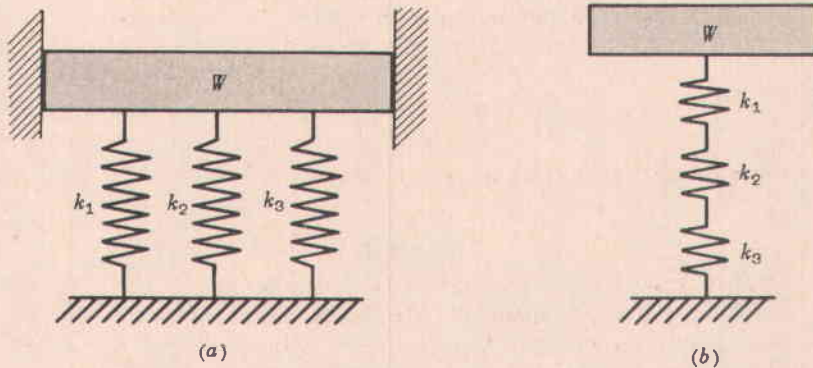


Fig. 16-6

LA ENERGIA ALMACENADA, $(Eng)_s$, en resortes que tienen una razón lineal entre la fuerza y la deformación y obedecen a la ley de Hooke, puede determinarse por la fórmula

$$(Eng)_s = \frac{1}{2} F \gamma \quad \text{o} \quad (Eng)_s = \frac{1}{2} T \theta$$

Para un resorte helicoidal sometido a una carga axial F , la energía almacenada es

$$(Eng)_s = \frac{s_s^2}{4G} \text{ lb-pul por pul}^3$$

Para un resorte helicoidal sometido a una carga de torsión, la energía almacenada es

$$(Eng)_s = \frac{s^2}{8E} \text{ lb-pul por pul}^3 \text{ (para alambre redondo)}$$

$$(Eng)_s = \frac{s^2}{6E} \text{ lb-pul por pul}^3 \text{ (para alambre rectangular)}$$

Para una viga en voladizo de resistencia constante, sometida a una fuerza de flexión en su extremo, la cantidad de energía almacenada está dada por la fórmula

$$(Eng)_s = \frac{s^2}{6E} \text{ lb-pul por pul}^3$$

Para un resorte en espiral sometido a una carga de torsión, la energía almacenada es

$$(Eng)_s = \frac{s^2}{6E} \text{ lb-pul por pul}^3$$

donde

s_s = esfuerzo cortante, en psi

s = esfuerzo de flexión, en psi

T = momento de torsión, en lb-pul

E = módulo de elasticidad, en psi

G = módulo de rigidez, en psi

γ = deformación lineal, en pul

θ = deformación angular, en radianes

LOS EXTREMOS DE LOS RESORTES HELICOIDALES pueden ser simples, rebajados simples, a escuadra y rebajados a escuadra, como muestra la figura 16-7. Estas formas ocasionan una disminución del número de espiras activas y afectan la longitud libre y la longitud sólida de los resortes, como se muestra en la siguiente tabla.

Tipo de extremos	No. total de espiras	Longitud sólida	Longitud libre
Simple	n	$(n + 1)d$	$np + d$
Simple rebajado	n	nd	np
A escuadra	$n + 2$	$(n + 3)d$	$np + 3d$
Rebajado a escuadra	$n + 2$	$(n + 2)d$	$np + 2d$

p = paso; n = número de espiras activas; d = diámetro del alambre

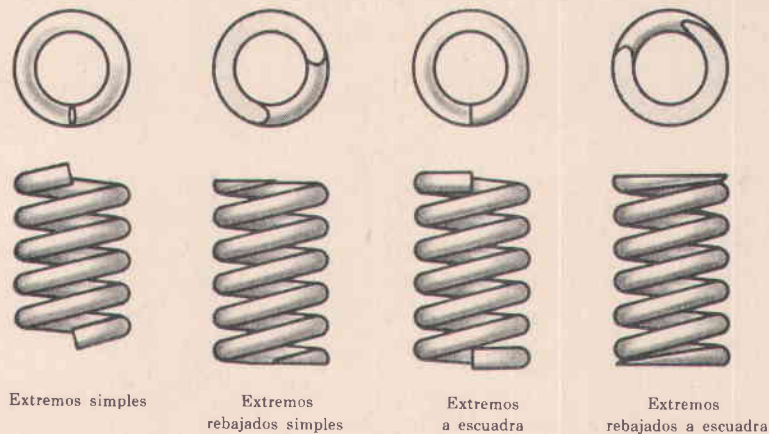


Fig. 16-7

SE PUEDE PRESENTAR PANDEO EN RESORTES SOMETIDOS A COMPRESION, cuando la longitud libre es mayor que 4 veces el diámetro medio, a menos que el resorte se guíe adecuadamente. La carga axial crítica que causa el pandeo puede calcularse aproximadamente por la fórmula

$$F_{cr} = kL_f K_L$$

donde F_{cr} = carga axial que produce el pandeo, en lb

k = razón elástica de la deformación axial, en lb/pul

L_f = longitud libre del resorte, en pul

K_L = factor que depende de la relación L_f/D

Extremos articulados		Extremos empotrados	
L_f/D	K_L	L_f/D	K_L
1	0,72	1	0,72
2	0,63	2	0,71
3	0,38	3	0,68
4	0,20	4	0,63
5	0,11	5	0,53
6	0,07	6	0,38
7	0,05	7	0,26
8	0,04	8	0,19

En los resortes helicoidales se pueden presentar **PULSACIONES** cuando se aplican cargas repetidamente, a una rata cercana a la frecuencia natural del resorte. Para evitar esta posibilidad es conveniente que la frecuencia natural del resorte sea por lo menos 20 veces mayor que la frecuencia de la carga aplicada. La frecuencia natural de una espira de acero, f_n , expresada en ciclos por minuto, puede determinarse por la fórmula

$$f_n = \frac{761.500d}{nD^2}$$

LOS MAXIMOS ESFUERZOS PERMISIBLES EN RESORTES HELICOIDALES SOMETIDOS A CARGAS ESTATICAS pueden determinarse con base en el límite elástico en torsión. Para cargas estáticas se recomienda aplicar un factor de seguridad de 1,5 para la resistencia a la fluencia en torsión del material. Uno de los métodos utilizados para determinar el esfuerzo máximo producido en el resorte, consiste en aplicar únicamente la porción del factor Wahl que corrige por el efecto del esfuerzo cortante transversal, sin tener en cuenta la porción que hace la corrección debida a la curvatura, ya que esta última tiene el carácter de una concentración de esfuerzos y no es grave en materiales dúctiles sometidos a cargas estáticas.

En el factor Wahl $K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C}$, $\frac{4C-1}{4C-4}$ corrige por curvatura y $\frac{0,615}{C}$ corrige por el efecto del esfuerzo cortante transversal. El empleo del valor completo de K para cargas estáticas daría por resultado un diseño conservador. Se puede considerar que el factor Wahl está compuesto de dos subfactores, K_S y K_C . El subfactor de esfuerzo cortante K_S , que se debe aplicar al esfuerzo medio, se puede determinar, según Wahl, mediante la fórmula

$$K_S = 1 + 0,5/C$$

que se basa en una distribución uniforme del esfuerzo cortante transversal. Las ecuaciones para el diseño son, entonces,

$$\frac{s_{ys}}{1,5} = K_S \frac{8FD}{\pi d^3} \quad \text{o} \quad \frac{s_{ys}}{1,5} = K \frac{8FD}{\pi d^3} \quad \text{para un diseño más conservador}$$

LOS MAXIMOS ESFUERZOS PERMISIBLES EN RESORTES HELICOIDALES SOMETIDOS A CARGAS DE FATIGA se determinan con base en la resistencia a la fatiga del material. Wahl

sugiere los dos métodos que se exponen a continuación. En el primer método se emplea una línea modificada de Soderberg. A los materiales para resortes generalmente se les hacen pruebas de resistencia a la fatiga en torsión, por medio de esfuerzos repetidos que varían desde cero hasta un máximo. Como se dispone de datos de ensayo para carga libre y como los resortes generalmente se cargan en un solo sentido, se puede obtener una mayor exactitud utilizando el diagrama modificado de Soderberg que se muestra en la figura 16-8. El límite de fatiga para carga libre s_{rel} se indica en un punto A (donde el esfuerzo medio y el esfuerzo variable son iguales a $\frac{1}{2}s_{rel}$). La línea trazada desde el punto A hasta el punto B (límite de fluencia en corte) será la línea que falla por fatiga y se adaptará mejor a los datos de ensayo que la línea trazada desde la resistencia a la fatiga con inversión del esfuerzo cortante hasta el límite de fluencia en corte. La línea de diseño, CD, se traza paralela a la línea AB, con el punto D localizado en s_{ys}/N . El esfuerzo medio s_m se traza como abscisa y el esfuerzo variable s_v como ordenada.

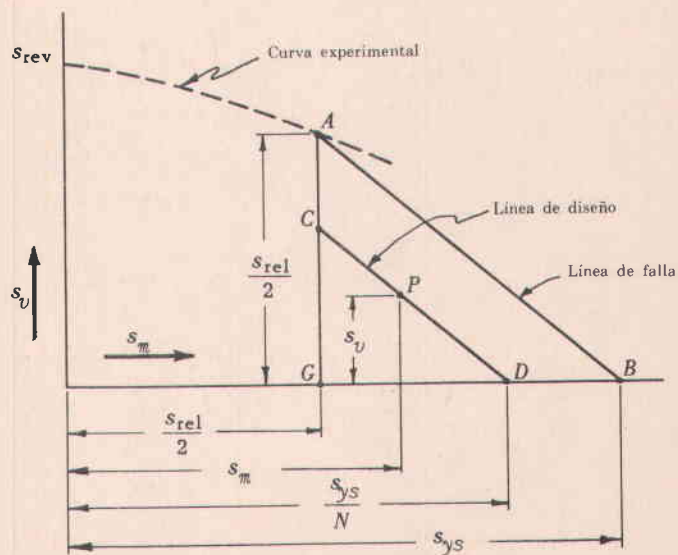


Fig. 16-8

El esfuerzo variable s_v se puede calcular utilizando el valor completo del factor Wahl, $\bar{K} = \bar{K}_c \bar{K}_s$, o se puede reducir K_c si se dispone de información sobre la sensibilidad del material al efecto de concentración de esfuerzos debido a la curvatura. Unos materiales son menos sensibles que otros.

$$s_v = K \frac{8F_v D}{\pi d^3} \quad \text{donde} \quad F_v = \frac{F(\max) - F(\min)}{2}$$

El esfuerzo medio s_m se puede calcular utilizando únicamente la porción estática del factor Wahl, K_s , lo cual concuerda con la evidencia experimental.

$$s_m = K_s \frac{8F_m D}{\pi d^3} \quad \text{donde} \quad F_m = \frac{F(\max) + F(\min)}{2}$$

Con referencia al diagrama fatiga-esfuerzo, la línea AB es la línea de falla. Por tanto, podemos construir la línea CD paralela y por debajo de la línea AB , permitiendo un factor de seguridad N suficiente, con base en la resistencia a la fluencia en corte. Se puede expresar la ecuación de la línea CD . Con el origen en G , las coordenadas de P son $[(s_m - \frac{1}{2}s_{rel}), s_v]$; pendiente de CD = pendiente de

$$AB = -\frac{\frac{1}{2}s_{rel}}{s_{ys} - \frac{1}{2}s_{rel}}; \text{ y la ordenada al origen } CG = AG \left(\frac{GD}{GB} \right) = \frac{1}{2}s_{rel} \left(\frac{s_{ys}/N - \frac{1}{2}s_{rel}}{s_{ys} - \frac{1}{2}s_{rel}} \right). \text{ Entonces}$$

$$s_v = -\left(\frac{\frac{1}{2}s_{rel}}{s_{ys} - \frac{1}{2}s_{rel}} \right) (s_m - \frac{1}{2}s_{rel}) + \frac{1}{2}s_{rel} \left(\frac{s_{ys}/N - \frac{1}{2}s_{rel}}{s_{ys} - \frac{1}{2}s_{rel}} \right)$$

de la cual

$$N = \frac{s_{ys}}{s_m - s_v + 2s_v s_{ys}/s_{rel}}$$

Esta última puede utilizarse como ecuación de diseño, ya que todos los puntos situados sobre la línea CD representan una combinación de condiciones de esfuerzo variable y medio que son seguras. El factor de seguridad puede tomarse como 1,8, más o menos, de acuerdo con las condiciones de operación. Los valores de s_{rel} no son muy completos, pero con base en fuentes de diferentes corrientes parece que un valor de $36.000/d^{0.2}$ es una buena aproximación para acero al carbono templado en aceite en alambres de diámetros hasta de 0,625 pul.

En el segundo método sugerido por Wahl, una condición es que el límite de esfuerzos se calcule utilizando el valor completo del factor Wahl, K . Una segunda condición es que el esfuerzo máximo, que se calcula utilizando únicamente K_s , no debe sobrepasar la resistencia de fluencia del material, dividida por un factor conveniente de seguridad.

$$\text{Primera condición: } s_s(\max) - s_s(\min) = K \frac{8D[F(\max) - F(\min)]}{\pi d^3} = \frac{s_{rel}}{N}$$

donde s_{rel} = esfuerzo límite de fatiga del material

N = factor de seguridad conveniente

$$\text{Segunda condición: } s_s(\max) = K_s \frac{8DF(\max)}{\pi d^3} = \frac{s_{ys}}{N}$$

A continuación se da una tabla de los **ESFUERZOS MAXIMOS PERMISIBLES** en resortes helicoidales de acero publicada por la Westinghouse Electric Corporation para resortes de acero SAE 6150 templados en aceite, enrollados en caliente, con tratamiento térmico después de formados.

Diámetro del alambre, en pul	Servicio pesado, en psi	Servicio medio, en psi	Servicio liviano, en psi
hasta 0,085	60.000	75.000	93.000
0,085 - 0,185	55.000	69.000	85.000
0,185 - 0,320	48.000	60.000	74.000
0,320 - 0,530	42.000	52.000	65.000
0,530 - 0,970	36.000	45.000	56.000
0,970 - 1,5	32.000	40.000	50.000

El servicio pesado comprende cargas rápidas y continuas, cuando la relación del mínimo esfuerzo al máximo es $\frac{1}{2}$ o menos. El servicio medio es el mismo pesado, con la diferencia que la operación es intermitente. El servicio liviano comprende los resortes sometidos a cargas estáticas o a cargas que varían con poca frecuencia.

LOS RESORTES BELLEVILLE se hacen de arandelas cónicas, como la que se muestra en la figura 16-9(a). Las arandelas se pueden apilar en serie o en paralelo o en una combinación de serie y paralelo, como se muestra en la figura 16-9(b). Las fórmulas de carga-deformación y esfuerzo-deformación para una arandela, dadas por Almen y Laszlo (Transacciones de la ASME, mayo de 1936, volumen 58, No. 4) son

$$P = \frac{E\gamma}{(1-\mu^2)M(d_o/2)^2} [(h-\gamma/2)(h-\gamma)t + t^3]$$

$$s = \frac{E\gamma}{(1-\mu^2)M(d_o/2)^2} [C_1(h-\gamma/2) + C_2t]$$

donde

P = carga axial, en lb

γ = deformación, en pul

t = espesor de cada arandela, en pul

h = altura libre menos espesor, en pul

E = módulo de elasticidad, en psi

s = esfuerzo en la circunferencia interior, en psi

d_o = diámetro exterior de la arandela, en pul

d_i = diámetro interior de la arandela, en pul

μ = relación de Poisson (0,3 para el acero)

$$M = \frac{6}{\pi \log_e(d_o/d_i)} \left[\frac{d_o/d_i - 1}{d_o/d_i} \right]^2$$

$$C_1 = \frac{6}{\pi \log_e(d_o/d_i)} \left[\frac{d_o/d_i - 1}{\log_e(d_o/d_i)} - 1 \right]$$

$$C_2 = \frac{6}{\pi \log_e(d_o/d_i)} \left[\frac{d_o/d_i - 1}{2} \right]$$

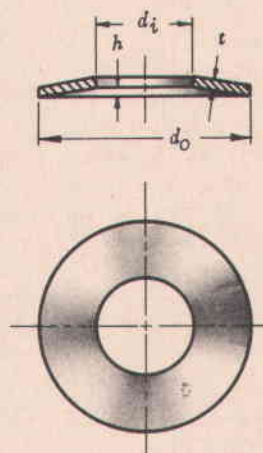


Fig. 16-9(a)

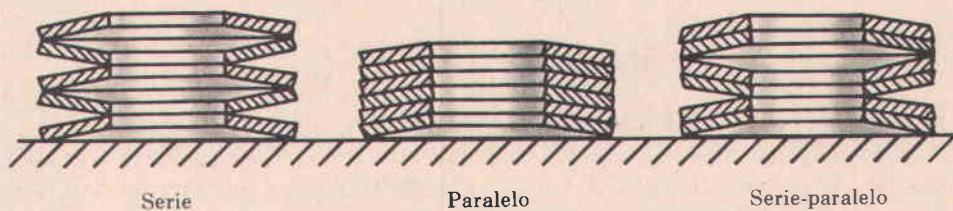


Fig. 16-9(b)

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Hallar las relaciones entre esfuerzo, fuerza y deformación para resortes de múltiples hojas.

Solución:

Considérese una viga en voladizo de resistencia constante y espesor uniforme t , como se muestra en la figura 16-2(a), cortada en n franjas de espesor b , apiladas de forma graduada, como muestra la figura 16-2(b).

El esfuerzo de flexión es igual en todas las secciones de la viga triangular. Vamos a suponer que esta situación prevalece después que se han apilado las franjas, aunque esto no es completamente cierto.

$$s = \frac{Mc}{I} = \frac{FL(\frac{1}{2}t)12}{nbt^3} = \frac{6FL}{nbt^2}$$

La deformación de una viga de resistencia constante y espesor uniforme es

$$\gamma = \frac{FL^3}{2EI_{(\max)}} = \frac{6FL^3}{Ebn t^3}$$

Estas ecuaciones se aplican igualmente al resorte de hojas semielípticas, el cual puede considerarse compuesto de dos voladizos soportados en su centro, como se muestra en la figura 16-3.

El agregar una o más hojas adicionales de longitud completa, n_e , de ancho y espesor constantes sobre la pila graduada, equivale aproximadamente a tener una viga e de ancho constante, cargada en paralelo con una viga g de resistencia constante, como muestra la figura 16-10. Las deformaciones en las vigas e y g son

$$\gamma_e = \frac{F_e L^3}{3EI_{(\max)e}} \quad y \quad \gamma_g = \frac{F_g L^3}{2EI_{(\max)g}}$$

donde F_e y F_g representan las porciones de la fuerza total F absorbidas por las vigas e y g . Como las deformaciones son iguales, podemos igualarlas: $\gamma_e = \gamma_g$, es decir

$$\frac{F_e L^3}{3EI_{(\max)e}} = \frac{F_g L^3}{2EI_{(\max)g}}$$

Sean n_g y n_e el número de hojas graduadas y el número de hojas adicionales con longitud completa, respectivamente. Entonces $I_{(\max)e} = n_e b t^3 / 12$ e $I_{(\max)g} = n_g b t^3 / 12$. Remplazando estos valores en la ecuación anterior, tenemos

$$\frac{F_e}{3n_e} = \frac{F_g}{2n_g} \quad \text{o} \quad F_e = \frac{3n_e F_g}{2n_g}. \text{ Ahora}$$

$$F = F_e + F_g, \quad F_e = \frac{3n_e}{3n_e + 2n_g} F$$

$$s_e = \frac{6F_e L}{n_e b t^2} = \frac{18FL}{bt^2(3n_e + 2n_g)}, \quad s_g = \frac{6F_g L}{n_g b t^2} = \frac{12FL}{bt^2(3n_e + 2n_g)}$$

$$\text{La deformación del resorte compuesto es } \gamma = \frac{12FL^3}{bt^3 E(3n_e + 2n_g)}$$

2. Deducir las relaciones entre esfuerzo, fuerza y deformación para un resorte helicoidal sometido a una carga axial.

Solución:

Con referencia a la figura 16-5, la componente F_b de la fuerza axial F produce un esfuerzo de flexión s , dado por la fórmula

$$s = \frac{16FD \sin \alpha}{\pi d^3} \quad (\text{despreciando los efectos de curvatura})$$

Este esfuerzo puede despreciarse para ángulos de hélice, α , pequeños. La fuerza axial F produce un esfuerzo de torsión s_s . Como $T = \frac{1}{2}FD \cos \alpha \approx \frac{1}{2}FD$ para ángulos de hélice pequeños,

$$s_s = \frac{TR}{J} = \frac{8FD}{\pi d^3}$$

donde F = carga axial, en lb; D = diámetro medio de la espira, en pul; d = diámetro del alambre, en pul; y = deformación axial, en pul; s_s = esfuerzo de corte, en psi.

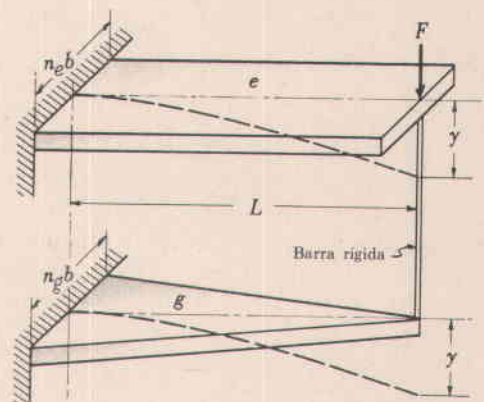


Fig. 16-10

Además del esfuerzo cortante de torsión hay un esfuerzo de corte transversal y un esfuerzo adicional debido a la curvatura de la espira. Con el fin de incluir estos dos efectos en el cálculo del esfuerzo torsional, se puede utilizar un factor K llamado factor Wahl.

$$s_s = K \frac{8FD}{\pi d^3}$$

donde $K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C}$ y el índice de elasticidad $C = D/d$.

Se puede obtener una ecuación de la deformación de un resorte helicoidal, igualando el trabajo necesario para deformar el resorte a la energía de torsión absorbida por el alambre torcido. El resorte helicoidal de n vueltas activas se desarrolla en una varilla recta de diámetro d y longitud $n\pi D/(\cos \alpha)$, como se muestra en la figura 16-11. Se puede tomar el $\cos \alpha$ como 1, ya que el ángulo de la hélice es generalmente pequeño. Entonces

trabajo que entra = energía absorbida

$$\frac{1}{2}Fy = \frac{1}{2}T\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}FD\right)\theta \quad \text{o} \quad y = \frac{1}{2}D\theta$$

Como $\theta = \frac{Tn\pi D}{JG} = \frac{16FD^2n}{d^4G}$, donde G = módulo torsional de elasticidad (psi),

$$y = \frac{8FD^3n}{d^4G} = \frac{8FC^3n}{dG}$$

El valor de G para un resorte de acero es aproximadamente $11,5 \times 10^6$ psi.

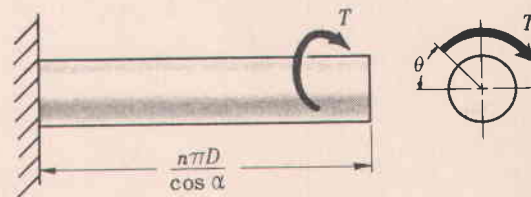


Fig. 16-11

3. Un resorte en voladizo de 35 pul de longitud está compuesto de 8 hojas graduadas y una hoja adicional de longitud completa. Las hojas tienen un ancho de $1\frac{3}{4}$ pul. En el extremo del resorte se coloca una carga de 500 lb que produce una deformación de 3 pul. Determinar el espesor de las hojas y el máximo esfuerzo de flexión en la hoja adicional de longitud completa, suponiendo primero que ésta ha sido preesforzada de modo que el esfuerzo es el mismo en todas las hojas y luego determinar el esfuerzo en la hoja adicional de longitud completa, suponiendo que ésta no ha sido preesforzada.

Solución:

$$y = \frac{12FL^3}{bt^3(2n_g + 3n_e)E}, \quad 3 = \frac{(12)(500)(35)^3}{(1,75)(t^3)(16+3)(3 \times 10^7)}, \quad t = 0,442 \text{ pul}$$

Si la hoja adicional de longitud completa ha sido preesforzada,

$$s = \frac{6FL}{nbt^2} = \frac{6(500)(35)}{9(1,75)(0,442)^2} = 34.300 \text{ psi.}$$

$$\text{Si no ha sido preesforzada, } s_e = \frac{18FL}{bt^2(2n_g + 3n_e)} = \frac{(18)(500)(35)}{(1,75)(0,442)^2(16+3)} = 48.500 \text{ psi.}$$

4. Determinar el número de espiras necesario y la deformación permisible en un resorte helicoidal hecho de alambre de acero de $1/16$ pul de diámetro, suponiendo un índice de elasticidad de 6 y un esfuerzo máximo permisible en corte de 50.000 psi. La razón de elasticidad debe ser 10 lb/pul.

Solución:

$$\text{Índice de elasticidad } C = \frac{D}{d}, \quad 6 = \frac{D}{1/16}, \quad D = 0,375 \text{ pul, factor Wahl } K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C} = 1,25.$$

$$\frac{F}{y} = \frac{dG}{8C^3n}, \quad 10 = \frac{(1/16)(11,5 \times 10^6)}{8(6^3)n}, \quad n = 41,6 \text{ espiras}$$

$$\text{Hallamos la fuerza y la deformación: } s_s = K \frac{8FD}{\pi d^3}, \quad 50.000 = 1,25 \frac{8F(0,375)}{\pi(1/16)^3}, \quad F = 10,2 \text{ lb.}$$

Para una razón de elasticidad de 10 lb/pul, la deformación debe limitarse a 1 pul.

5. Diseñar un resorte helicoidal que tenga un diámetro medio de 5 pul y una rata de elasticidad de 400 lb/pul. La carga axial total es 1900 lb y el esfuerzo de corte máximo permisible es 40.000 psi.

Solución:

El diseño exige determinar el número de espiras, n , y el diámetro del alambre, d .

$$\text{Utilizando } s_s = K \frac{8FD}{\pi d^3} \text{ con } d = \frac{D}{C}, \quad KC^3 = \frac{s_s \pi D^2}{8F} = \frac{40.000 \pi (5^2)}{8(1900)} = 207 \text{ (permitido).}$$

$$\text{Ensayemos } C = 5,5 \text{ en } \left(\frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C} \right) C^3 = 207: (1,165 + 0,112)(5,5)^3 = 212, \text{ cercano a } 207.$$

Entonces $d = 5/5,5 = 0,91$; utilizamos alambre de 1 pul de diámetro.

$$\frac{F}{y} = \frac{d^4 G}{8D^3 n}, \quad 400 = \frac{(1^4)(11,5 \times 10^6)}{8(5^3)n}, \quad n = 28,8 \text{ espiras}$$

6. Cuando se comprime $1\frac{1}{4}$ pul un resorte que tiene una razón de elasticidad de 100 lb/pul, las espiras se cierran. El esfuerzo de corte permisible es 50.000 psi, el índice de elasticidad C es 0,8, los extremos son rebajados a escuadra y $G = 12 \times 10^6$ psi. Calcular el diámetro del alambre, d , y el diámetro de la espira, D , que se requieren y la longitud del resorte cerrado.

Solución:

$$K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C} = 1,184. \text{ Entonces } s_s = K \frac{8FC}{\pi d^2}, \quad 50.000 = 1,184 \frac{8(125)8}{\pi d^2}, \quad d = 0,246 \text{ pul.}$$

$$D = dC = (0,246)(8) = 1,968 \text{ pul.}$$

$$\frac{F}{y} = \frac{d^4 G}{8D^3 n} = \frac{dG}{8C^3 n}, \quad 100 = \frac{(0,246)(12 \times 10^6)}{8(8^3)n}, \quad n = 7,22$$

$$\text{Longitud del resorte cerrado} = (n + 2)d = (7,22 + 2)(0,246) = 2,26 \text{ pul.}$$

7. En el fondo del hueco de un ascensor se coloca un grupo de 8 resortes idénticos en paralelo, para absorber el choque del ascensor en caso de falla. El ascensor pesa 6400 lb. Suponiendo que el ascensor tiene una caída libre de 4 pies a partir de la posición de reposo, determinar el esfuerzo máximo que soportará cada resorte, si los resortes son hechos de varilla de 1 pul de diámetro. Para cada resorte el índice de elasticidad es 6 y el número de vueltas activas es 15. Despreciar cualquier efecto de contrapeso en el sistema y tomar $G = 12 \times 10^6$ psi.

Solución:

Energía absorbida por cada resorte = $\left(\frac{6400}{8} \right) (48 + y) = \frac{1}{2} Fy$ de la cual $y = \frac{76.800}{F - 1600}$, donde F es la máxima fuerza soportada por cada resorte. Entonces

$$y = \frac{8FC^3 n}{dG} = \frac{8F(6^3)15}{1(12 \times 10^6)} = \frac{76.800}{F - 1600} \quad \text{que da } F = 6840 \text{ lb}$$

$$\text{Ahora, utilizando } K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C} = 1,25, \text{ obtenemos } s_s = K \frac{8FC}{\pi d^2} = 1,25 \frac{8(6840)6}{\pi(1^2)} =$$

130.500 psi.

8. El extremo libre de una viga de acero en voladizo, horizontal, de resistencia constante, está en contacto con un resorte helicoidal vertical, como se muestra en la figura 16-12. El ancho de la viga en su extremo fijo es 24 pul, la longitud de la viga es 30 pul y su espesor 0,5 pul. El resorte tiene 10 espiras activas de alambre de 0,5 pul de diámetro y un diámetro exterior de 4 pul. Tomar $G = 12 \times 10^6$ psi.

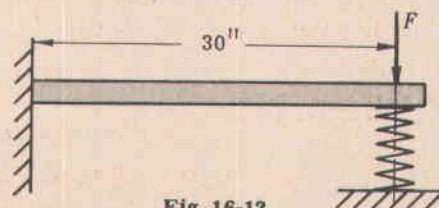


Fig. 16-12

- (a) ¿Qué fuerza Q , aplicada gradualmente en el extremo libre de la viga, se necesita para producir una deformación de 1,5 pul?
- (b) ¿Cuál será el esfuerzo de flexión producido en la viga en una sección localizada a una distancia de 15 pul del extremo fijo?
- (c) ¿Cuánta energía absorberá el resorte?

Solución:

Ambos resortes tienen la misma deformación. Para el resorte helicoidal,

$$\gamma = \frac{8FD^3n}{d^4G}, \quad 1,5 = \frac{8F(3,5)^3(10)}{(0,5)^4(12 \times 10^6)}, \quad F = 328 \text{ lb}$$

Para el resorte en voladizo: $\gamma = \frac{F'L^3}{2EI_{(\max)}}, \quad 1,5 = \frac{F'(30)^3}{2(30 \times 10^6)[(24)(0,5)^3/12]}, \quad F' = 833 \text{ lb.}$

(a) $Q = 328 + 833 = 1161 \text{ lb}$ (b) $s = \frac{Mc}{I} = \frac{(833 \times 15)(0,25)}{12(0,5)^3/12} = 25.000 \text{ psi}$

(c) Energía absorbida por el resorte helicoidal $= \frac{1}{2}F\gamma = \frac{1}{2}(328)(1,5) = 246 \text{ lb-pul}$

9. Un resorte helicoidal está colocado dentro de otro (las dimensiones son las que están tabuladas). Los dos resortes tienen la misma longitud libre y soportan una carga máxima total de 550 lb.

	Resorte exterior	Resorte interior
No. de espiras activas	6	10
Diámetro del alambre	0,5 pul	0,25 pul
Diámetro medio de la espira	3,5 pul	2,25 pul

Determinar:

- (a) La carga máxima que puede soportar cada resorte. (b) La deformación total de cada resorte. (c) El esfuerzo máximo soportado por el resorte exterior. Tomar $G = 12 \times 10^6 \text{ psi}$.

Solución:

Como ambos resortes sufren la misma deformación,

$$\gamma = \frac{8F_i D_i^3 n_i}{G d_i^4} = \frac{8F_o D_o^3 n_o}{G d_o^4}, \quad \frac{8F_i (3,5)^3 (6)}{G (0,5)^4} = \frac{8F_o (2,25)^3 (10)}{G (0,25)^4}, \quad F_i = 7,08 F_o$$

(a) La solución simultánea de $F_i = 7,08 F_o$ y $F_i + F_o = 550 \text{ lb}$ es $F_i = 482 \text{ lb}$, $F_o = 68 \text{ lb}$.

(b) $\gamma = \frac{8(482)(3,5)^3(6)}{(12 \times 10^6)(0,5)^4} = 1,325 \text{ pul.}$

(c) $C = \frac{3,5}{0,5} = 7, \quad K = \frac{28-1}{28-4} + \frac{0,615}{7} = 1,213, \quad y \quad s_s = K \frac{8FD}{\pi d^3} = 1,213 \frac{8(482)(3,5)}{\pi (0,5)^3} = 41.700 \text{ psi.}$

10. La carga de compresión aplicada a un resorte helicoidal de acero al carbono templado en aceite varía desde 150 lb hasta 400 lb. El diámetro medio de la bobina es 2 pul y se desea que el factor de seguridad sea 1,3, basado en la variación de esfuerzos. Determinar el diámetro que debe tener el alambre. $s_{ys} = 100.000 \text{ psi}$.

Solución:**Primer método.**

$$F_m = \frac{1}{2}(400+150) = 275 \text{ lb}, \quad F_v = \frac{1}{2}(400-150) = 125 \text{ lb}$$

$$s_m = K_s \frac{8F_m D}{\pi d^3} = K_s \frac{8(275)(2)}{\pi d^3} = K_s \frac{1400}{d^3}, \quad s_v = K \frac{8F_v D}{\pi d^3} = K \frac{8(125)(2)}{\pi d^3} = K \frac{636}{d^3}$$

Ahora resolvemos el problema por ensayo y error. Ensayemos alambre No. 4-0 W y M con $d = 0,3938$ pul. Entonces

$$C = \frac{2}{0,3938} = 5,07, \quad K_S = 1 + \frac{0,5}{C} = 1,099, \quad K = \frac{4C-1}{4C-4} + \frac{0,615}{C} = 1,306$$

$$s_m = 1,099 \frac{1400}{(0,3938)^3} = 25.200 \text{ psi}, \quad s_v = 1,306 \frac{636}{(0,3938)^3} = 13.650 \text{ psi}$$

$$\text{Suponiendo } s_{(rel)} = \frac{36.800}{(0,3938)^{0,2}} = 44.400 \text{ psi}, \quad N = \frac{s_{ys}}{s_m - s_v + 2s_v s_{ys}/s_{(rel)}} = 1,37 \text{ (satisfactorio).}$$

Se utiliza alambre de acero al carbono templado en aceite No. 4-0.

Segundo método. Ensayar alambre No. 4-0.

$$\begin{aligned} s_S(\max) - s_S(\min) &= K \frac{8D[F(\max) - F(\min)]}{\pi d^3} = \frac{s_{(rel)}}{N} \\ &= 1,306 \frac{8(2)(250)}{\pi (0,3938)^3} = 27.000 = \frac{44.400}{N} \end{aligned}$$

de donde $N = 1,64$ (con base en la fatiga).

$$\begin{aligned} s_S(\max) &= K_S \frac{8DF(\max)}{\pi d^3} = \frac{s_{ys}}{N} \\ &= 1,099 \frac{8(2)(400)}{\pi (0,3938)^3} = 36.800 = \frac{100.000}{N} \end{aligned}$$

de donde $N = 2,72$ (con base en la fluencia).

El factor de seguridad es satisfactorio para alambre No. 4-0.

PROBLEMAS PROPUESTOS

11. Un resorte de hojas semielípticas sometido a una carga central de 3000 lb debe tener una longitud efectiva de 36 pul y su deformación no debe exceder 3 pul. El resorte tiene 10 hojas, dos de las cuales son de longitud completa y todas las hojas tienen el mismo ancho y el mismo espesor. El esfuerzo máximo en las hojas no debe exceder 50.000 psi. Calcular el ancho y el espesor de las hojas. Resp. $b = 11$ pul, $t = 0,172$ pul
12. Un resorte helicoidal para compresión está hecho de alambre de acero y tiene un esfuerzo cortante permisible de 130.000 psi, con un módulo de elasticidad en corte de $11,5 \times 10^6$ psi. El diámetro medio del resorte es 5 pul y se le aplica una carga de 1100 lb. ¿Cuál deberá ser el diámetro del alambre, suponiendo que el resorte va a estar esforzado al máximo? Resp. $d = 0,5$ pul
13. Calcular el diámetro que debe tener el alambre para un resorte helicoidal hecho con las siguientes especificaciones: Diámetro medio del resorte = 6 pul, razón de elasticidad = 500 lb/pul, carga de trabajo = 1800 lb, esfuerzo de diseño = 40.000 psi. Resp. Utilizar alambre de 1 pul
14. ¿Qué espesor de la hoja se necesita para un resorte en voladizo diseñado con las siguientes especificaciones:
 Carga sobre el resorte = 500 lb Esfuerzo en tracción de diseño = 50.000 psi
 Número total de hojas = 8 Longitud del resorte = 20 pul
 Ancho de cada hoja = 2 pul Número de hojas adicionales de longitud completa = 2
 Resp. $t = 0,274$ pul

15. Un resorte helicoidal se coloca dentro de otro; el resorte exterior tiene una longitud libre $1\frac{1}{2}$ pul mayor que la del resorte interior. Las dimensiones de cada resorte son las siguientes:

	Resorte exterior	Resorte interior
Diámetro medio	4 pul	$2\frac{1}{2}$ pul
Diámetro del alambre	$\frac{1}{2}$ pul	$\frac{1}{2}$ pul
Vueltas inactivas	2	2
Vueltas activas	20	15
Material	SAE 1060	SAE 1090

Determinar la razón de elasticidad combinada de los dos resortes, cuando se ha aplicado una carga suficiente para deformar $2\frac{1}{2}$ pul el resorte exterior. Utilizar $G = 12 \times 10^6$ psi. Resp. 473 lb/pul

16. Un resorte helicoidal de acero de 4 pul de diámetro exterior que tiene 10 espiras activas de alambre de 0,5 pul de diámetro está en contacto con un resorte de acero en voladizo que tiene 6 hojas graduadas de 4 pul de ancho y 0,25 pul de espesor, como se muestra en la figura 16-13.

- (a) ¿Qué fuerza F se debe aplicar gradualmente en el extremo superior del resorte helicoidal para que se produzca en el resorte en voladizo una deflexión del 1 pul?
- (b) ¿Cuál será el máximo esfuerzo cortante producido en el resorte helicoidal?

Resp. $F = 69,5$ lb, $s_s = 6000$ psi

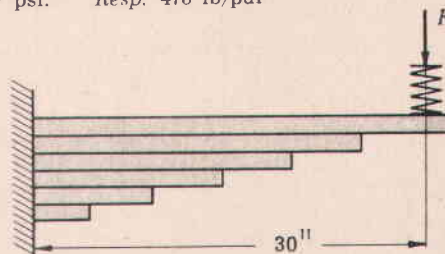


Fig. 16-13

17. Un peso $W = 2400$ lb está soportado por medio de un resorte (o resortes), como muestra la figura 16-14. Se desea que el peso vibre con una cierta frecuencia natural y se ha encontrado que la razón de elasticidad necesaria para obtener esa frecuencia es 1500 lb/pul.

En un depósito de chatarra se dispone de un grupo de resortes de acero idénticos que tienen las siguientes especificaciones:

- Diámetro medio = 3 pul
- Índice de elasticidad = 6
- Número de espiras activas = 8
- Módulo de elasticidad en corte = 12×10^6 psi
- Módulo de elasticidad en tracción = 30×10^6 psi

- (a) ¿Cuántos resortes se deben utilizar y cómo se deben disponer para obtener una razón de elasticidad tan cercana como sea posible a la razón que se desea?
- (b) Suponiendo que los resortes pueden modificarse quitándoles las vueltas que sea necesario y puliéndolos en sus extremos, ¿cuántas espiras activas se le deben quitar a cada resorte para obtener la razón de elasticidad de 1500 lb/pul que se desea?
- (c) ¿Cuál será el máximo esfuerzo soportado por cada resorte en (a) y en (b)?

Resp. (a) Utilizar 3 ó 4 resortes en paralelo

(b) Si se utilizan 3 resortes, cortarle una espira activa a cada resorte

(c) $s_s = 61.000$ psi en ambos casos

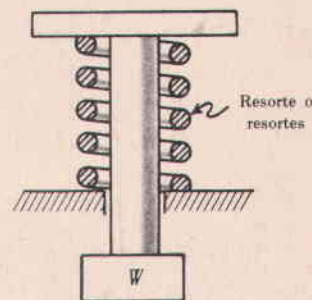


Fig. 16-14

18. Referirse a la figura 16-15. Un resorte de hojas semielípticas tiene una longitud efectiva de 60 pul. El asiento del resorte (punto medio entre las argollas) sostiene un resorte helicoidal, al cual se le impone una carga de impacto equivalente a 1500 lb-pie de energía. El resorte de hojas se compone de 10 hojas graduadas y 2 hojas adicionales de longitud completa, cada una de $\frac{1}{4}$ pul de espesor y 2 pul de ancho. El resorte helicoidal está compuesto de 6 vueltas efectivas de alambre de $\frac{5}{8}$ pul y tiene un diámetro medio de 4 pul. Calcular el máximo esfuerzo producido en cada resorte.

Resp. $s_s = 107.000$ psi en el resorte helicoidal

$s = 125.000$ psi en el resorte de hojas

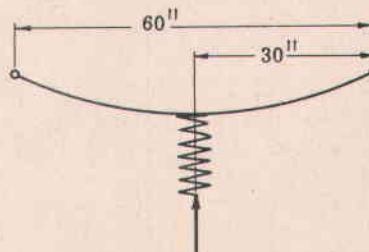


Fig. 16-15

19. Un regulador centrífugo cargado con un resorte que tiene las dimensiones que se indican en la figura 16-16(a) requiere una fuerza del resorte de 42 lb para permitir la velocidad adecuada con las bolas situadas a un radio de 5 pul. Suponer que la posición límite es la que se muestra en la figura 16-16(b), con las bolas a 7 pul de radio. Para obtener una regulación apropiada de la velocidad, la fuerza ejercida por el resorte en esta posición debe ser de 129 lb.

- Determinar la razón elástica que se requiere.
- Para un esfuerzo de corte máximo de 50.000 psi y un índice elástico de 0,8, determinar el diámetro del alambre y el diámetro medio de la espira que se requieren.
- Utilizando un módulo en corte $G = 11,6 \times 10^6$ psi, determinar el número de vueltas activas que se necesita.
- Permitiendo una vuelta ineficaz en cada extremo, determinar la longitud libre del resorte, tal que éste quede cerrado en la posición que se muestra en la figura 16-16(b).
- ¿Cuál es la longitud del resorte en la posición que se muestra en la figura 16-16(a)?

Resp. (a) 50 lb/pul (d) Longitud libre = 6,63 pul
 (b) $d = 0,25$ pul, $D = 2$ pul (e) Longitud = 5,79 pul
 (c) $n = 14,2$ vueltas activas

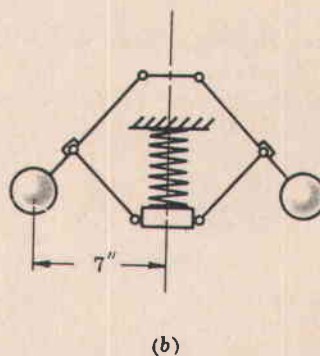
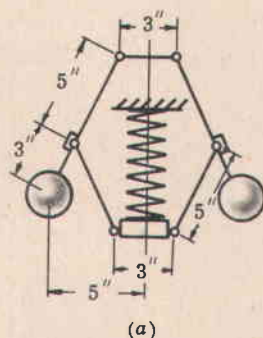


Fig. 16-16

20. Un resorte helicoidal de acero al carbono tiene un diámetro medio de 1,5 pul y está hecho de varilla de $\frac{1}{2}$ pul. El resorte tiene un índice de elasticidad 3 y está sometido a una carga alternante que oscila entre un máximo de 1800 lb y un mínimo de 1300 lb. Si el límite de fluencia en torsión del material es 110.000 psi y el límite de fatiga debido a la carga libre es 44.000 psi, determinar el factor de seguridad con el cual debe operar el resorte, tanto desde el punto de vista de la fatiga, como desde el punto de vista de la fluencia.

Resp. $N = 1,82$ con base en la fatiga
 $N = 1,58$ con base en la fluencia

21. Un resorte para compresión se va a utilizar en un servicio donde el valor máximo de la carga variable es tres veces el valor mínimo. El resorte que se especifica a continuación está disponible en almacenamiento y se debe verificar su capacidad en las condiciones de carga dadas, para determinar si es recomendable. Las especificaciones del resorte son

El material es acero al carbono templado en aceite, $s_{ys} = 100.000$ psi

Diámetro medio de la espira = 2 pul

Dimensión del alambre = No. 4-0 = 0,394 pul de diámetro

Espiras activas = 11; espiras inactivas = 2 (una en cada extremo)

Longitud libre del resorte = 7 pul

Tomando un factor de diseño de 1,3, con base en los esfuerzos variables, ¿cuál es el valor de la carga máxima permisible? (Aplicar el valor completo del factor Wahl para el esfuerzo variable y la parte del factor Wahl que corrige por efecto del esfuerzo cortante trasversal para el esfuerzo medio.)

Resp. $F(\max) = 406$ lb

Capítulo 17

Fuerzas en los engranajes

LAS FUERZAS COMPONENTES generalmente se determinan antes que la fuerza resultante del engranaje, aunque ésta se puede hallar por medio de la suma vectorial de las componentes. Las componentes se utilizan para calcular las reacciones sobre los cojinetes, las dimensiones del eje, etc.

LAS PERDIDAS POR ROZAMIENTO en engranajes rectos, helicoidales y cónicos, generalmente son tan pequeñas que se puede considerar que estos engranajes operan con una eficiencia del 100%. Existen situaciones en que debe tenerse en cuenta el rozamiento en engranajes rectos, aunque sea pequeño; tal es el caso de la potencia que circula en un sistema planetario.

Los tornillos sin fin y los engranajes de tornillo sin fin no son tan eficientes como los engranajes rectos, los helicoidales y los cónicos; por tanto, usualmente se tiene en cuenta el rozamiento para determinar las fuerzas componentes sobre los tornillos sin fin y sobre los engranajes de tornillo sin fin.

Las fuerzas componentes en un **ENGRANAJE RECTO** son (véase la figura 17-1):

- (1) Fuerza tangencial $F_t = M_t/r$, donde M_t = momento en el engranaje y r = radio primitivo del engranaje.
- (2) Fuerza separadora o radial $F_r = F_t \tan \phi$, donde ϕ es el ángulo de presión.

Obsérvese que la fuerza radial siempre está dirigida hacia el centro del engranaje.

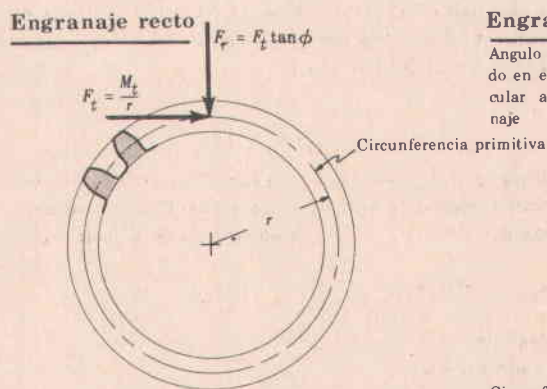


Fig. 17-1

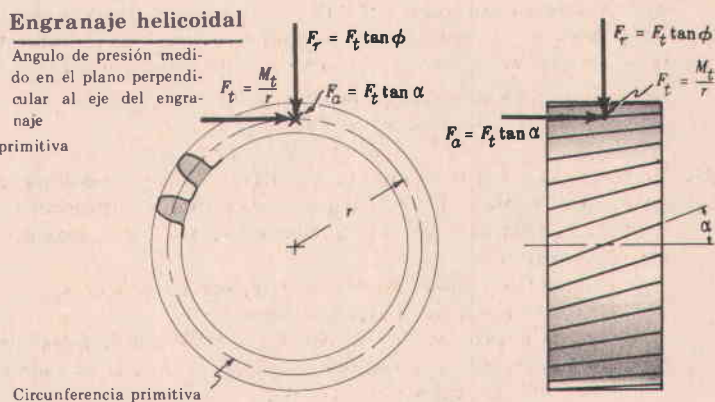


Fig. 17-2

Las fuerzas componentes en un **ENGRANAJE HELICOIDAL** se expresan en dos direcciones diferentes, según como se defina el ángulo de presión. Hay dos normas: (1) El ángulo de presión ϕ se mide en el plano perpendicular al eje del engranaje, y (2) el ángulo de presión ϕ_n se mide en un plano normal a un diente. (Véanse las figuras 17-2 y 17-3.)

- (1) Si el ángulo de presión se mide en un plano perpendicular al eje del engranaje, las componentes son (véase la figura 17-2):

- Fuerza tangencial $F_t = M_t/r$
- Fuerza separadora $F_r = F_t \tan \phi$
- Fuerza de empuje $F_a = F_t \tan \alpha$

donde r = radio primitivo del engranaje

ϕ = ángulo de presión medido en un plano perpendicular al eje del engranaje

α = ángulo de la hélice medido desde el eje del engranaje

- (2) Si el ángulo de presión se mide en un plano perpendicular a un diente, las componentes son (véase la figura 17-3):

- Fuerza tangencial $F_t = M_t/r$
- Fuerza separadora $F_r = \frac{F_t \tan \phi_n}{\cos \alpha}$
- Fuerza de empuje $F_a = F_t \tan \alpha$

donde ϕ_n = ángulo de presión medido en un plano perpendicular a un diente

α = ángulo de la hélice medido desde el eje del engranaje

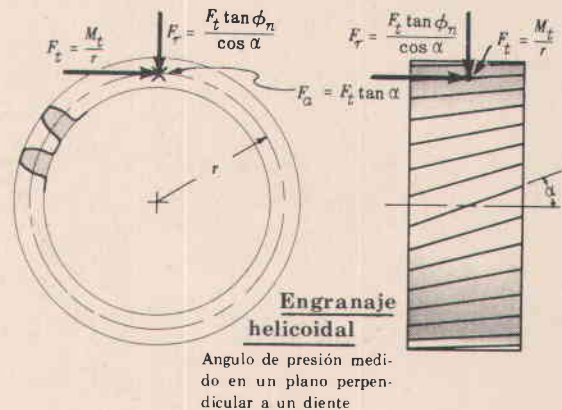


Fig. 17-3

El sentido de la fuerza de empuje depende del sentido de rotación y del sentido de la hélice. En la figura 17-4 se muestran cuatro combinaciones posibles del sentido de la hélice del engranaje (a mano derecha o a mano izquierda), con diferentes sentidos de rotación y con el sentido del empuje. Invertiendo el sentido de rotación del engranaje motor, se invertirá el sentido del empuje, como se muestra.

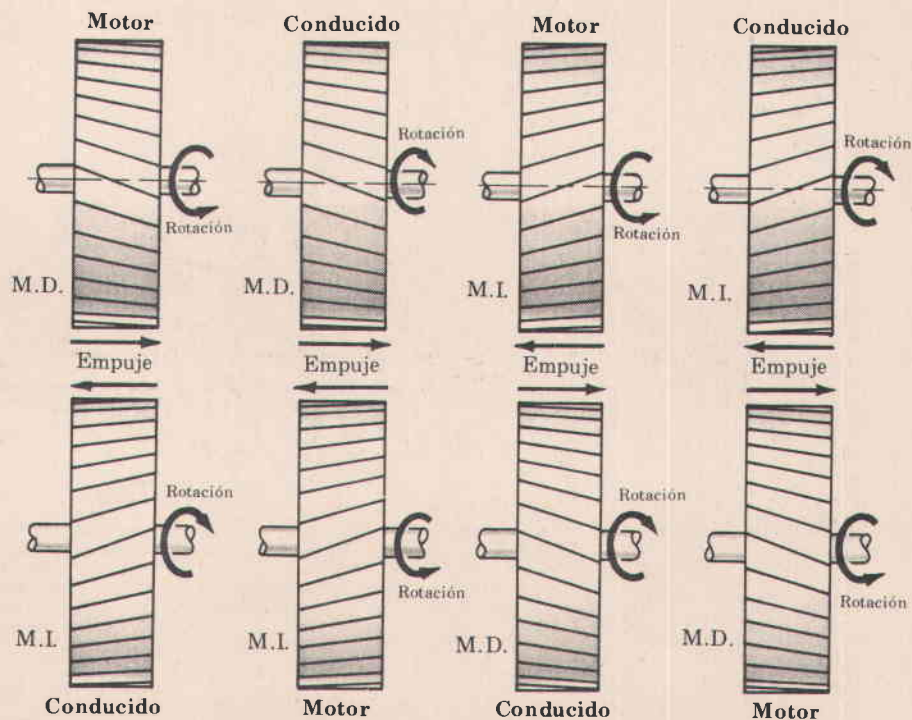


Fig. 17-4

Las fuerzas componentes en **ENGRANAJES CONICOS DE DIENTES RECTOS**, que se muestran en la figura 17-5(a), son:

- (1) Fuerza tangencial $F_t = M_t/r$.

Se considera que esta fuerza actúa en el radio primitivo medio, r .

- (2) Fuerza separadora $F_r = F_t \tan \phi$

donde ϕ es el ángulo de presión. La fuerza separadora puede descomponerse en dos componentes: La fuerza componente que actúa a lo largo del eje del piñón se denomina fuerza de empuje del piñón, F_p , y la fuerza componente que actúa a lo largo del eje del engranaje se denomina fuerza de empuje del engranaje, F_g .

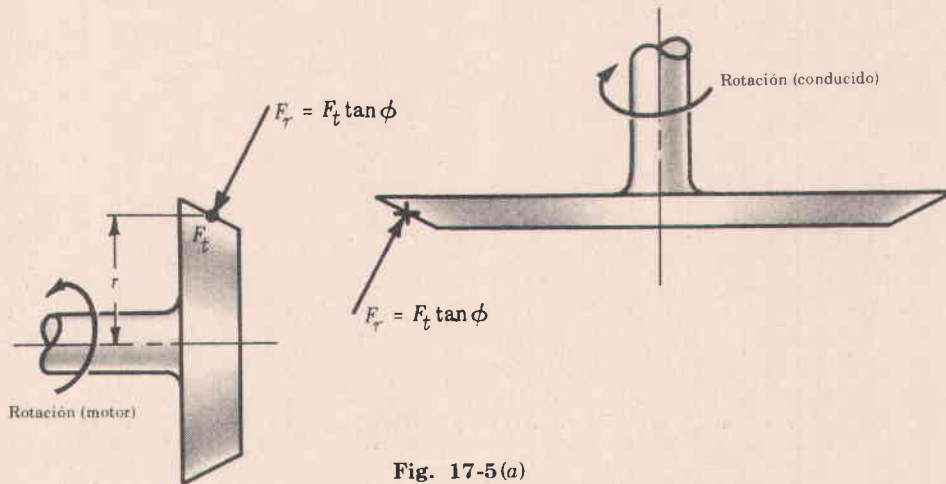


Fig. 17-5(a)

Las tres componentes [mostradas en la Fig. 17-5(b)] son mutuamente perpendiculares y son:

- La fuerza tangencial $F_t = M_t/r$ que actúa en el radio primitivo medio del piñón, r , donde M_t es el momento de torsión del piñón.
- La fuerza de empuje del piñón $F_p = F_t \tan \phi \sin \beta$, donde β es el ángulo del cono primitivo del piñón.
- La fuerza de empuje del engranaje $F_g = F_t \tan \phi \cos \beta$.

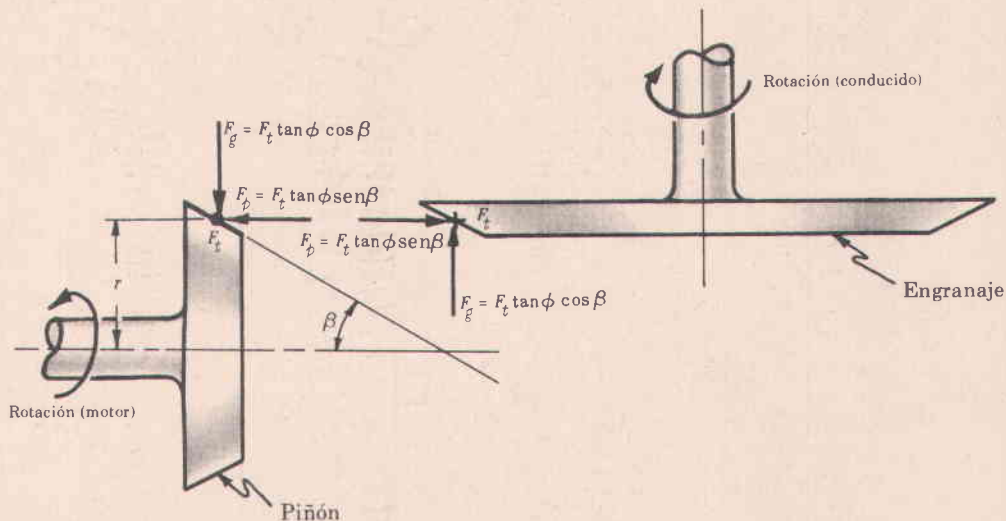


Fig. 17-5(b)

Las fuerzas componentes en **ENGRANAJES CONICOS ESPIRALES** son más complicadas que las de los engranajes cónicos de dientes rectos.

La fuerza tangencial en el radio primitivo medio r es $F_t = M_t/r$, donde M_t es el momento de torsión.

La fuerza de empuje del piñón, F_p , y la fuerza de empuje del engranaje, F_g , pueden expresarse en diferentes sentidos, según como se mida el ángulo de presión. En la figura 17-6(a hasta d) se muestran las fuerzas de empuje del piñón y del engranaje, con el ángulo de presión ϕ_n medido en el plano normal al diente, para diferentes sentidos de la espiral (es decir, a mano izquierda o a mano derecha) y para diferentes sentidos de rotación. Los símbolos son:

F_p = fuerza de empuje del piñón

F_g = fuerza de empuje del engranaje

F_t = fuerza tangencial que causa el momento torsor en el radio medio, r

ϕ_n = ángulo de presión del diente medido en el plano normal a un diente

β = ángulo del cono primitivo del piñón

γ = ángulo de la espiral del piñón

Caso I

Piñón (espiral a mano derecha)

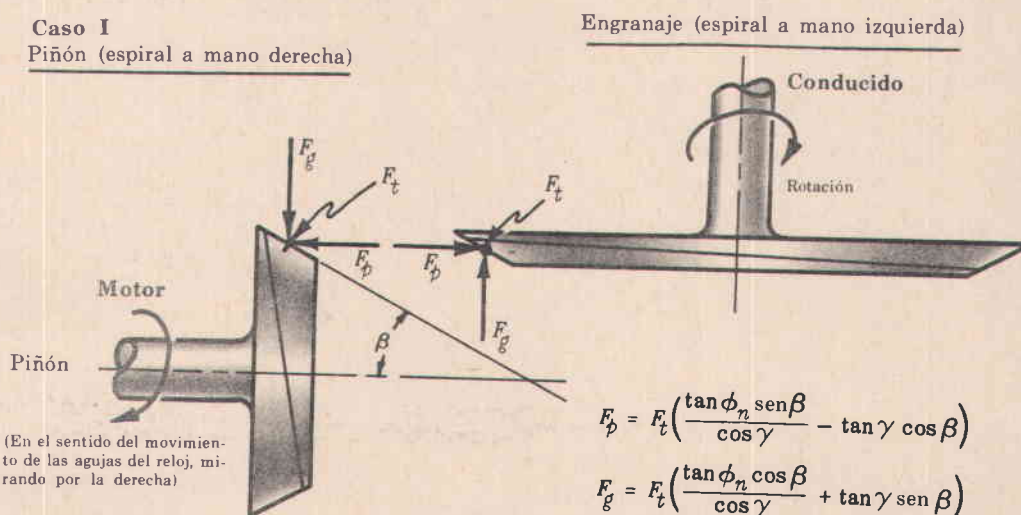


Fig. 17-6(a)

Caso II

Piñón (espiral a mano derecha)

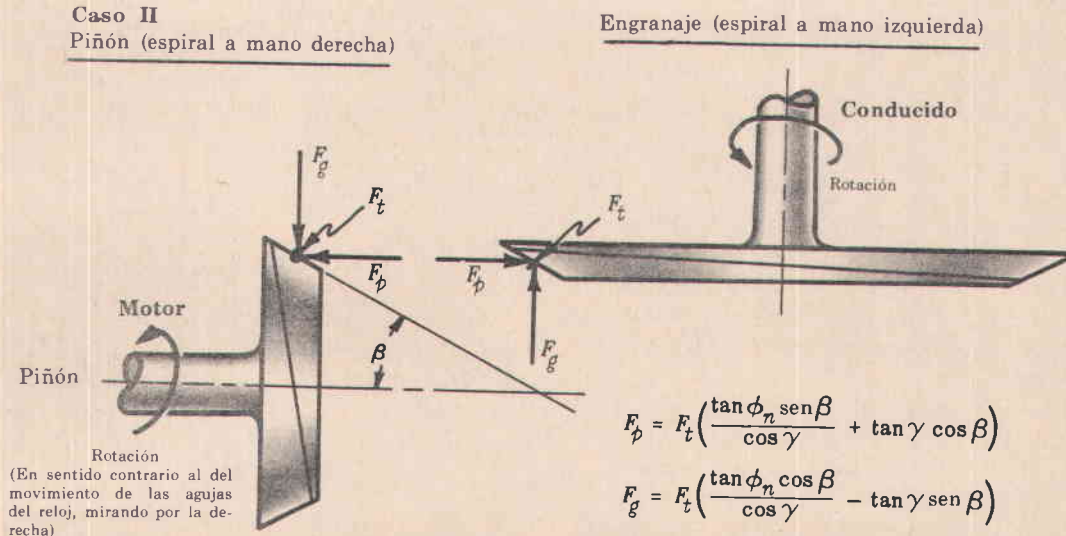


Fig. 17-6(b)

Caso III

Piñón (espiral a mano izquierda)

Engranaje (espiral a mano derecha)

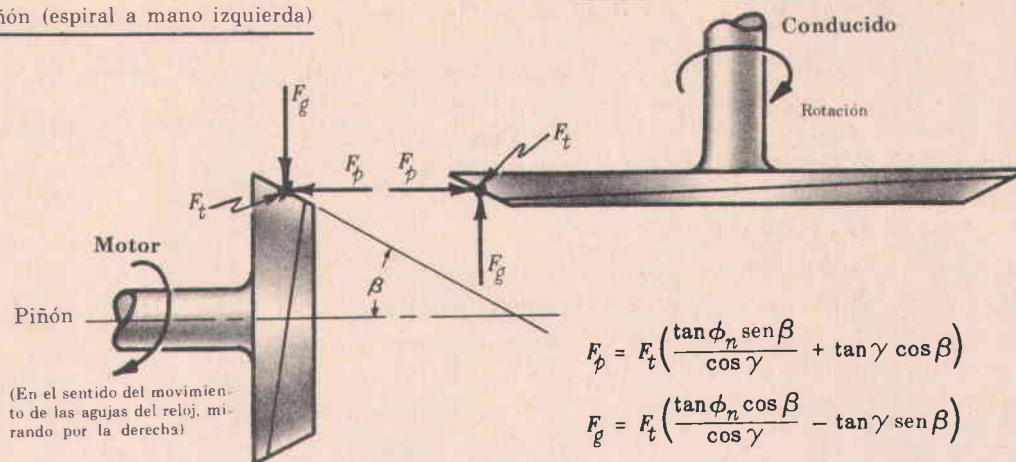


Fig. 17-6(c)

Caso IV

Piñón (espiral a mano izquierda)

Engranaje (espiral a mano derecha)

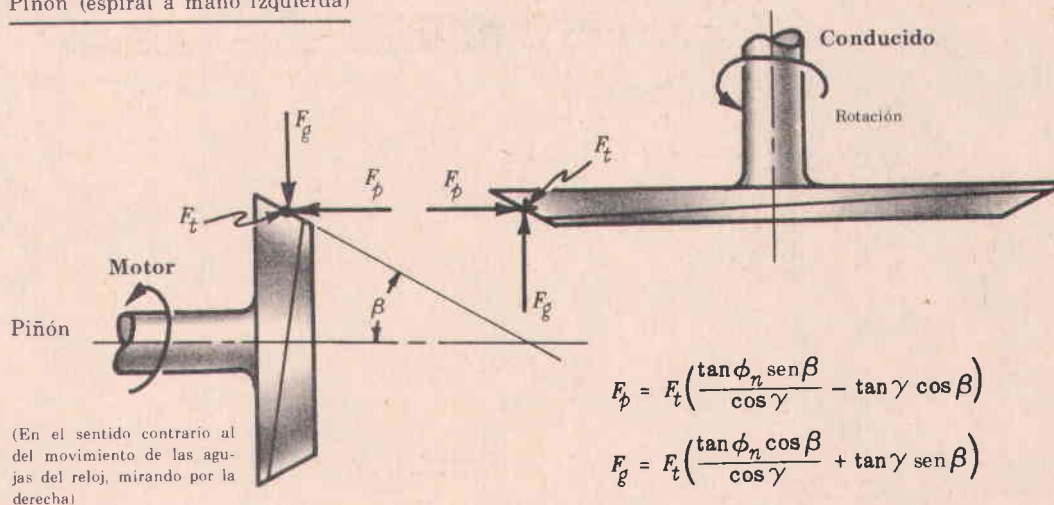


Fig. 17-6(d)

El ángulo de la espiral se mide como se indica en la figura 17-7.

Si las fuerzas son positivas, sus sentidos serán los que se muestran en la figura; si son negativas, sus sentidos serán opuestos a los que se muestran.

Si el ángulo de presión ϕ se mide en un plano normal a un elemento del cono primitivo, las ecuaciones dadas con la figura se cambiarán, haciendo

$$\tan \phi = \frac{\tan \phi_n}{\cos \gamma}$$

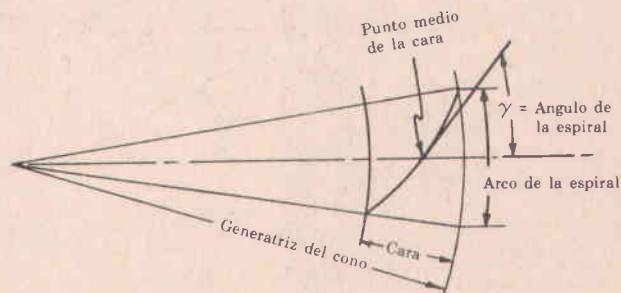


Fig. 17-7

ENGRANAJE CON TORNILLO SIN FIN. Las tres componentes (mutuamente perpendiculares) de la fuerza resultante que actúa entre un tornillo sin fin y un engranaje son:

$$(1) F_{t(\text{tornillo})} = M_t / r_w \text{ donde } F_{t(\text{tornillo})} = \text{fuerza tangencial sobre el tornillo sin fin}$$

M_t = momento sobre el tornillo sin fin

r_w = radio primitivo del tornillo sin fin.

$$(2) F_{t(\text{engranaje})} = F_{t(\text{tornillo})} \left(\frac{1 - f \tan \alpha / \cos \phi_n}{\tan \alpha + f / \cos \phi_n} \right)$$

donde $F_{t(\text{engranaje})}$ = fuerza tangencial sobre el engranaje

f = coeficiente de rozamiento

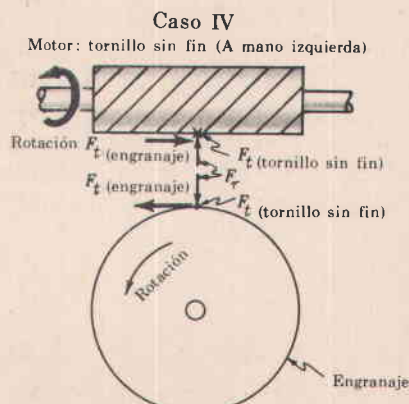
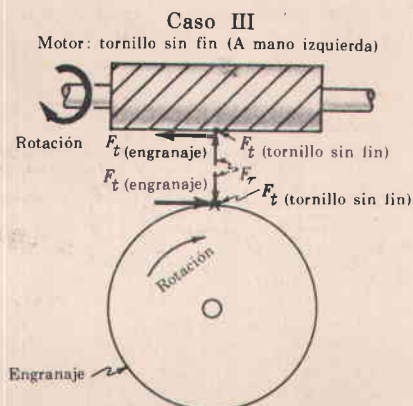
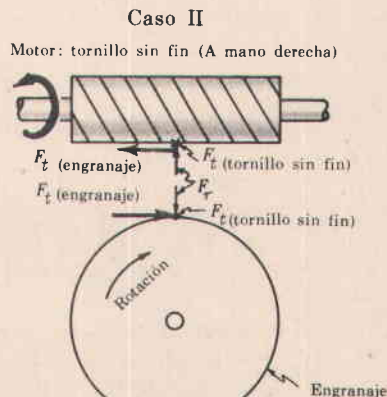
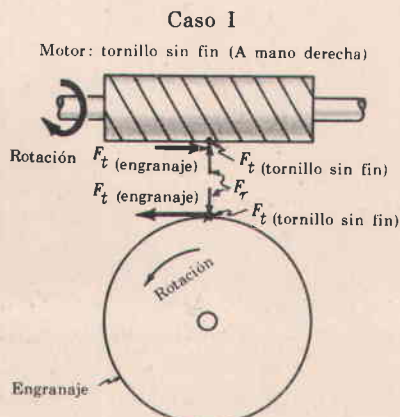
α = ángulo de avance del tornillo sin fin (que es el mismo ángulo de la hélice del engranaje). El ángulo de avance del tornillo sin fin se encuentra por la fórmula $\tan \alpha = \text{avance} / (\pi D_w)$, donde el avance es igual al número de filetes multiplicado por el paso lineal del tornillo sin fin y D_w es el diámetro primitivo del tornillo sin fin. Obsérvese que el paso lineal del tornillo sin fin es igual al paso circular del engranaje.

ϕ_n = ángulo de presión normal medido en un plano perpendicular a un diente (generalmente $14\frac{1}{2}^\circ$ para filete sencillo o doble y 20° para filete triple o cuádruple).

$$(3) F_r = F_{t(\text{engranaje})} \left(\frac{\sin \phi_n}{\cos \phi_n \cos \alpha - f \sin \alpha} \right) = F_{t(\text{tornillo sin fin})} \left(\frac{\sin \phi_n}{\cos \phi_n \sin \alpha + f \cos \alpha} \right)$$

donde F_r es la fuerza separadora.

La figura 17-8 muestra las fuerzas para diferentes sentidos de rotación y diferente sentido de los filetes del tornillo sin fin.



PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un piñón recto de 4 pul de diámetro tiene aplicado un momento de 2000 lb-pul y está acoplado a un engranaje de 10 pul de diámetro. Determinar la fuerza tangencial F_t y la fuerza separadora F_r e indicar sus posiciones. El ángulo de presión es 20° .

Solución:

$$F_t = M_t / r = 2000 / 2 = 1000 \text{ lb}$$

$$F_r = F_t \tan \phi = 1000 \tan 20^\circ = 364 \text{ lb}$$

Las fuerzas se muestran en la figura 17-11. Obsérvese que la fuerza tangencial que actúa sobre el piñón causa un momento que balancea el momento aplicado y la fuerza separadora del piñón está dirigida hacia el centro del piñón.

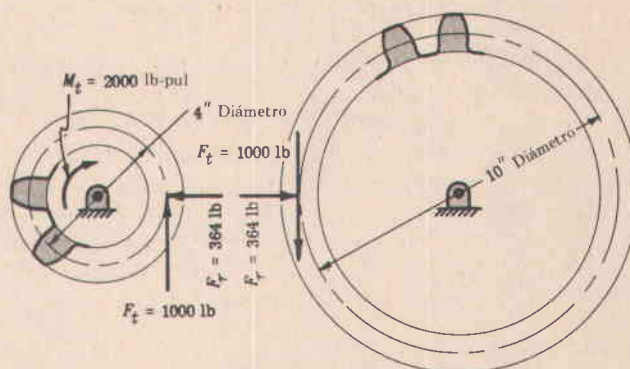


Fig. 17-11

2. Con referencia a la figura 17-12, el engranaje recto A recibe 4 HP a una velocidad de 600 rpm a través de su eje y gira en el sentido del movimiento de las agujas del reloj. El engranaje B es loco y el engranaje C es el engranaje motor. Los dientes son de 20° y profundidad total. (En el esquema se muestran las circunferencias primitivas.) Determinar: (1) El momento que debe transmitir cada eje. (2) La carga que debe soportar cada diente, de acuerdo con la cual se debe diseñar cada engranaje. (3) La fuerza aplicada al eje loco como resultado de las cargas sobre los dientes del engranaje.

Solución:

- (a) Diámetros de los engranajes: $D_A = 35/4 = 8\frac{3}{4}$ pul

$$D_B = 65/4 = 16\frac{1}{4} \text{ pul}$$

$$D_C = 45/4 = 11\frac{1}{4} \text{ pul}$$

- (b) Momento sobre el eje del engranaje A

$$= (\text{HP})(63.024)/N = 4(63.024)/600$$

$$= 420 \text{ lb-pul}$$

Momento sobre el eje del engranaje B = 0.

Momento sobre el eje del engranaje C

$$= 4(63.024)/600(35/45) = 540 \text{ lb-pul}$$

donde el engranaje C gira a $600(35/45)$ rpm.

- (c) Fuerza tangencial sobre el engranaje A

$$= F_t = \frac{M_t}{r} = \frac{420}{\frac{1}{2}(8\frac{3}{4})} = 96 \text{ lb.}$$

Fuerza separadora sobre el engranaje A

$$= F_r = F_t \tan \phi = 96 \tan 20^\circ = 35 \text{ lb.}$$

- (d) Las mismas fuerzas tangencial y separadora actúan entre los engranajes A y B y entre los engranajes B y C, en los sentidos que se indican.

- (e) La carga que debe soportar cada diente, de acuerdo con la cual se debe diseñar cada engranaje, es 96 lb.

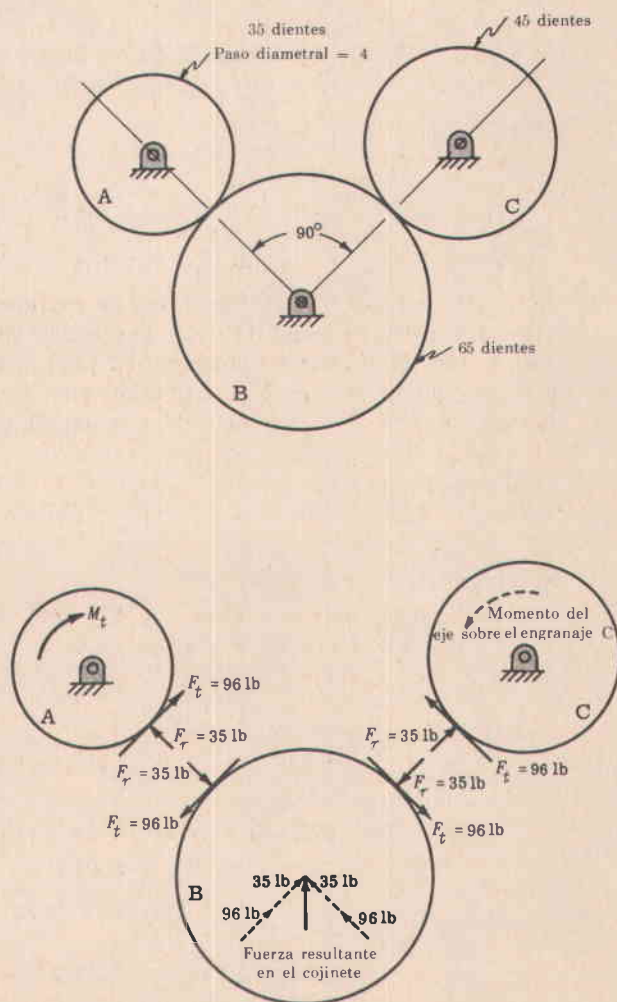


Fig. 17-12

- (f) La fuerza aplicada al eje loco del engranaje B es la suma vectorial de las fuerzas aplicadas al engranaje B por los engranajes A y C:

$$F_B = \sqrt{(96+35)^2 + (96+35)^2} = 185 \text{ lb.}$$

3. A un engranaje helicoidal de 9 pul de diámetro se le aplica un momento de 1800 lb-pul, a través de su eje. El engranaje tiene 45 dientes. El ángulo de presión, medido en un plano perpendicular al eje del engranaje, es 20° . El ángulo de la hélice es 30° . Determinar: (a) La fuerza componente tangencial F_t . (b) La fuerza componente separadora F_r . (c) La fuerza componente de empuje axial F_a . El engranaje tiene sus dientes a mano izquierda y acopla con otro engranaje que tiene sus dientes a mano derecha y su eje localizado exactamente encima del eje del primer engranaje. Referirse a la figura 17-13.

Solución:

$$(a) F_t = M_t / r = 1800 / 4,5 = 400 \text{ lb}$$

$$(b) F_r = F_t \tan \phi = 400 \tan 20^\circ = 146 \text{ lb}$$

$$(c) F_a = F_t \tan \alpha = 400 \tan 30^\circ = 231 \text{ lb}$$

Los sentidos de las fuerzas se indican en la figura 17-13.

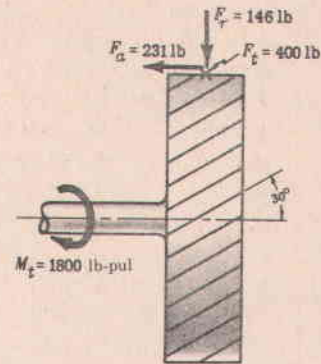


Fig. 17-13

4. Repetir el problema 3, tomando el ángulo de presión, medido en un plano perpendicular al diente, igual a 20° . Referirse a la figura 17-14.

Solución:

$$(a) F_t = M_t / r = 1800 / 4,5 = 400 \text{ lb}$$

$$(b) F_r = \frac{F_t \tan \phi_n}{\cos \alpha} = \frac{400 \tan 20^\circ}{\cos 30^\circ} = 168 \text{ lb}$$

$$(c) F_a = F_t \tan \alpha = 400 \tan 30^\circ = 231 \text{ lb}$$

5. En la figura 17-15 se muestra un par de engranajes cónicos de dientes rectos que tienen una razón de velocidades de $4/3$. El diámetro primitivo del piñón es 6 pul y la longitud del diente $1\frac{1}{2}$ pul. El piñón gira a 240 rpm. Los dientes son de paso diametral 5 y evolvente a $14\frac{1}{2}^\circ$. Si se transmiten 8 HP, determinar: (1) La fuerza tangencial F_t en el radio medio. (2) La fuerza de empuje del piñón, F_p . (3) La fuerza de empuje del engranaje, F_g .

Solución:

$$(a) \text{ Diámetro del engranaje} = 6(4/3) = 8 \text{ pul.}$$

$$(b) \text{ Altura inclinada del cono primitivo, } L$$

$$= \sqrt{R_p^2 + R_g^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ pul}$$

$$(c) \text{ Radio medio del piñón}$$

$$r_m = R_p - \frac{1}{2}b \sin \beta = 3 - \frac{1}{2}(3/2)(3/5) = 2,55 \text{ pul}$$

$$(d) \text{ Momento en el piñón, } M_t$$

$$= (\text{HP})(63.024)/N = 8(63.024)/240 = 2100 \text{ lb-pul}$$

$$(e) \text{ Fuerza tangencial en el radio medio, } F_t$$

$$= M_t / r_m = 2100 / 2,55 = 825 \text{ lb.}$$

$$(f) \text{ Fuerza de empuje del piñón, } F_p$$

$$= F_t \tan \phi \sin \beta = 825 (\tan 14\frac{1}{2}^\circ) (3/5) = 129 \text{ lb}$$

$$(g) \text{ Fuerza de empuje del engranaje, } F_g$$

$$= F_t \tan \phi \cos \beta$$

$$= 825 (\tan 14\frac{1}{2}^\circ) (4/5) = 171 \text{ lb}$$

Las fuerzas se muestran en los diagramas de cuerpo libre.

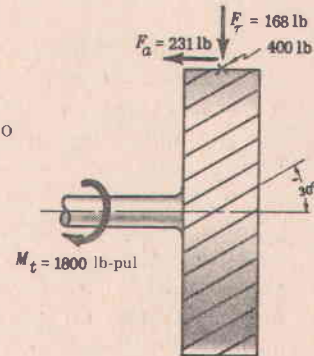


Fig. 17-14

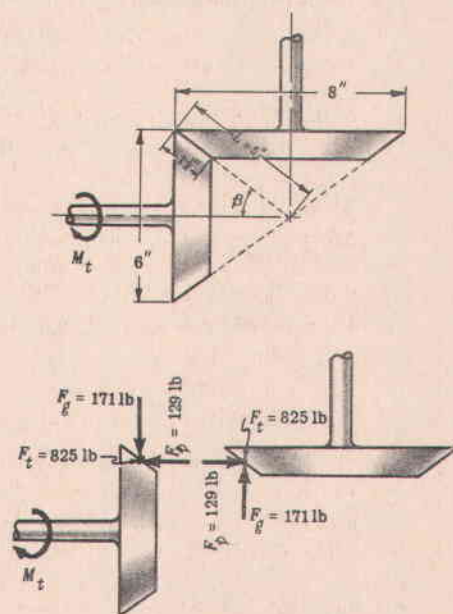


Fig. 17-15

6. Un par de engranajes cónicos con dientes en espiral, tienen una razón de velocidades de 4/3. El diámetro primitivo del piñón es 6 pul y la longitud del diente es $1\frac{1}{2}$ pul. El piñón gira a 240 rpm. Los dientes tienen un paso diametral de 5, con un ángulo de presión ϕ_n de $14\frac{1}{2}^\circ$, medido en un plano normal a un diente. El piñón transmite al engranaje una potencia de 8 HP. El piñón tiene una espiral de mano derecha y gira en el sentido del movimiento de las agujas del reloj (mirando hacia el vértice del cono primitivo). El ángulo de la espiral es $\gamma = 30^\circ$. Esto corresponde el caso I indicado para las fuerzas en engranajes cónicos helicoidales. Determinar: (1) La fuerza tangencial F_t en el radio medio. (2) La carga de empuje del piñón, F_p . (3) La carga de empuje del engranaje, F_g . Referirse a la figura 17-16.

Solución:

- (a) Los valores hallados en el problema 5 que son aplicables a este problema son: Diámetro del engranaje = 8 pul; altura inclinada del cono primitivo = 5 pul; radio medio del piñón = 2,55 pul; momento en el piñón = 2100 lb-pul; fuerza tangencial en el radio medio = 825 lb; $\sin \beta = 3/5$; $\cos \beta = 4/5$.

- (b) Fuerza de empuje del piñón $F_p = F_t \left(\frac{\tan \phi_n \sin \beta}{\cos \gamma} - \tan \gamma \cos \beta \right)$

$$= 825 \left[\frac{(\tan 14\frac{1}{2}^\circ)(3/5)}{\cos 30^\circ} - (\tan 30^\circ)(4/5) \right] = -234 \text{ lb.}$$

- (c) Fuerza de empuje del engranaje $F_g = F_t \left(\frac{\tan \phi_n \cos \beta}{\cos \gamma} + \tan \gamma \sin \beta \right)$

$$= 825 \left[\frac{(\tan 14\frac{1}{2}^\circ)(4/5)}{\cos 30^\circ} + (\tan 30^\circ)(3/5) \right] = +483 \text{ lb.}$$

Las fuerzas componentes se muestran con sus sentidos correctos en los diagramas de cuerpo libre de la figura 17-16.

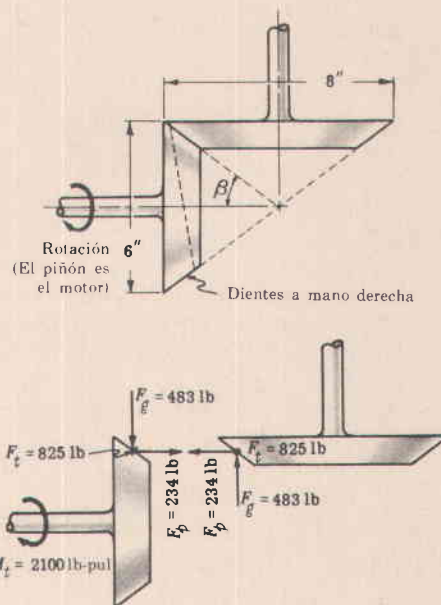


Fig. 17-16

7. Un tornillo sin fin que transmite 9 HP a 1200 rpm acciona un engranaje que gira a 60 rpm. El diámetro primitivo del tornillo es 2,68 pul y el tornillo es de triple filete. El paso circular del engranaje es $3/4$ pul (que es igual al paso axial del tornillo). El engranaje tiene 60 dientes "stub" a 20° . El coeficiente de rozamiento f es 0,10. El tornillo es de mano derecha y gira como se muestra en la figura 17-17. (Observar que la figura corresponde al caso I de engranaje con tornillo sin fin. Observar además que la potencia de salida no es igual a la potencia de entrada, debido al rozamiento.) Calcular: (1) La fuerza tangencial sobre el tornillo, F_t (tornillo). (2) La fuerza tangencial sobre el engranaje, F_t (engranaje). (3) La fuerza separadora F_r .

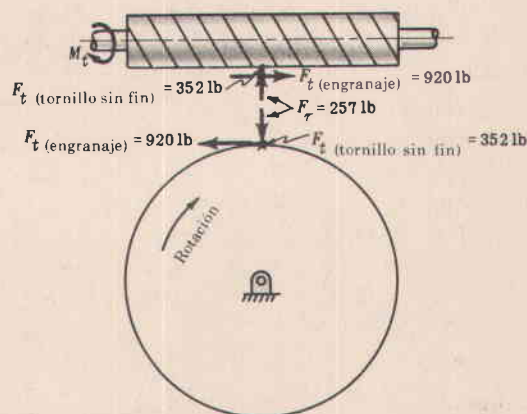
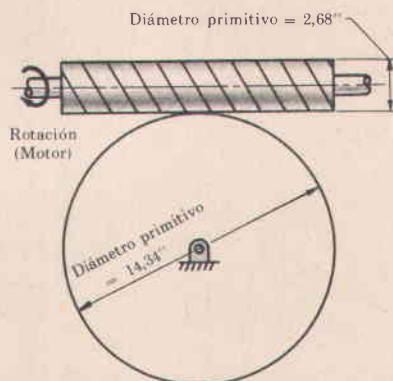


Fig. 17-17

Solución:

- (a) Momento de torsión en el tornillo, $M_t = (\text{HP})(63.024)/N = 9(63.024)/1200 = 472 \text{ lb-pul.}$

$$(b) F_{t(\text{tornillo})} = M_t/r = 472/(2,68/2) = 352 \text{ lb}$$

$$(c) F_{t(\text{engranaje})} = F_{t(\text{tornillo})} \frac{1 - f \tan \alpha / \cos \phi_n}{\tan \alpha + f / \cos \phi_n} = 352 \left(\frac{1 - 0,1(0,268)/\cos 20^\circ}{0,268 + 0,1/\cos 20^\circ} \right) = 920 \text{ lb}$$

$$\text{donde } \tan \alpha = \text{avance}/(\pi D_w) = (3)(\frac{3}{4})/(2,68\pi) = 0,268 \quad (\alpha = 15^\circ).$$

$$(d) F_r = F_{t(\text{eng})} \left(\frac{\sin \phi_n}{\cos \phi_n \cos \alpha - f \sin \alpha} \right) = 920 \left(\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ \cos 15^\circ - 0,1 \sin 15^\circ} \right) = 257 \text{ lb}$$

(e) Otro método para calcular la fuerza tangencial sobre el engranaje consiste en emplear la ecuación de eficiencia para engranaje con tornillo sin fin, para encontrar la potencia de salida. La eficiencia e para engranaje con tornillo sin fin es

$$e = (\tan \alpha) \left(\frac{\cos \phi_n - f \tan \alpha}{\cos \phi_n \tan \alpha + f} \right) = 0,268 \left(\frac{\cos 20^\circ - 0,1 \tan 15^\circ}{\cos 20^\circ \tan 15^\circ + 0,1} \right) = 69,8\%$$

$$\text{Momento en el engranaje} = (\text{HP de salida})(63.024)/N = (9 \times 0,698)(63.024)/60 = 6600 \text{ lb-pul}$$

$$F_{t(\text{engranaje})} = M_t/r = 6600/(14,34/2) = 920 \text{ lb, igual que en (c).}$$

8. En la figura 17-18 se muestra un sistema de engranaje planetario diferencial. El engranaje B gira a una velocidad constante, mientras que la velocidad del engranaje H varía para permitir variaciones en la velocidad del engranaje I. Sin embargo, para este problema, consideremos que todos los engranajes giran a velocidad constante. Además, desprecie el rozamiento.

La potencia se aplica al engranaje B a la vez que se aplica o se toma potencia de los engranajes H e I. Determinar cuánta potencia debe aplicarse o tomarse del engranaje H, si se suministran 3 caballos de fuerza al engranaje B a una velocidad de rotación de éste de 1800 rpm en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, visto desde el lado derecho. El engranaje H está girando a 700 rpm en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, visto desde el lado derecho. Determinar también la potencia suministrada o tomada del engranaje I y la velocidad angular de éste.

Todos los engranajes tienen un ángulo de presión de $14\frac{1}{2}^\circ$. Los diámetros de los engranajes son los siguientes:

- Engranaje A: 4,0"
- Engranaje B: 5,0"
- Engranaje C: 7,0"
- Engranaje D: 9" (diámetro medio)
- Engranaje E: 6,0" (diámetro medio)
- Engranaje F: 6,0" (diámetro medio)
- Engranaje G: 10,0" (diámetro medio)
- Engranaje H: 12,0"
- Engranaje I: 3,0"

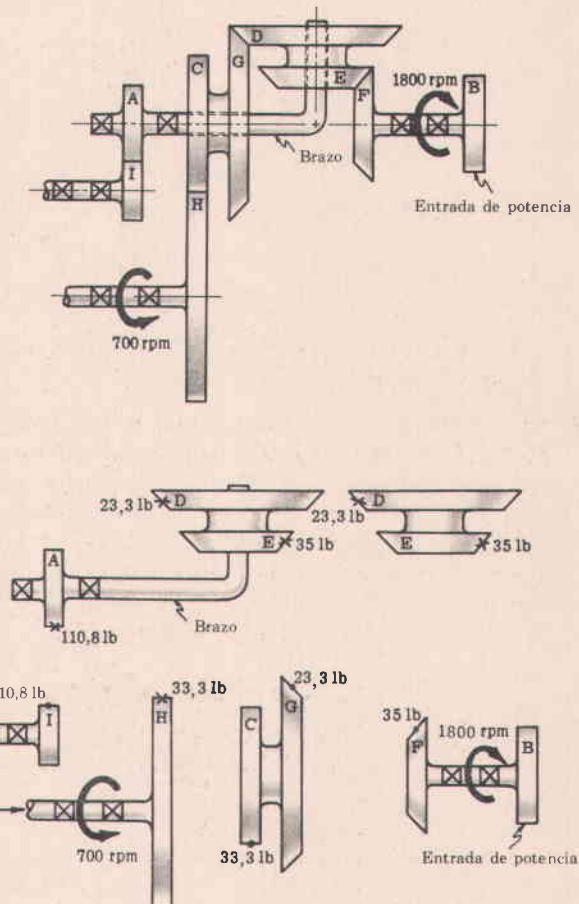


Fig. 17-18

Solución:

- (a) Las fuerzas que se muestran en los diagramas de cuerpo libre son las fuerzas tangenciales que causan los momentos alrededor de las líneas medias de los ejes de los correspondientes engranajes.

Momento de torsión en el engranaje B = momento de torsión en el engranaje F:

$$M_t = \frac{(\text{HP})(63.024)}{N} = \frac{3(63.024)}{1800} = 105 \text{ lb-pul}$$

Fuerza ejercida por el engranaje E sobre el engranaje F = $M_t/r = 105/3 = 35 \text{ lb}$.

- (b) El momento alrededor del eje de los engranajes D y E debe ser cero para una velocidad constante:

$$F_{GD} R_D = F_{FE} R_E, \quad F_{GD}(4,5) = 35(3), \quad F_{GD} = 23,3 \text{ lb}$$

donde F_{GD} = fuerza tangencial ejercida por el engranaje G sobre el engranaje D, R_D = radio del engranaje D

F_{FE} = fuerza tangencial ejercida por el engranaje F sobre el engranaje E, R_E = radio del engranaje E

- (c) Consideremos los engranajes C y G: $F_{DG} R_G = F_{HC} R_C$, $23,3(5) = F_{HC}(3,5)$, $F_{HC} = 33,3 \text{ lb}$.

El sentido de giro es opuesto al sentido del momento de torsión ejercido sobre el engranaje H; por tanto, la potencia debe suministrarse al eje del engranaje H, como se indica.

Potencia suministrada al engranaje H = $M_t N / 63.024 = (33,3 \times 6)(700) / 63.024 = 2,22 \text{ HP}$.

Como se suministra potencia tanto al engranaje B como al engranaje H, la potencia que se debe sacar en el engranaje I es $(3 + 2,22) = 5,22 \text{ HP}$.

- (d) Como la potencia se saca por medio del engranaje I, el sentido de giro debe corresponder al sentido del momento de torsión sobre el engranaje I. El sentido del momento de torsión es contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando de derecha a izquierda; por tanto, el giro es en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj, mirando de derecha a izquierda.

La velocidad del engranaje I es $N_I = (\text{HP})(63.024) / M_t = (5,22)(63.024) / (110,8 \times 1,5) = 1980 \text{ rpm}$.

9. Referirse a las figuras 17-9 y 17-10. El engranaje N gira a 1200 rpm en el sentido del movimiento de las agujas del reloj, mirando de derecha a izquierda. A través de la unidad se transmiten cinco caballos de fuerza. Encontrar las potencias para las cuales se deben diseñar los engranajes K, E y D, suponiendo que no hay pérdidas de potencia debidas al rozamiento.

Solución:

Se puede obtener una solución haciendo un análisis de fuerzas convencional, pero este problema se resolverá utilizando el factor de la potencia que circula, como se discutió en la parte referente a fuerzas en engranajes planetarios.

- (a) Primero se hace un análisis de velocidades: El engranaje K gira a $1200(8/4) = 2400 \text{ rpm}$ en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj y el engranaje E también gira a 2400 rpm en este mismo sentido; el engranaje D gira a $2400(8/4) = 4800 \text{ rpm}$ en el sentido del movimiento de las agujas del reloj y el engranaje B también gira a 4800 rpm en este mismo sentido.
- (b) En la unidad diferencial las velocidades angulares se pueden obtener rápidamente mediante la siguiente tabla:

Cálculo de las velocidades angulares (rpm)

	Elemento 1, brazo A	Elemento 2, engr. B	Elemento 3, engr. C
Velocidad angular del brazo	+1200	+1200	+1200
Velocidad angular relativa al brazo	0	+3600	-3600(8/16)(3/6)
Velocidad angular	+1200	+4800	+300

Así, el engranaje C gira a 300 rpm en el mismo sentido del brazo.

- (c) Como se definió anteriormente, el engranaje C es el elemento 3 ($\omega_3 = +300 \text{ rpm}$); el engranaje B es el elemento 2 ($\omega_2 = +4800 \text{ rpm}$) y el brazo es el elemento 1 ($\omega_1 = +1200 \text{ rpm}$). Entonces

$$r = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{+4800}{+1200} = +4, \quad R = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{+1200}{+300} = +4, \quad \text{y} \quad \gamma = \frac{r(1-R)}{1-r} = \frac{+4(1-4)}{1-4} = +4$$

donde el signo + significa que la potencia sale de la unidad diferencial por medio de los elementos 2 y 3.

- (d) La potencia a través del elemento 2 (la potencia que circula) es $P_{\text{cir}} = \gamma P_3 = +4(5) = 20 \text{ HP}$.
- (e) Por consiguiente los engranajes K, D y E deben diseñarse para 20 HP. Obsérvese que aunque la potencia es

mayor que las potencias de entrada y de salida, no se puede tomar una derivación para obtener un movimiento continuo.

PROBLEMAS PROPUESTOS

10. Un piñón recto de 3 pul de diámetro primitivo acciona un engranaje de 9 pul. El eje del piñón tiene aplicado un momento de 600 lb-pul y el ángulo de presión es 20° . Determinar la fuerza tangencial, la fuerza separadora o radial y el momento del engranaje. Resp. $F_t = 400$ lb, $F_r = 146$ lb, $M_{t(\text{engranaje})} = 1800$ lb-pul

11. El tren de engranajes helicoidales que se muestra en la figura 17-19 transmite 10 HP desde el engranaje C hasta el engranaje A, a una velocidad de 900 rpm del engranaje C. La relación de velocidades total es 2. Calcular la carga radial total y la carga de empuje total ejercida sobre el eje del engranaje B. Hallar las fuerzas tangencial y separadora entre A y B y entre B y C.

Fuerza de empuje resultante = 0 Resp. Carga radial total sobre el eje del engranaje B = 127 lb.

La fuerza tangencial entre A y B es la misma que entre B y C: 140 lb.

La fuerza separadora entre A y B es la misma que entre B y C: 51 lb.

12. Un piñón helicoidal con dientes "stub" a 20° , ángulo de la hélice de 23° , diámetro primitivo de 3 pul y longitud del diente de $1\frac{1}{8}$ pul transmite 20 HP a 10.000 rpm. Si el ángulo de presión se mide en el plano de rotación, determinar la fuerza tangencial, la fuerza separadora y la fuerza axial o de empuje. Resp. 84 lb; 30,6 lb; 35,6 lb

13. Referirse a la figura 17-20. El engranaje A recibe por medio de su eje 6 HP a una velocidad de 500 rpm en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. El engranaje B es loco y el engranaje C es el engranaje motor. Los dientes son de 20° y profundidad total. (a) ¿Cuál es el momento de torsión ejercido sobre el eje de cada engranaje? (b) ¿Para qué fuerza tangencial se debe diseñar cada engranaje? (c) ¿Qué fuerza se aplica al eje loco como resultado de las cargas sobre los dientes de los engranajes?

Resp. (a) $M_{tA} = 756$ lb-pul, $M_{tB} = 0$, $M_{tC} = 864$ lb-pul. (b) 173 lb (igual para todos los engranajes). (c) 156 lb

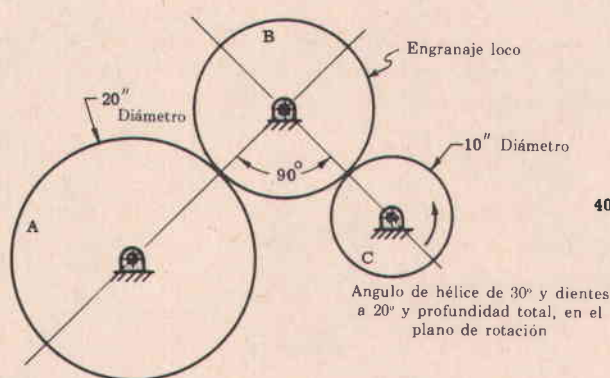


Fig. 17-19

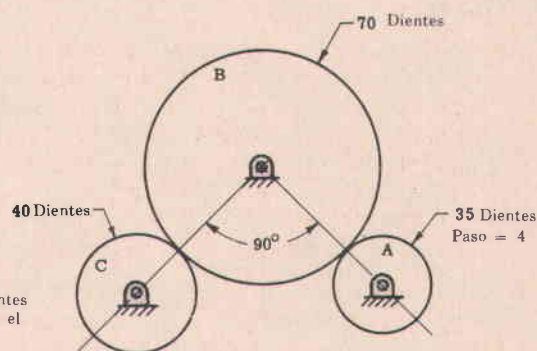


Fig. 17-20

14. Un engranaje cónico de dientes rectos a 20° y profundidad total tiene un paso de 3 y el ángulo del cono primitivo es $37\frac{1}{2}^\circ$. Si el momento en el engranaje es 6500 lb-pul, ¿cuál es la componente axial o de empuje de la fuerza ejercida en el diente? ¿Cuál es el diámetro medio del engranaje? ¿Cuál es la fuerza tangencial ejercida en el radio medio? Resp. 297 lb; 4,86 pul; 1340 lb
15. Un engranaje cónico de 30 dientes rectos se acopla con un engranaje cónico de 60 dientes. El ángulo entre los ejes es 90° . El momento de torsión en el piñón es 400 lb-pul y el radio medio del piñón es 2 pul. El ángulo de presión es 20° . Determinar la fuerza de empuje en el piñón. Resp. 32,6 lb
16. Un par de engranajes cónicos de dientes rectos conecta un par de ejes a 90° . La razón de velocidades es 3 a 1. ¿Cuál es el ángulo del cono primitivo de cada engranaje? Resp. $18,4^\circ$ para el piñón; $71,6^\circ$ para el engranaje

ésta es la velocidad con que engrana el diente. Suponer que la carga se reparte igualmente en los dos engranajes D.

Resp. 70 lb; 2900 pies/min

21. El tren de engranajes de la figura 17-23 transmite 50 HP. El engranaje E se deja estacionario. El eje de entrada, A, gira a 1000 rpm. El paso de cada engranaje es 6. El brazo que sostiene los engranajes B, D y F tiene un diámetro de 2 pul. Los engranajes están espaciados 3 pul y son de 20° y profundidad total. Considerar las cargas concentradas en los centros de los engranajes y despreciar la concentración de esfuerzos. Calcular el momento aplicado al engranaje E y el máximo esfuerzo cortante producido en el brazo, cuyo eje es el de los engranajes B, D y F.

Resp. 15.750 lb-pul; 30.500 psi (momento de flexión máximo = 48.000 lb-pul)

Resp. $R_G = 70$ lb; $R_H = 30$ lb

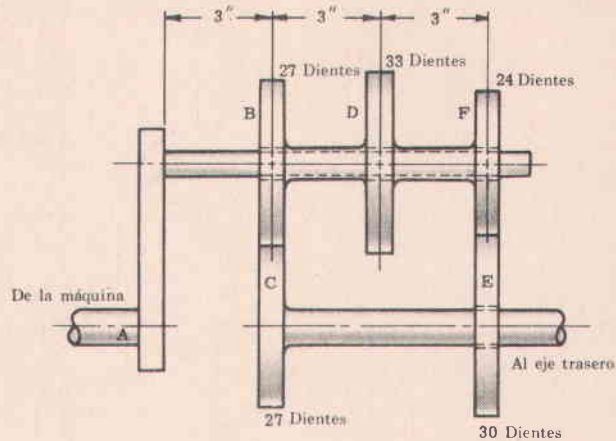


Fig. 17-23

22. El eje de entrada del tren de engranajes que se muestra en la figura 17-24 acciona el engranaje 2 a una velocidad de 10 rpm, con un momento de torsión de 900 lb-pul. Los engranajes 4 y 5 son de una sola pieza. Todos los engranajes tienen dientes de forma evolvente a 20°. Determinar las reacciones en los cojinetes G y H. Del eje de salida se toma potencia por medio de un acoplamiento flexible.

Resp. $R_G = 70$ lb, $R_H = 30$ lb

Engranaje	No. de dientes
1	120
2	60
3	30
4	30
5	50
6	40

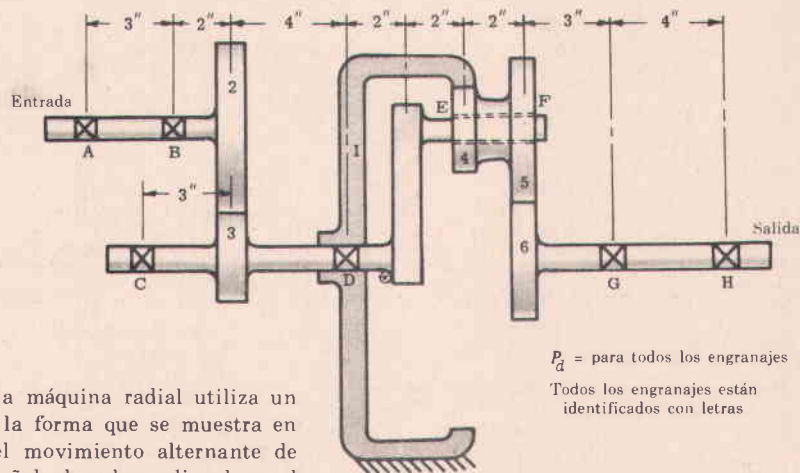


Fig. 17-24

23. Referirse a la figura 17-25. Una máquina radial utiliza un tren de engranajes epiciclo, de la forma que se muestra en la figura 17-1 para convertir el movimiento alternante de los pistones en rotación del cigüeñal, el cual es colineal con el eje estacionario X-X. Los engranajes B y E tienen 144 y 72 dientes, respectivamente y el paso diametral de todos los engranajes es 6. (a) Si la velocidad angular de los engranajes B y E es cero, ¿cuántos dientes tienen los engranajes C y D? (b) Suponiendo que la máquina produce 2125 HP cuando el cigüeñal gira a 400 rpm, determinar, haciendo el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los elementos del tren, la fuerza tangencial que actúa en cada engranaje y la fuerza tangencial necesaria para fijar la varilla en G. (c) Determinar la fuerza necesaria del pasador colocado en G, en la parte (b), por algún método diferente del análisis de fuerzas que se hizo en la parte (b).

Resp. (a) Número de dientes de C = 48

Número de dientes de D = 24

(b) Fuerza entre los engranajes E y D = 63.000 lb

Fuerza entre los engranajes C y B = 31.500 lb

Fuerza en G = 42.000 lb

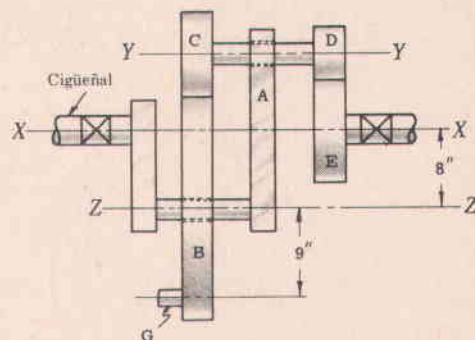


Fig. 17-25

28. Repetir el problema 27, siendo los diámetros de los engranajes los siguientes: (d) 45.300 lb-pul
 Diámetro del engranaje 2: 2" Diámetro del engranaje 5: 6" Resp. (a) 7250 lb (e) 69 HP
 Diámetro del engranaje 3: $7\frac{1}{2}$ " Diámetro del engranaje 6: 2" (f) 75 HP
 Diámetro del engranaje 4: $11\frac{1}{2}$ " Diámetro del engranaje 7: 10"
29. Los datos y la figura de este problema son los mismos del problema 27. En el diseño de un engranaje, basado en la resistencia, se debe conocer la fuerza tangencial que actúa sobre el engranaje y la velocidad adecuada del punto de tangencia. Cuando el engranaje gira alrededor de su eje (como el engranaje 2 ó 3), la velocidad se obtiene mediante $V = r\omega$, donde r es el radio primitivo y ω es la velocidad angular; cuando un engranaje hace parte de un sistema planetario (como los engranajes 5, 6 y 7) la velocidad que se utiliza en la ecuación de resistencia de Lewis y en la ecuación de carga dinámica de Buckingham es la velocidad del punto de tangencia con respecto al brazo. Esta velocidad relativa al brazo puede obtenerse de $V = r\omega_{ga}$, donde r es el radio primitivo y ω_{ga} es la velocidad angular del engranaje respecto al brazo. Determinar la fuerza y la velocidad que deben utilizarse en el diseño de los siguientes engranajes, con base en la resistencia: Engranaje 3, engranaje 4, engranaje 5, engranaje 6 y engranaje 7.
- Resp. Engranaje 3: 7875 lb, 314 pies/min Engranaje 4: 7245 lb, 314 pies/min
 Engranajes 5, 6 y 7: 6300 lb, 304 pies/min
30. Referirse a la figura 17-30. El diámetro primitivo del engranaje helicoidal A es 8,00 pul. El ángulo de presión medido en un plano normal al diente es 20° y el ángulo de la hélice es 30° . Los dientes del engranaje A son a mano izquierda. El momento de torsión en el eje de salida es 1600 lb-pul. (a) Calcular las fuerzas tangencial, de empuje y separadora en el engranaje A. (b) ¿Cuál es el momento de flexión en la sección B-B?
- Resp. (a) 400 lb, 231 lb, 168 lb (b) 3080 lb-pul

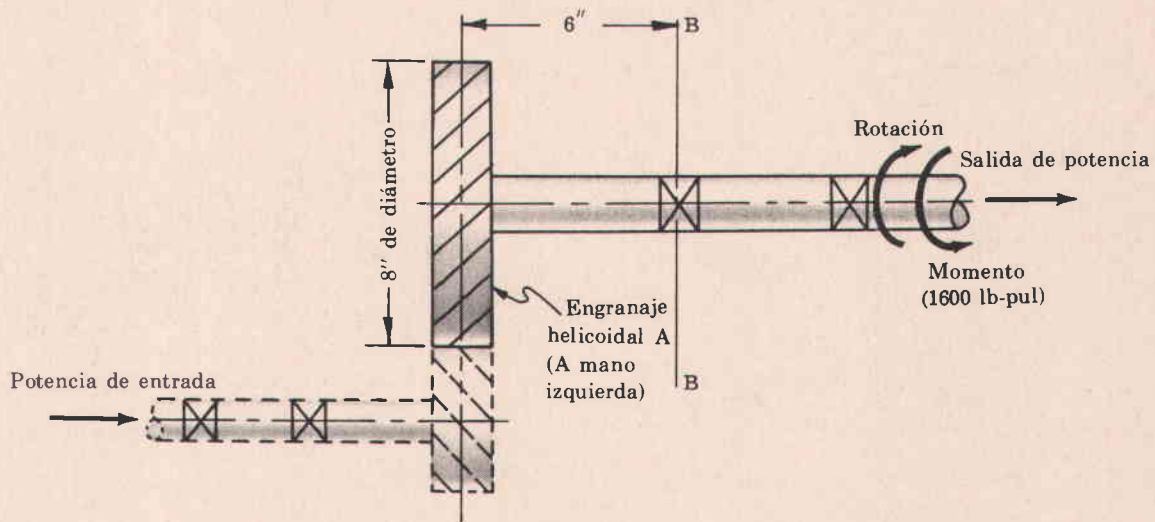


Fig. 17-30

Capítulo 18

Engranajes rectos (cilíndricos)

LOS ENGRANAJES RECTOS constituyen un medio conveniente para transmitir potencia entre ejes paralelos, con una relación de velocidades angulares constante. El valor de la relación de velocidades es el mismo que se obtendría con dos cilindros imaginarios presionados uno contra el otro y girando sin deslizar en su línea de contacto.

TERMINOLOGIA DEL DIENTE DE UN ENGRANAJE

Las partes principales de los dientes de un engranaje se denominan como se indica en la figura 18-1.

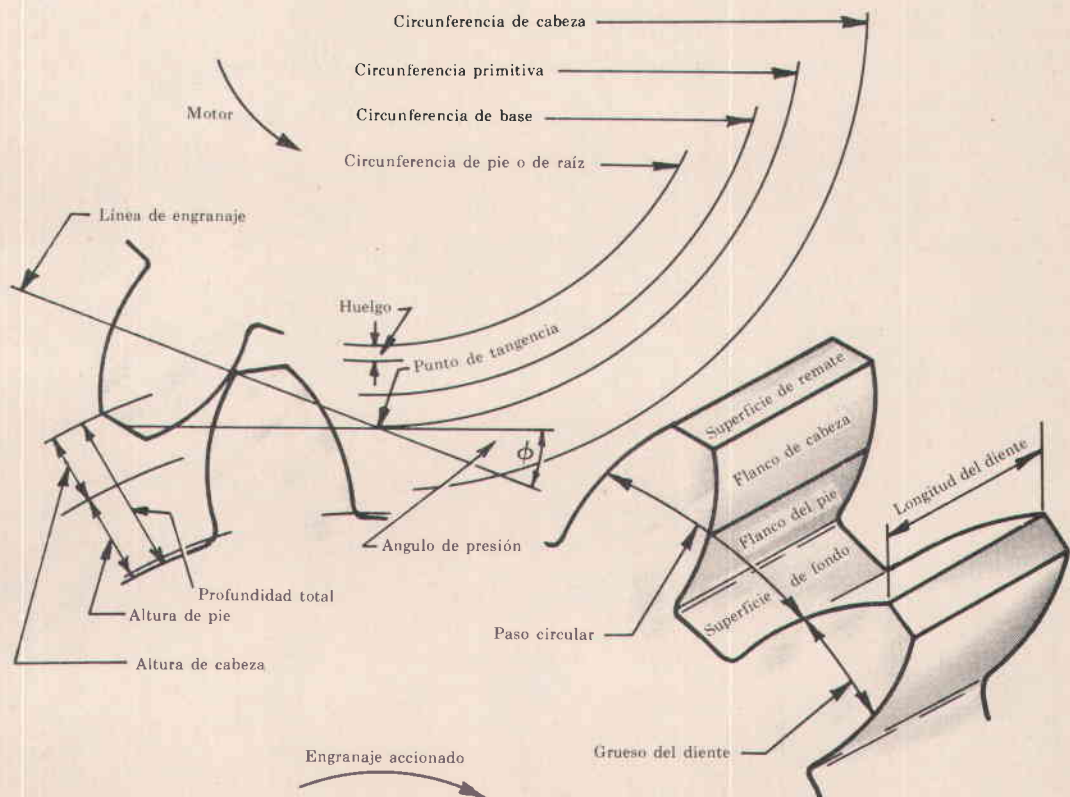


Fig. 18-1

DEFINICIONES

Paso circular P_C es la distancia desde un punto de un diente hasta el punto correspondiente de un diente adyacente, medida sobre la circunferencia primitiva.

$$P_C = \pi D / N$$

donde D = diámetro primitivo en pulgadas y N = número de dientes del engranaje.

Paso diametral P_d es el número de dientes de un engranaje por pulgada de diámetro.

$$P_d = N / D \quad \text{Obsérvese que } P_C \times P_d = \pi.$$

Línea de engranaje es una línea normal al perfil de un par de dientes engranados, en su punto de contacto.

Ángulo de presión ϕ es el ángulo entre la línea de engranaje y la tangente común a las circunferencias primitivas.

Punto de tangencia es el punto de tangencia de las circunferencias primitivas.

Razón de las velocidades angulares (o razón de transmisión) es la razón de la velocidad angular del piñón a la velocidad angular del engranaje acoplado. La razón de las velocidades angulares es inversamente proporcional a la razón de los números de dientes de los dos engranajes y para el caso de engranajes rectos es también proporcional a la razón de los diámetros primitivos.

$$\text{Razón de las velocidades angulares} = N_g / N_p = D_g / D_p$$

LEY FUNDAMENTAL DEL ENGRANAJE. La normal común al perfil del diente en el punto de contacto debe pasar siempre por un punto fijo, llamado punto de tangencia, con el fin de mantener constante la razón de las velocidades angulares de los dos engranajes. La curva evolvente satisface la ley del engranaje y es la que se usa más a menudo en el perfil de los dientes de engranajes. Frecuentemente se utiliza en el perfil de los dientes de un engranaje, una combinación de las curvas evolvente y cicloide, para evitar interferencia. En esta forma compuesta, aproximadamente el tercio central del perfil tiene forma evolvente, mientras que el resto es cicloidal.

INTERFERENCIA. Con ciertas condiciones, los perfiles de forma evolvente recubren o cortan los perfiles de los dientes del otro engranaje. Esta interferencia se puede evitar si el radio de cabeza máximo de cada engranaje es igual o menor que

$$\sqrt{(\text{radio de la circunferencia de base})^2 + (\text{distancia entre centros})^2 (\sin \phi)^2}$$

PROPORCIONES DE LOS DIENTES DE ENGRANAJES NORMALIZADOS

	14½° Compuesto	14½° Evolvente y prof. tot.	20° Evolvente y prof. tot.	20° Evolvente "stub"
Altura de cabeza	$\frac{1}{P_d}$	$\frac{1}{P_d}$	$\frac{1}{P_d}$	$\frac{0,8}{P_d}$
Altura de pie mínima	$\frac{1,157}{P_d}$	$\frac{1,157}{P_d}$	$\frac{1,157}{P_d}$	$\frac{1}{P_d}$
Profundidad total	$\frac{2,157}{P_d}$	$\frac{2,157}{P_d}$	$\frac{2,157}{P_d}$	$\frac{1,8}{P_d}$
Huelgo	$\frac{0,157}{P_d}$	$\frac{0,157}{P_d}$	$\frac{0,157}{P_d}$	$\frac{0,2}{P_d}$

PASOS NORMALIZADOS. Los pasos diametrales normalizados que se utilizan comúnmente son: 1 a 2, de 1/4 en 1/4; 2 a 4, de 1/2 en 1/2; 4 a 10, de 1 en 1; 10 a 20, de 2 en 2 y 20 a 40, de 4 en 4.

OBJETIVOS DEL DISEÑO. El diseño del diente de un engranaje consiste principalmente en determinar el **paso** y la **longitud del diente** necesarios para obtener la resistencia, la durabilidad y la economía de fabricación adecuadas.

RESISTENCIA DE LOS DIENTES DE UN ENGRANAJE - Ecuación de Lewis.

Al comenzar la acción entre un par de dientes que engranan, el flanco del diente motor hace contacto con la punta del diente accionado. Despreciando el rozamiento, la carga total W_n es normal al perfil del diente y se supone que es conducida por este diente. W , la carga componente de W_n perpendicular a la línea media del diente, produce un esfuerzo de flexión en la base del diente. La componente radial W_r se desprecia. La parábola que se muestra en la figura 18-2 bosqueja una viga de resistencia constante. Por tanto, la sección más débil del diente es la sección A-A, donde la parábola es tangente al contorno del diente. Se supone que la carga está uniformemente distribuida a través de toda la cara del diente.

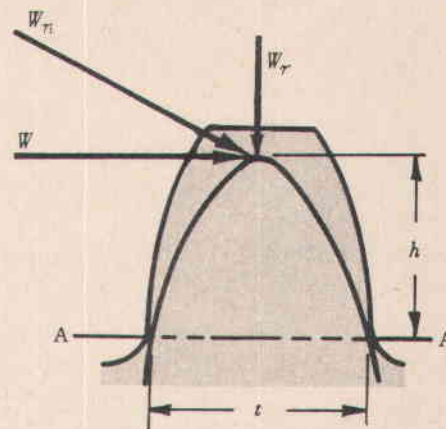


Fig. 18-2

El esfuerzo de flexión producido, s , es

$$s = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bt^2} = \frac{6Wh}{bt^2}$$

y

$$W = sb(t^2/6h) = sb(t^2/6hP_c)P_c$$

donde $c = t/2$, $I = bt^3/12$ y $M = Wh$.

La relación $t^2/6hP_c$ es una cantidad adimensional denominada el factor de forma y , cuyos valores están tabulados en la tabla I. Este factor de forma y es una función de la forma del diente, la cual a su vez depende del sistema de dientes utilizado y del número de dientes del engranaje.

Por conveniencia W se aproxima a la fuerza transmitida F , la cual se define como el momento de torsión dividido por el radio primitivo. Por consiguiente, reemplazando F por W y y por $t^2/6hP_c$, obtenemos la forma usual de la ecuación de Lewis:

$$F = sbP_c y$$

Para condiciones de diseño ordinarias, la longitud del diente, b , se limita a un máximo de 4 veces el paso circular. Haciendo $b = kP_c$, donde $k \leq 4$,

$$F = sP_c^2 k y = s\pi^2 k y / P_d^2$$

En el diseño de un engranaje, basado en la resistencia, puede conocerse o no el diámetro primitivo. Si el diámetro primitivo es conocido, se puede utilizar la siguiente forma de la ecuación de Lewis:

$$P_d^2 / y = sk\pi^2 / F$$

donde s = esfuerzo permisible; $k = 4$, límite superior; F = fuerza transmitida = $2M_t/D$. Luego la expresión anterior da un valor numérico permisible de la relación P_d^2/y , que controla el diseño, puesto que se basa en un esfuerzo permisible.

Si se desconoce el diámetro primitivo, se puede utilizar la siguiente forma de la ecuación de Lewis:

$$s = 2M_t P_d^3 / k\pi^2 y N$$

donde s = esfuerzo $\leq$ esfuerzo permisible; M_t = momento de torsión en el engranaje menos resis-

tente; $k = 4$, límite superior; N = número de dientes del engranaje menos resistente. Esta expresión nos da un valor del esfuerzo producido, en función del paso diametral. El número mínimo de dientes, N , generalmente está limitado a 15.

En los dos casos anteriores, el máximo paso diametral posible proporcionará el diseño más económico. En general, cuando se conocen los diámetros, se diseña por el mayor número de dientes posible; cuando no se conocen los diámetros, se diseña con los menores pasos diametrales posibles.

ESFUERZOS PERMISIBLES EN EL DIENTE. Los esfuerzos máximos permisibles en el diseño de dientes de engranajes, dependen del material seleccionado y de la velocidad de la línea primitiva. Para engranajes rectos,

$$\begin{aligned} s_{\text{permisible}} &= s_o \left(\frac{600}{600 + V} \right) && \text{para } V \text{ menor que } 2000 \text{ pies/min} \\ &= s_o \left(\frac{1200}{1200 + V} \right) && \text{para } V \text{ entre } 2000 \text{ y } 4000 \text{ pies/min} \\ &= s_o \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right) && \text{para } V \text{ mayor que } 4000 \text{ pies/min} \end{aligned}$$

donde s_o es el coeficiente estático unitario corregido por los valores de la concentración media de esfuerzos del material del engranaje (psi) y V es la velocidad en la línea primitiva (pies/min).

VALORES DE s_o . Los valores de s_o de diferentes materiales para engranajes están catalogados en las publicaciones de la American Gear Manufacturers Association, en diferentes manuales de ingeniería y en la mayoría de los textos de diseño. Los valores de s_o para hierro y bronce fundidos son 8000 psi y 12.000 psi, respectivamente. Para aceros al carbono s_o está comprendido entre 10.000 psi y 50.000 psi, dependiendo del contenido de carbono y del tratamiento térmico. En general, se puede tomar s_o como una tercera parte de la resistencia al fallar del material, aproximadamente.

DISEÑO BASADO EN EL ENGRANAJE MAS DEBIL. La cantidad de fuerza que puede transmitirse al diente de un engranaje es una función del producto $s_o y$, como se expresa en la ecuación de Lewis. Para dos engranajes acoplados, el más débil tendrá el menor valor de $s_o y$.

Cuando los dos engranajes están hechos del mismo material, el más pequeño (piñón) será el más débil y por tanto, controlará el diseño.

CARGAS DINAMICAS EN EL DIENTE - Ecuación de Buckingham. Las inexactitudes en el perfil del diente y en los espaciamentos, el desalineamiento en el montaje y la deformación del diente producida por la carga causan cambios de velocidad que producen fuerzas dinámicas en los dientes, que son mayores que la fuerza transmitida. La carga dinámica F_d , aproximada por un análisis dinámico más detallado, para condiciones medias de masa, es la propuesta por Buckingham.

$$F_d = \frac{0,05 V (bC + F)}{0,05 V + \sqrt{bC + F}} + F$$

donde F_d = carga dinámica, en lb
 V = velocidad en la línea primitiva, pies/min
 b = longitud del diente, en pul
 F = $\frac{\text{momento de torsión del engranaje}}{\text{radio primitivo del engranaje}} = 2M_t/D$
 C = una constante que depende de la forma del diente, del material utilizado y del grado de exactitud con que se talle el diente. En la tabla II se han tabulado algunos valores de C . Las curvas que indican la relación de los errores en los perfiles de los dientes con la velocidad en la línea primitiva y con el paso diametral, se muestran en las figuras 18-3 y 18-4.

F_d debe ser menor que la carga permisible de fatiga en flexión F_o donde $F_o = s_o by P_c$. En esta ecuación, s_o se basa en los valores medios de la concentración de esfuerzos.

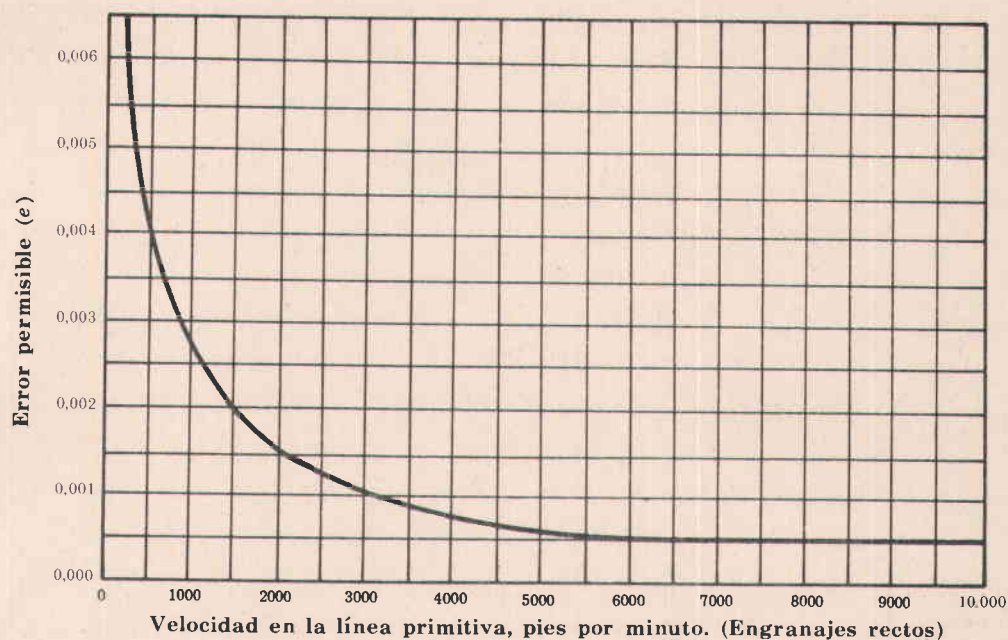


Fig. 18-3

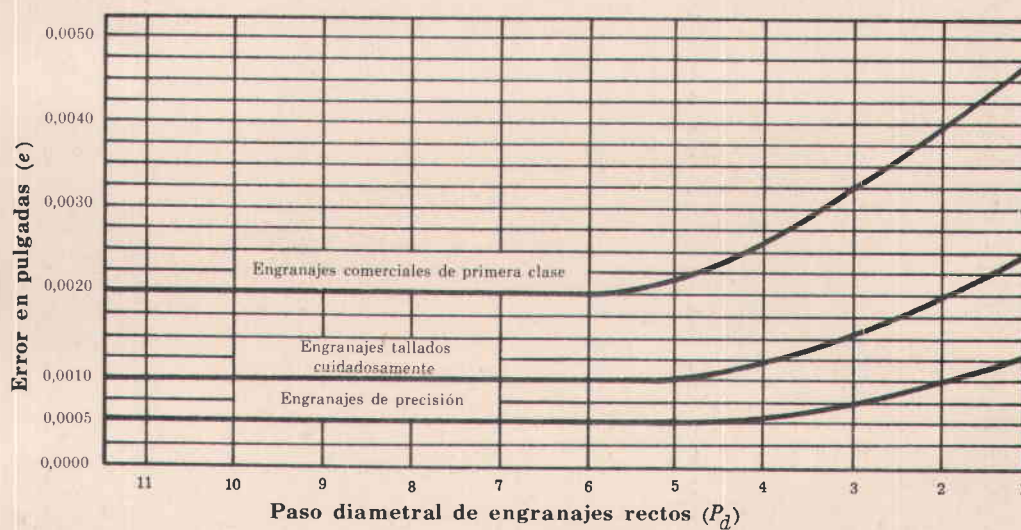


Fig. 18-4

CARGAS DE DESGASTE EN EL DIENTE - Ecuación de Buckingham. Para garantizar la durabilidad de un par de engranajes, el esfuerzo de contacto entre los perfiles de los dientes, determinado por la carga de desgaste F_w , no debe ser excesivo.

donde $F_w = D_p b K Q$

D_p = diámetro primitivo del engranaje pequeño (piñón) $Q = 2N_g / (N_p + N_g)$

b = longitud de los dientes de los engranajes, en pul N_g = número de dientes del engranaje

K = factor de esfuerzo por fatiga N_p = número de dientes del piñón

y $K = \frac{s_{es}^2 (\sin \phi) (1/E_p + 1/E_g)}{1,4}$

donde s_{es} = límite de fatiga de las superficies de los engranajes, en psi

E_p = módulo de elasticidad del material del piñón, en psi

E_g = módulo de elasticidad del material del engranaje, en psi

ϕ = ángulo de presión

El límite de fatiga de las superficies puede calcularse por la fórmula

$$s_{es} = (400)(\text{BHN}) - 10.000 \text{ psi}$$

donde BHN puede aproximarse al número de dureza Brinell promedio del engranaje y del piñón, con un valor de más o menos 350 para los aceros.

La carga de desgaste F_w es una carga *permisible* que debe ser mayor que la carga dinámica F_d .

En la tabla III se han tabulado los valores de K para diferentes materiales y para diferentes formas del diente, con valores tentativos recomendados por Buckingham.

Los procedimientos anteriores establecerán el diseño preliminar o tentativo del engranaje, pero, como en el caso de la mayoría de diseños de máquinas, el diseño final dependerá de las pruebas de laboratorio y de las pruebas de los engranajes funcionando a las condiciones reales de operación.

TABLA I - Factor de forma y - para utilizar en la ecuación de resistencia de Lewis.

Número de dientes	Forma evolvente o compuesta a 14½° y profundidad total	Forma evolvente a 20° y profundidad total	Forma evolvente "stub" a 20°
12	0,067	0,078	0,099
13	0,071	0,083	0,103
14	0,075	0,088	0,108
15	0,078	0,092	0,111
16	0,081	0,094	0,115
17	0,084	0,096	0,117
18	0,086	0,098	0,120
19	0,088	0,100	0,123
20	0,090	0,102	0,125
21	0,092	0,104	0,127
23	0,094	0,106	0,130
25	0,097	0,108	0,133
27	0,099	0,111	0,136
30	0,101	0,114	0,139
34	0,104	0,118	0,142
38	0,106	0,122	0,145
43	0,108	0,126	0,147
50	0,110	0,130	0,151
60	0,113	0,134	0,154
75	0,115	0,138	0,158
100	0,117	0,142	0,161
150	0,119	0,146	0,165
300	0,122	0,150	0,170
Cremallera	0,124	0,154	0,175

TABLA II - Valores del factor de deformación C - para verificar cargas dinámicas.

Materiales		Diente de forma evolvente	Error del diente - pulgadas			
Piñón	Engranaje		0,0005	0,001	0,002	0,003
hierro fundido	hierro fundido	$14\frac{1}{2}^{\circ}$	400	800	1600	2400
acero	hierro fundido	$14\frac{1}{2}^{\circ}$	550	1100	2200	3300
acero	acero	$14\frac{1}{2}^{\circ}$	800	1600	3200	4800
hierro fundido	hierro fundido	20° y profundidad total	415	830	1660	2490
acero	hierro fundido	20° y profundidad total	570	1140	2280	3420
acero	acero	20° y profundidad total	830	1660	3320	4980
hierro fundido	hierro fundido	20° "stub"	430	860	1720	2580
acero	hierro fundido	20° "stub"	590	1180	2360	3540
acero	acero	20° "stub"	860	1720	3440	5160

TABLA III

Los valores de s_{es} utilizados en la ecuación de carga de desgaste dependen de la combinación de los materiales del engranaje y del piñón. Aquí se tabulan los valores de s_{es} y K para algunos materiales.

Número de dureza Brinell promedio del piñón de acero y el engranaje de acero		Límite de fatiga superficial s_{es}	Factor del esfuerzo de fatiga K	
			$14\frac{1}{2}^{\circ}$	20°
150		50.000	30	41
200		70.000	58	79
250		90.000	96	131
300		110.000	144	196
400		150.000	268	366
Número de dureza Brinell, BHN				
Piñón de acero	Engranaje			
150	Hierro fundido	50.000	44	60
200	Hierro fundido	70.000	87	119
250	Hierro fundido	90.000	144	196
150	Bronce fosforado	50.000	46	62
200	Bronce fosforado	65.000	73	100
Piñón de hierro fundido	Engranaje de hierro fundido	80.000	152	208
Piñón de hierro fundido	Engranaje de hierro fundido	90.000	193	284

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un par de engranajes rectos acoplados tiene dientes de evolvente a $14\frac{1}{2}^\circ$ de profundidad total y paso diametral $2\frac{1}{2}$. El diámetro primitivo del engranaje pequeño es 6,4 pul. Si la relación de transmisión es 3 a 2, calcular: (a) el número de dientes de cada engranaje, (b) la altura de cabeza, (c) la profundidad total, (d) el huelgo, (e) los diámetros exteriores, (f) los diámetros de pie, (g) la altura de pie, (h) los diámetros de las circunferencias de base, e (i) verificar la interferencia.

Solución:

- (a) $D_p = 6,4$ pul, $D_g = 6,4(3/2) = 9,6$ pul, $N_p = 6,4(2,5) = 16$ dientes y $N_g = 9,6(2,5) = 24$ dientes
 (b) Altura de cabeza $= 1/P_d = 1/2,5 = 0,4$ pul
 (c) Profundidad total $= 2,157/P_d = 2,157/2,5 = 0,862$ pul
 (d) Huelgo $= 0,157/P_d = 0,157/2,5 = 0,0628$ pul
 (e) Diámetro exterior = diámetro primitivo + $2 \times$ altura de cabeza
 Diámetro exterior del piñón $= 6,4 + 2(0,4) = 7,2$ pul
 Diámetro exterior del engranaje $= 9,4 + 2(0,4) = 10,2$ pul
 (f) Diámetro de pie = diámetro exterior - $2 \times$ profundidad total
 Diámetro de pie del piñón $= 7,2 - 2(0,862) = 5,476$ pul
 Diámetro de pie del engranaje $= 10,2 - 2(0,862) = 8,476$ pul
 (g) Altura de pie $= 1,157/P_d = 1,157/2,5 = 0,462$ pul
 (h) Radio de la circunferencia base = radio primitivo $\times \cos 14\frac{1}{2}^\circ$
 Para el piñón: $R_b = (6,4/2)(0,968) = 3,1$ pul y el diámetro de la circunferencia de base $= 6,2$ pul
 Para el engranaje: $R_b = (9,6/2)(0,968) = 4,65$ pul y el diámetro de la circunferencia de base $= 9,3$ pul
 (i) La interferencia se evita si el radio de cabeza del engranaje es

$$\leq \sqrt{(\text{radio de la circunferencia de base})^2 + (\text{distancia entre centros})^2 (\sin \phi)^2}$$

$$= \sqrt{(4,65)^2 + [\frac{1}{2}(6,4 + 9,6)]^2 (\sin 14\frac{1}{2}^\circ)^2} = 7,85.$$
 Como el radio de cabeza del engranaje es igual a $9,8/2 = 4,9$, no existirá interferencia.

2. Un piñón recto de bronce ($s_o = 12.000$ psi) gira a una velocidad de 600 rpm y acciona un engranaje de acero fundido ($s_o = 15.000$ psi) con una razón de transmisión de 4 a 1. El piñón tiene 16 dientes normales de evolvente a 20° , profundidad total y paso diametral 3. La longitud de los dientes de los engranajes es $3\frac{1}{2}$ pul. ¿Cuánta potencia se puede transmitir, desde el punto de vista de la resistencia?

Solución:

En primer lugar se necesita determinar cuál de los dos engranajes es el más débil.

	Número de dientes	s_o	Factor de forma	$s_o \gamma$
Piñón	16	12.000 psi	0,094	1130
Engranaje	64	15.000 psi	0,135	2020

Como la capacidad del diente de conducir carga es una función del producto $s_o \gamma$, el piñón es el engranaje más débil.

En seguida se determina la velocidad en la línea primitiva, V , con el fin de seleccionar el factor de velocidad correcto que se requiere para calcular el esfuerzo permisible: $V = \pi(5,33)(600)/12 = 840$ pies/min. Como V es menor que 2000 pies/min, el esfuerzo permisible $s = 12.000 \left(\frac{600}{600 + 840} \right) = 5000$ psi. Por tanto, la cantidad de fuerza que se puede transmitir, de acuerdo con la ecuación de Lewis, es

$$F = s_b \gamma P_c = 5000 (3,5) (0,094) (\pi/3) = 1722 \text{ lb.}$$

$$\text{Caballos de fuerza que se pueden transmitir} = FV/33.000 = 1722(840)/33.000 = 44 \text{ HP.}$$

3. Un piñón recto de acero fundido ($s_o = 20.000$ psi) debe accionar un engranaje de hierro fundido ($s_o = 8000$ psi). La razón de transmisión debe ser de $2\frac{1}{3}$ a 1. El diámetro del piñón debe ser 4 pul y se deben transmitir 30 HP a una velocidad del piñón de 900 rpm. Los dientes deben ser de evolvente a 20° y profundidad total. Diseñar para el mayor número de dientes. Determinar el paso diametral necesario y la longitud de los dientes de los engranajes, únicamente con base en la resistencia.

Solución:

En primer lugar se debe determinar cuál de los dos engranajes es probablemente más débil, suponiendo

arbitrariamente los números de dientes (por ejemplo 15 y 35), de manera que satisfagan la razón $2\frac{1}{3}$ a 1. Entonces, para el piñón, $s_o y = 20.000(0,092) = 1840$ y para el engranaje, $s_o y = 8000(0,119) = 952$; probablemente el engranaje es más débil que el piñón, puesto que 952 es menor que 1840.

$D_p = 4$ pul, $D_g = 9\frac{1}{3}$ pul. Como se conocen los diámetros, se utiliza la siguiente forma de la ecuación de Lewis:

$$P_d^2/y = sk\pi^2 F$$

Momento transmitido por el piñón $= 30(63.000)/900 = 2100$ lb-pul. Fuerza transmitida $F = 2100/2 = 1050$ lb.

Velocidad en la línea primitiva, $V = 4\pi(900)/12 = 942$ pies/min. Esfuerzo permisible

$$s = 8000 \left(\frac{600}{600 + 942} \right) = 3110 \text{ psi.}$$

$$P_d^2/y = 3110(4)\pi^2/1050 = 117, \text{ permisible}$$

Supongamos $y \approx 0,1$, $P \approx \sqrt{11,7} \approx 3$. Ensayemos $P_d = 3$; entonces $N_g = 3(9\frac{1}{3}) = 28$ dientes, $y = 0,112$ (de la tabla) y $P_d^2/y = 9/0,112 = 80,4$; por consiguiente el engranaje es suficientemente resistente.

Un P_d de 4 ó 5 no puede utilizarse debido a la razón de velocidades que se necesita. Un P_d de 6 daría un engranaje demasiado débil. Por tanto reducimos k a $k = 4(80,4/117) = 2,75$. Entonces $b = 2,75(\pi/3) = 2,88$ pul.

Utilizar $b = 2\frac{7}{8}$ pul, $P_d = 3$, $N_p = 12$, $N_g = 28$.

Por último, hagamos una verificación final para determinar el engranaje más débil, con base en los números de dientes escogidos: Para el piñón, $s_o y = 20.000(0,78) = 1560$; para el engranaje, $s_o y = 8000(0,112) = 896$ (más débil).

4. Un engranaje recto de bronce ($s_o = 12.000$ psi) debe accionar un piñón de acero dulce ($s_o = 15.000$ psi). La relación de las velocidades angulares debe ser $3\frac{1}{2}$ a 1. El ángulo de presión debe ser de $14\frac{1}{2}^\circ$. Determinar los menores diámetros de los engranajes que se pueden utilizar y la longitud del diente necesaria para transmitir 6 HP a una velocidad del piñón de 1800 rpm. Diseñar con base en la resistencia, únicamente. Ninguno de los dos engranajes debe tener menos de 15 dientes.

Solución:

N_p mínimo = 16 dientes para una razón de velocidades angulares de $3\frac{1}{2}$. Entonces $N_g = 16(3\frac{1}{2}) = 56$ dientes.

Para el engranaje, $s_o y = 12.000(0,112) = 1340$; para el piñón, $s_o y = 15.000(0,081) = 1220$. Por consiguiente el piñón es más débil.

El momento de torsión $M_t = 6(63.000)/1800 = 210$ lb-pul. Como los diámetros son desconocidos, el esfuerzo producido es

$$s = 2M_t P_d^3 / k \pi^2 y N = 2(210) P_d^3 / 4 \pi^2 (0,081)(16) = 8,23 P_d^3$$

Supongamos el esfuerzo permisible $s \approx \frac{1}{2} s_o \approx 15.000/2 = 7500$ psi; esta suposición permite determinar un P_d aproximado. Entonces $P_d^3 \approx 7500/8,23$ y $P_d \approx 10$.

Ensayemos $P_d = 10$; entonces $D_p = 16/10 = 1,6$ pul, $V = 1,6\pi(1800)/12 = 754$ pies/min, s permisible $= 15.000 \left(\frac{600}{600 + 754} \right) = 6640$ psi y s producido $= 8,23(10^3) = 8230$ psi. El piñón es débil, puesto que $8230 > 6640$.

Ensayemos un diente más resistente, $P_d = 9$; entonces $D_p = 16/9 = 1,78$ pul, $V = 1,78\pi(1800)/12 = 838$ pies/min, s permisible $= 15.000 \left(\frac{600}{600 + 838} \right) = 6260$ psi y s producido $= 8,23(9^3) = 6000$ psi. Ahora el piñón es ligeramente más resistente que lo necesario. Por tanto reducimos k a $k = 4(6000/6260) = 3,83$; entonces la longitud del diente $b = 3,83(\pi/9) = 1,34$ pul.

Utilizar $P_d = 9$, $b = 1\frac{3}{8}$ pul, $D_p = 1,78$ pul, $D_g = 1,78(3,5) = 6,23$ pul.

5. Un piñón de acero fundido ($s_o = 15.000$) que gira a 900 rpm debe accionar un engranaje de hierro fundido ($s_o = 8000$) que gira a 144 rpm. Los dientes son "stub" de evolvente a 20° normales y la máxima potencia que se debe transmitir es 35 HP. Determinar el paso diametral adecuado, el número de dientes y la longitud de los dientes de estos dos engranajes, desde el punto de vista de la resistencia, la carga dinámica y la carga de desgaste. La superficie del piñón tiene una dureza de 250 BHN.

Solución:

Los diámetros de los engranajes son desconocidos. El número de dientes se supone, escogiendo un número no menor de 15 para el piñón. Obsérvese que el número mínimo de dientes que puede tener el piñón es 16, para

que se satisfaga la relación de transmisión requerida; el engranaje tendrá, entonces, $16(900/144) = 100$ dientes.

Para el piñón, $s_o y = 15.000(0,115) = 1725$; para el engranaje, $s_o y = 8000(0,161) = 1288$. El engranaje es más débil que el piñón, puesto que $1288 < 1725$. Como los diámetros son desconocidos, se puede utilizar la forma de la ecuación de Lewis expresada en función del momento y el diseño se hará con base en el engranaje.

$M_t = 35(63.000)/144 = 15.300$ lb-pul. Para el diseño de prueba inicial, tomemos $k = 4$. Entonces el esfuerzo producido es

$$s = 2M_t P_d^3 / k \pi^2 y N_g = 2(15.300) P_d^3 / 4 \pi^2 (0,161) (100) = 48 P_d^3$$

Supongamos el esfuerzo permisible $s \approx \frac{1}{2} s_o = 8000/2 = 4000$ psi. Entonces $P_d^3 \approx 4000/48$ y $P_d \approx 4$ ó 5. Desde el punto de vista de la economía es conveniente utilizar el mayor paso diametral posible; entonces ensayaremos $P_d = 5$.

Para $P_d = 5$: $D_g = 100/5 = 20$ pul, $V = 20\pi(144)/12 = 754$ pies/min, esfuerzo permisible $s = 8000 \left(\frac{600}{600+754} \right) = 3540$ psi, esfuerzo producido $s = 48 P_d^3 = 48(5^3) = 6000$ psi. El engranaje es demasiado débil puesto que $6000 > 3540$. Ensayaremos ahora el diente normalizado inmediatamente mayor, que tiene un $P_d = 4$.

Para $P_d = 4$: $D_g = 100/4 = 25$ pul, $V = 25\pi(144)/12 = 943$ pies/min, esfuerzo permisible $s = 8000 \left(\frac{600}{600+943} \right) = 3110$ psi, esfuerzo producido $s = 48(4^3) = 3080$ psi. Así, para $P_d = 4$, el engranaje será ligeramente más resistente que lo necesario. Reduciendo k a $k = 4(3080/3110) = 3,96$, la longitud necesaria del diente, $b = k P_C = 3,96(\pi/4) = 3,11$ pul. Entonces, desde el punto de vista de la resistencia, se debe utilizar $P_d = 4$ y $b = 3\frac{1}{8}$ pul.

En seguida se verifica el diseño tentativo desde el punto de vista de la carga dinámica y de los efectos de desgaste. La carga de fatiga a la flexión F_o y la carga de desgaste F_w son valores permisibles.

$$F_o = s_o b y P_C = 8000(3,125)(0,161)(\pi/4) = 3160 \text{ lb}$$

$$F_w = D_p b K Q = 4(3,125)(196)(172,5) = 4225 \text{ lb}$$

donde $D_p = 25(144/900) = 4$ pul, $K = 196$, de la tabla III, $Q = 2N_g/(N_g + N_p) = 2(100)/(100 + 16) = 172,5$.

Tanto F_o como F_w deben ser mayores que F_d .

$$F_d = \frac{0,05 V (b C + F)}{0,05 V + \sqrt{b C + F}} + F$$

donde $V = 943$ pies/min, $b = 3,125$ pul y $F = M_t/(\frac{1}{2}D) = 15.300/12,5 = 1224$ lb. De la figura 18-3 encontramos que para $V = 943$ pies/min se puede tolerar un error de 0,0028 pul, desde el punto de vista del ruido. Con referencia a la figura 18-4, ensayemos un engranaje comercial de primera clase que tenga un error de 0,0025 pul para $P_d = 4$. Entonces, de la tabla II, $C = 2950$. Remplazando los valores en la ecuación anterior, obtenemos $F_d = 4520$ lb. Por tanto $F_w = 4225 < 4520$ y $F_o = 3160 < 4520$; es decir que el diseño será inaceptable tanto desde el punto de vista de la durabilidad o el desgaste, como desde el punto de vista de la resistencia.

Debemos escoger, entonces, un engranaje cuidadosamente tallado, digamos uno que tenga un error de 0,0012 pul, como indica la figura 18-4; de aquí obtenemos un valor de C de 1416. Recalculando F_d para $C = 1416$, encontramos $F_d = 3394$. Ahora $F_w = 4225 > 3394$ y $F_o = 3160 \approx 3394$ (7% de diferencia) y el diseño probablemente será satisfactorio, sin necesidad de utilizar un engranaje tallado con más precisión.

- Un piñón de acero de 3 pul de diámetro ($s_o = 20.000$ psi) acciona un engranaje de hierro gris de 9 pul de diámetro ($s_o = 12.000$ psi). El piñón gira a 1200 rpm y trasmite 6 HP. Los dientes son "stub" a 20°. Determinar el mayor número de dientes (para proporcionar el funcionamiento más suave y el tallado más barato) y la longitud del diente adecuados. Basar el diseño en la ecuación de resistencia de Lewis. Se seguirá un procedimiento diferente para resolver el problema.

Solución:

Como no se sabe cuál de los dos engranajes es más débil, se diseñará con base en el engranaje y se hará una verificación final para comprobar si realmente éste es el más débil, después que se haya establecido una solución. Compararemos la resistencia estática de seguridad a la flexión, basada en la ecuación de Lewis, con la carga dinámica real que se aproxima utilizando el factor de velocidad de Barth.

$$\text{Comparar la carga permisible } F_o = \frac{s_o b \pi y}{P_d} = \frac{12.000 (4\pi/P_d) \pi y}{P_d} = \frac{473.000 y}{P_d^2} \text{ lb con}$$

$$\text{con la carga real (aprox.) } F_d = \frac{F}{\text{factor de velocidad}} = \frac{210}{600/(600+942)} = 540 \text{ lb.}$$

$$\text{Si } y \text{ se aproxima a } 0,1, \quad P_d \approx \sqrt{473.000(0,1)/540} \quad \text{o} \quad P_d \approx 10.$$

Ensayemos $P_d = 10$: $N_g = 90$, $y = 0,160$ y $F_O = 473.000(0,160)/10^2 = 758$ lb (demasiado fuerte).

Ensayemos un engranaje más débil, $P_d = 12$: $N_g = 108$, $y = 0,161$ y $F_O = 530$ lb (bastante cercano a $F_d = 540$ lb).

Ahora verificamos: $s_O y$ para el piñón $= 20.000(0,143) = 2860$

$s_O y$ para el engranaje $= 12.000(0,161) = 1930$ (el más débil, como se supuso inicialmente).

La longitud del diente, $b = 4\pi/12 = 1,05$ pul; utilizar 1 pul.

7. Para resolver el problema 4 utilizaremos otra aplicación de las ecuaciones de diseño. Un engranaje recto de bronce ($s_O = 12.000$ psi) debe accionar un piñón de acero dulce ($s_O = 15.000$ psi). La razón de las velocidades angulares debe ser $3\frac{1}{2}$ a 1. El ángulo de presión debe ser $14\frac{1}{2}^\circ$. Determinar los menores diámetros de los engranajes que se pueden utilizar y la longitud del diente necesaria para transmitir 6 HP a una velocidad del piñón de 1800 rpm. Diseñar con base en la resistencia, únicamente. Ninguno de los dos engranajes debe tener menos de 15 dientes.

Solución:

Número mínimo de dientes del piñón $= 16$, para una razón de velocidades de $3\frac{1}{2}$. El engranaje tendría, entonces $16(3\frac{1}{2}) = 56$ dientes.

Verificar cuál es el engranaje más débil: para el engranaje, $s_O y = 12.000(0,112) = 1340$

para el piñón, $s_O y = 15.000(0,081) = 1220$ (más débil)

Momento de torsión en el piñón $= 6(63.000)/1800 = 210$ lb-pul.

La ecuación de Lewis puede expresarse en función del momento de torsión, $FR = sb\pi yR/P_d = M_t$.

$$\begin{aligned} \text{El momento de torsión, utilizando la resistencia a la fatiga, es } M_O &= \frac{s_O b \pi y R}{P_d} = \frac{s_O b \pi y N_p}{P_d (2P_d)} \\ &= \frac{15.000 (4\pi/P_d) \pi (0,081) (16)}{2P_d^2} = \frac{383.000}{P_d^3} \end{aligned}$$

$$\text{Momento de torsión dinámico real } M_d = \frac{FR}{\text{factor de velocidad}} = \frac{M_t}{\text{factor de velocidad}} = \frac{210}{\text{factor de velocidad}}$$

Si el factor de velocidad se aproxima a $\frac{1}{2}$, entonces $383.000/P_d^3 \approx 210/\frac{1}{2}$ o $P_d \approx 10$.

Ensayemos $P_d = 10$: $D_p = 16/10 = 1,6$ pul, $V = 1,6\pi(1800)/12 = 754$ pies/min; entonces

$$M_O = \frac{383.000}{10^3} = 383 \text{ lb-pul} \quad \text{y} \quad M_d = \frac{210}{600/(600+754)} = 475 \text{ lb-pul}$$

lo cual indica que $P_d = 10$ es ligeramente débil.

Ensayemos $P_d = 9$: $D_p = 16/9 = 1,78$ pul, $V = 1,78\pi(1800)/12 = 838$ pies/min; entonces

$$M_O = \frac{383.000}{9^3} = 526 \text{ lb-pul} \quad \text{y} \quad M_d = \frac{210}{600/(600+838)} = 504 \text{ lb-pul}$$

lo cual indica que $P_d = 9$ es resistente.

Reducir la longitud del diente de $b = 4\pi/P_d$ a $b = 4\pi(504/526)/9 = 1,34$ pul; utilizar $1\frac{3}{8}$ pul.

PROBLEMAS PROPUESTOS

8. Un piñón recto de acero ($s_O = 30.000$ psi) debe accionar un engranaje de acero ($s_O = 20.000$ psi). El diámetro del piñón debe ser 4 pul y la distancia entre centros 8 pul. El piñón debe transmitir 6 HP a 900 rpm. Los dientes deben ser de 20° y profundidad total. Determinar el paso diametral y la longitud del diente necesarios para obtener el mayor número de dientes. Diseñar únicamente con base en la resistencia, utilizando la ecuación de Lewis.
Resp. $b = \frac{7}{8}$ pul, $P_d = 14$
9. En una trituradora de piedra se deben utilizar dos engranajes rectos que han de tener un tamaño mínimo. Los engranajes se deben diseñar con las siguientes estipulaciones: Potencia transmitida, 25 HP; velocidad del piñón, 1200 rpm; relación de las velocidades angulares, 3,5 a 1; perfil del diente, "stub" a 20° ; valor de s_O para el piñón, 15.000 psi; valor de s_O para el engranaje, 10.000 psi. Determinar la longitud del diente y el paso diametral que se necesitan, únicamente con base en la resistencia, empleando la ecuación de Lewis.
Resp. $b = 2,25$ pul, $P_d = 5$
10. Un par de engranajes rectos que transmiten potencia de un motor al eje de una bomba impelente deben diseñarse con la distancia entre centros tan pequeña como sea posible. El piñón, de acero forjado ($s_O = 23.000$ psi), debe transmitir 5 HP a 600 rpm a un engranaje de acero fundido ($s_O = 15.000$ psi) con una razón de transmisión de $4\frac{1}{2}$ a 1, y se deben utilizar dientes de evolvente a 20° y profundidad total. Determinar la longitud del diente y el paso diametral necesarios (basado en la resistencia, únicamente), utilizando la ecuación de Lewis.
Resp. $b = 1\frac{1}{4}$ pul, $P_d = 9$
11. Un par de engranajes de una grúa debe hacerse con las siguientes especificaciones: Dientes de 20° y profundidad total; s_O para el piñón = 12.000 psi, s_O para el engranaje = 8000 psi; $N_p = 20$ dientes; $N_g = 80$ dientes.
 - (a) ¿Qué paso diametral normalizado y qué longitud del diente pueden satisfacer estas condiciones, con una distancia mínima entre centros? Utilizar la ecuación de Lewis.
 - (b) Si se calcula que la carga dinámica para este par de engranajes es 760 lb, determinar si el diseño es seguro o no, desde el punto de vista de la resistencia.
 - (c) Verificar el diseño con base en el desgaste o la fatiga de las superficies, si la constante de fatiga es $K = 198$.Resp. (a) $P_d = 5$, $b = 2,32$ pul (utilizar $2\frac{3}{8}$ pul)
(b) $F_O = 1650$ lb, $F_d = 760$ lb (satisfactorio)
(c) $F_w = 3010$ lb, $F_d = 760$ lb (satisfactorio)
12. Un piñón recto de acero fundido que tiene 24 dientes y funciona a 1150 rpm, transmite $3\frac{1}{2}$ HP a un engranaje de acero fundido de 56 dientes. Los engranajes deben tener las siguientes especificaciones: Paso diametral = 8, valor de $s_O = 15.000$ psi, longitud del diente = $1\frac{1}{2}$ pul, factor C para carga dinámica = 1600, factor K para carga de desgaste = 40. Determinar: (a) El esfuerzo producido en el engranaje más débil, (b) la carga dinámica, (c) la carga de desgaste, (d) la carga estática permisible.
Resp. $s = 5670$ psi, $F_d = 1330$ lb, $F_w = 252$ lb, $F_O = 848$ lb.
Los engranajes son inadecuados desde el punto de vista de los efectos dinámicos y de desgaste
13. Para accionar una máquina envasadora se utilizan dos engranajes de 20° y profundidad total, que deben transmitir 5 HP con una relación de transmisión de 2,5 a 1. El piñón funciona a 1200 rpm. Para un diseño inicial se ha escogido un piñón de acero forjado ($s_O = 15.000$ psi) y un engranaje de semiacero ($s_O = 9000$ psi). Los dos engranajes deben ser cuidadosamente tallados y de las tablas de datos encontramos que el factor C para carga dinámica es 1140 y el factor K para desgaste es 156.
 - (a) Determinar los diámetros, la longitud del diente y los números de dientes para que los tamaños de los engranajes sean mínimos y con la resistencia adecuada, utilizando la ecuación de Lewis.
 - (b) Hallar las cargas dinámica y de desgaste, estableciendo si los engranajes son adecuados o no.
 - (c) Si los engranajes no son adecuados desde el punto de vista del desgaste y la resistencia, expresar los cambios que se deben hacer.Resp. (a) $b = 1\frac{1}{4}$ ", $P_d = 8$
(b) $F_d = 997$ lb, $F_w = 558$ lb, $F_O = 548$ lb
(c) Los engranajes no son adecuados desde el punto de vista de la resistencia y el desgaste, debido a que F_d es mayor que los valores permisibles F_O y F_w . Puede necesitarse uno o más de los siguientes cambios: Disminuir el error del diente, disminuir el paso diametral, aumentar la longitud del diente y cementar los engranajes

Capítulo 19

Engranajes helicoidales

LOS ENGRANAJES HELICOIDALES se diferencian de los cilíndricos de dientes rectos en que tienen los dientes tallados en forma de una hélice alrededor de los cilindros primitivos, en lugar de ser paralelos al eje de rotación. Los engranajes helicoidales se pueden utilizar para conectar ejes paralelos o no paralelos. El estudio de este capítulo se limitará a los engranajes helicoidales que conectan ejes paralelos. En este caso, una hélice diestra engrana siempre con una hélice siniestra. En la figura 19-1 se ve un engranaje helicoidal con la hélice siniestra.

ψ = ángulo de la hélice, en grados

F = fuerza transmitida (fuerza que produce el momento), en lb

F_e = empuje axial = $F \tan \psi$, en lb

P_c = paso circular circunferencial, en pul

P_{nc} = paso circular normal, en pul

b = longitud del diente, en pul

P_d = paso diametral, medido en el plano de rotación

P_{nd} = paso diametral normal, medido en el plano normal al diente

Obsérvese que: $P_{nc} = P_c \cos \psi$, $P_{nd} = P_d / \cos \psi$, $P_{nc} \times P_{nd} = \pi = P_c P_d$

Con el fin de que la cara del diente tenga siempre por lo menos un punto de contacto en la línea primitiva, la longitud mínima del diente es

$$b_{\min} = \frac{P_c}{\tan \psi}$$

EL ANGULO DE PRESION ϕ_n medido en el plano normal, se distingue del ángulo de presión ϕ , medido en el plano trasversal, como se indica en la figura 19-2, siendo la relación entre ellos

$$\tan \phi_n = \tan \phi \cos \psi$$

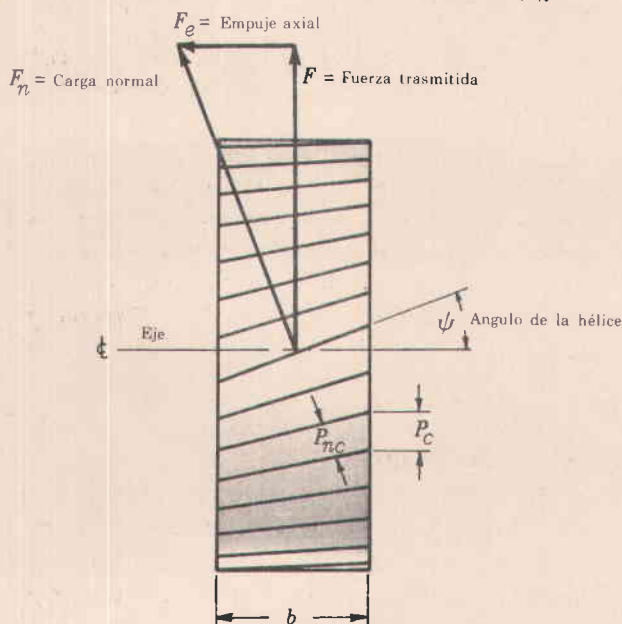


Fig. 19-1

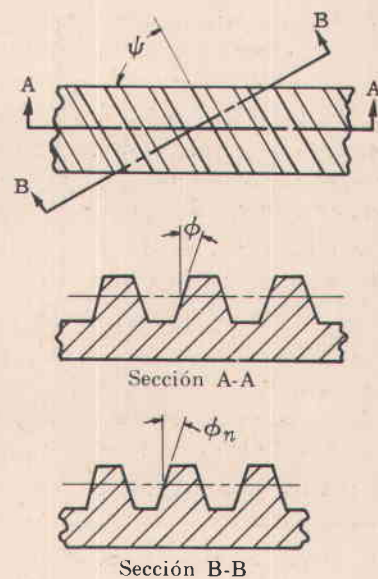


Fig. 19-2

EL NUMERO VIRTUAL O FORMATIVO de dientes de un engranaje helicoidal, N_f , se define como el número de dientes que se tallarían en la superficie de un cilindro que tuviera un radio igual al radio de curvatura en un punto localizado en el extremo del eje menor de la elipse que se obtiene al tomar una sección del engranaje en el plano normal.

$$N_f = \frac{N}{\cos^3 \psi}$$

donde N = número real de dientes y ψ = ángulo de la hélice.

EL DISEÑO BASADO EN LA RESISTENCIA de los engranajes helicoidales puede hacerse empleando métodos de diseño similares a los utilizados para los engranajes cilíndricos de dientes rectos. Suponiendo que la carga se distribuye lo mismo que en los engranajes cilíndricos de dientes rectos y mirando el diente en sentido normal a la hélice, la carga normal F_n que se utiliza en la ecuación de Lewis es

$$F_n = s \left(\frac{b}{\cos \psi} \right) \frac{\pi y}{P_{nd}}$$

Haciendo la fuerza tangencial $F = F_n \cos \psi$, y $P_{nd} = P_d / \cos \psi$,

$$F = \frac{sby\pi}{P_{nd}} = \frac{sk\pi^2 y}{P_{nd}^2 \cos \psi} \quad (\text{utilizarla cuando el paso normalizado está en el plano normal})$$

$$o \quad F = \frac{sby\pi \cos \psi}{P_d} = \frac{sk\pi^2 y \cos \psi}{P_d^2} \quad (\text{utilizarla cuando el paso normalizado está en un plano diametral})$$

donde $k = b/P_c$ (limitado a un valor de más o menos 6)

P_d = paso diametral en el plano de rotación

y = factor de forma basado en el número virtual o formativo de dientes. Si el ángulo de presión es normalizado en el plano normal, utilizar y de la tabla de engranajes cilíndricos de dientes rectos. Si el ángulo de presión es normalizado en el plano diametral, utilizar y de la tabla de engranajes cilíndricos de dientes rectos, solamente como una aproximación. Para este último caso se puede obtener un cálculo más exacto de y por medio de una solución gráfica

El esfuerzo permisible s puede tomarse aproximadamente igual al límite de fatiga del material en carga libre, corregido por el efecto de la concentración de esfuerzos y multiplicado por un factor de velocidad:

$$s = s_o \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right) \quad \text{esfuerzo permisible, en psi}$$

donde s_o = aproximadamente una tercera parte de la resistencia al fallar el material, en psi. Esto incluye una corrección promedio por los efectos de la concentración de esfuerzos

V = velocidad en la línea primitiva, pies/min

Se puede hacer un cálculo más exacto de s_o si se dispone de los datos relativos al límite de fatiga y a los efectos de concentración de esfuerzos del material. Sin embargo, en vista de que existen otras aproximaciones, el diseño basado en las expresiones anteriores será adecuado, puesto que también se verificará con base en la carga dinámica y en la carga de desgaste, como se explicará más tarde.

En la verificación del diseño con base en la resistencia, el diámetro primitivo puede ser conocido o no serlo. Si se conoce el diámetro primitivo, se puede utilizar la siguiente forma de la ecuación de Lewis:

$$\frac{P_d^2}{y} = \frac{s_o k \pi^2 \cos \psi}{F} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right)$$

donde $k = b/P_c$

F = fuerza tangencial = momento de torsión/(radio primitivo), en lb

V = velocidad en la línea primitiva, en pies/min

Entonces la expresión anterior proporciona un valor numérico permisible para la relación P_d^2/y que controla la verificación basada en la resistencia.

Si el diámetro primitivo es desconocido, se puede utilizar la siguiente forma de la ecuación de Lewis:

$$s = \frac{2TP_d^3}{ky\pi^2 N \cos \psi}$$

donde s = esfuerzo producido real, en psi
 T = momento que resiste el engranaje más débil
 N = número real de dientes del engranaje más débil

Esta expresión proporciona un valor numérico del esfuerzo producido real, en función del paso diametral.

Los anteriores procedimientos basados en el diseño por resistencia deben considerarse únicamente como una primera aproximación para llegar a un paso y a una longitud del diente posibles, los cuales deben verificarse luego con base en la carga de desgaste y en la carga dinámica.

LA CARGA LIMITE DE FATIGA EN FLEXION, F_o , se basa en la ecuación de Lewis, sin que haya factor de velocidad.

$$F_o = \frac{s_o b y \pi \cos \psi}{P_d}$$

donde los símbolos son los mismos utilizados anteriormente.

La carga límite de fatiga, F_o , debe ser igual o mayor que la carga dinámica F_d .

Para engranajes helicoidales **LA CARGA LIMITE DE DESGASTE**, F_w , puede determinarse por medio de la ecuación de Buckingham basada en el desgaste.

$$F_w = \frac{D_p b Q K}{\cos^2 \psi}$$

donde D_p = diámetro primitivo del piñón, en pul

$$Q = \frac{2D_g}{D_p + D_g} = \frac{2N_g}{N_p + N_g} \quad (N_p \text{ y } N_g \text{ son los números reales de dientes})$$

$$K = s_{es}^2 (\sin \phi_n) (1/E_p + 1/E_g) / 1.4$$

s_{es} = límite de fatiga de la superficie. (Véase el capítulo 18 de engranajes cilíndricos de dientes rectos.)

La carga de desgaste límite F_w debe ser igual o mayor que la carga dinámica F_d .

Para engranajes helicoidales **LA CARGA DINAMICA** F_d es la suma de la carga transmitida y el incremento de carga debido a los efectos dinámicos:

$$F_d = F + \frac{0.05V(Cb \cos^2 \psi + F) \cos \psi}{0.05V + \sqrt{Cb \cos^2 \psi + F}}$$

donde los símbolos son los mismos utilizados anteriormente. Los valores de C (que es una función de la cantidad de error efectivo en el perfil de los dientes) pueden obtenerse en el capítulo 18, correspondiente a los engranajes rectos.

$$F_w \text{ debe ser } \geq F_d \text{ y } F_o \text{ debe ser } \geq F_d$$

Obsérvese que F_o y F_w son valores permisibles que no se pueden exceder.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Para un engranaje helicoidal, deducir una expresión del número virtual de dientes, N_f , en función del ángulo de la hélice, ψ , y del número real de dientes, N .

Solución:

La figura 19-3 muestra un diente de un engranaje helicoidal de diámetro primitivo D . Considerar la sección A-A en el plano normal. Esta sección será una elipse, cuyo diámetro menor es D . El radio de curvatura en el punto B es

$$r = \frac{D}{2 \cos^2 \psi} \quad (\text{de la geometría analítica})$$

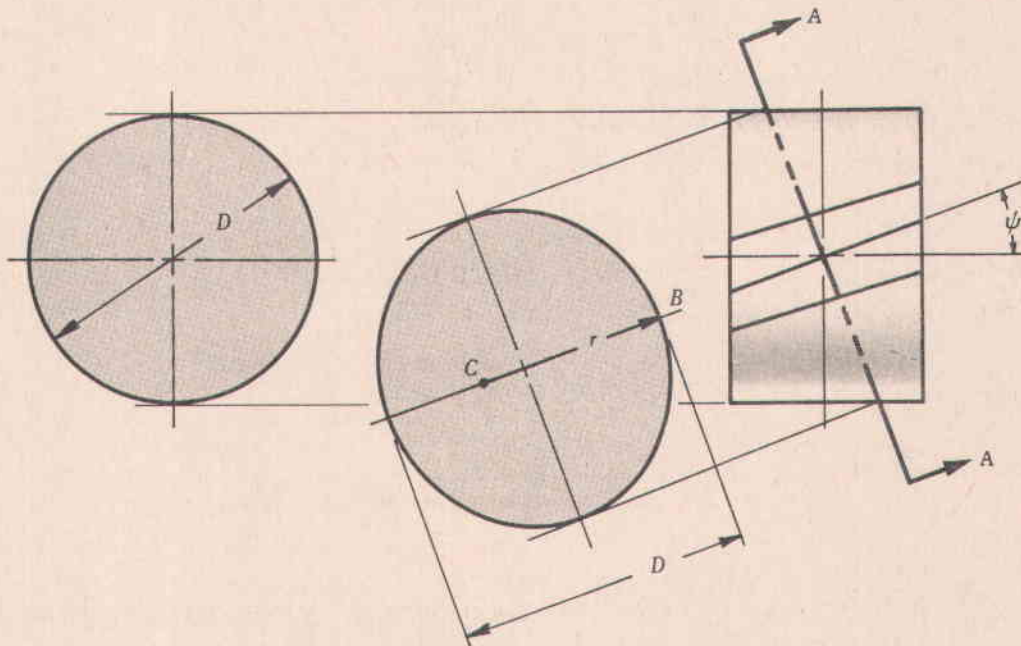


Fig. 19-3

La forma del diente situado en B será la de un diente tallado en la superficie de un cilindro primitivo de radio r y el número de dientes de esta superficie se define como el número virtual o formativo de dientes, N_f .

$$N_f = \frac{2\pi r}{P_{nc}} = 2r P_{nd} = \frac{2r P_d}{\cos \psi} = \frac{2D P_d}{2 \cos^3 \psi} = \frac{N}{\cos^3 \psi}$$

2. Un par de engranajes helicoidales debe transmitir 20 HP. Los dientes son "stub" a 20° en el plano diametral y tienen un ángulo de hélice de 45° . El piñón tiene un diámetro primitivo de 3 pul y funciona a 10.000 rpm. El engranaje tiene un diámetro primitivo de 12 pul. Si los dos engranajes son hechos de acero fundido (SAE 1235, $s_o = 15.000$ psi), determinar un paso diametral y una longitud del diente convenientes. El piñón ha sido tratado térmicamente y tiene una dureza Brinell de 300 y el engranaje tiene una dureza Brinell de 200.

Solución:

(a) Para la verificación basada en la resistencia, $s_o = 15.000$ psi. Como se conocen los diámetros, encontramos

$$\frac{P_d^2}{y} = \frac{s_o k \pi^2 \cos \psi}{F} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right) = 3500 \quad (\text{permitido})$$

donde $V = 7850$ pies/min, k supuesto = 6, $\cos \psi = 0,707$ y $F = 20(33.000)/7850 = 84$ lb.

El piñón es el engranaje más débil, ya que ambos engranajes son del mismo material.

Si $y \approx 0,15$, $P_d \approx 24$; ensayamos $P_d = 24$. Ahora $N_p = 3(24) = 72$, $N_f = N/\cos^3\psi = 72/(0,707)^3 = 204$, $y = 0,168$ (aproximado, utilizando un ángulo de presión de 20°) y $P_d^2/y = (24)^2/0,168 = 3430$ que es satisfactorio, puesto que el valor permitido es 3500.

El valor de k se puede reducir a $k = 6(3430/3500) = 5,9$. Entonces $b = 5,9(\pi/24) = 0,772$ pul; utilizar una longitud del diente de $\frac{7}{8}$ pul.

- (b) Para la verificación dinámica, determinar la carga de desgaste F_w , la carga de fatiga en flexión, F_O y comparlas con la carga dinámica F_d .

$$F_w = \frac{D_p b Q K}{\cos^2 \psi} = 803 \text{ lb (permitido)}$$

donde $\tan \phi_n = \tan 20^\circ \cos 45^\circ$, $\phi_n = 14,43^\circ$; $b = 0,875$ pul; $D_p = 3$ pul; $Q = 2D_g/(D_p + D_g) = 2(12)/(3 + 12) = 1,6$; $s_{eS} = 90.000$ psi (ya que el número de dureza Brinell promedio de los dos engranajes es 250) y

$$K = s_{eS}^2 (\sin \phi_n) (1/E_p + 1/E_g) / 1,4 = (90.000)^2 (\sin 14,43^\circ) [2/(30 \times 10^6)] / 1,4 = 95,5.$$

$$F_O = \frac{s_O b y \pi \cos \psi}{P_d} = 204 \text{ lb (permitido)}$$

$$F_d = F + \frac{0,05 V (C b \cos^2 \psi + F) \cos \psi}{0,05 V + \sqrt{C b \cos^2 \psi + F}} = 391 \text{ lb}$$

donde $s_O = 15.000$ psi, $b = 0,875$ pul, $y = 0,168$, $P_d = 24$, $F = 84$ lb, $V = 7850$ pies/min y $C = 860$ para un engranaje tallado con una precisión tal que tenga un error en el perfil de 0,0005 pul.

El diseño preliminar con $P_d = 24$ no es satisfactorio, puesto que F_d es mayor que F_O . No obstante, el diseño es satisfactorio desde el punto de vista del desgaste, ya que la carga de desgaste es mayor que la carga dinámica. Si se conservan los mismos materiales, será necesario reducir el paso. Haciendo ensayos sucesivos se establece que el paso normalizado que se necesita es $P_d = 14$. Ahora $b = 6\pi/14 = 1,345$ pul; utilizar $b = 1,25$ pul. Entonces $N_p = 3(14) = 42$, $N_f = 42/(0,707)^3 = 119$, $y = 0,162$ (aproximado, utilizando un ángulo de presión de 20°) y obtenemos $F_O = 481$ lb y $F_d = 412$ lb. Esta es una solución satisfactoria.

3. Un par de engranajes helicoidales con un ángulo de hélice de 23° debe transmitir $3\frac{1}{2}$ HP a una velocidad del piñón de 10.000 rpm. La razón de velocidades es 4 a 1. Ambos engranajes deben hacerse de acero endurecido (s_O permisible = 15.000 psi). Los engranajes son de dientes "stub" a 20° y el piñón debe tener 24 dientes. Determinar los mínimos diámetros de los engranajes que se pueden utilizar y el BHN requerido.

Solución:

- (a) Verificar primero con base en la resistencia. El piñón es el más débil de los engranajes.

Como los diámetros son desconocidos, se utiliza la siguiente forma de la ecuación de Lewis y se encuentra

$$s = \frac{2 T P_d^3}{k y \pi^2 N \cos \psi} = 0,242 P_d^3$$

donde el momento de torsión del piñón es $T = 3,5(63.000)/10.000 = 22$ lb-pul, k supuesto = 6, $N = 24$, $N_f = N/\cos^3\psi = 3,1$, $y = 0,139$ (aproximado, utilizando un ángulo de presión de 20°) y $\psi = 23^\circ$.

Suponiendo un factor de velocidad $\approx \frac{1}{2}$, $0,242 P_d^3 \approx \frac{1}{2}(15.000)$ y $P_d \approx 31$. Ensayemos un paso normalizado de 32; entonces $D_p = 24/32 = 0,75$ pul y $V = 0,75\pi(10.000)/12 = 1965$ pies/min.

$$s_{\text{permisible}} = 15.000 \left(\frac{78}{78 + \sqrt{1965}} \right) = 9550 \text{ psi}, \quad s_{\text{producido}} = 0,242(32)^3 = 7930 \text{ psi}$$

El diseño es satisfactorio desde el punto de vista de la resistencia.

El valor de k se puede reducir a $k = 6(7930/9550) = 5$. Ahora $b = 5\pi/32 = 0,49$; utilizar $b = \frac{1}{2}$ pul.

- (b) Verificar con base en la carga de desgaste y en la carga de fatiga en flexión. Suponer una dureza Brinell promedio de 250 para el primer ensayo.

$$F_w = \frac{D_p b Q K}{\cos^2 \psi} = \frac{(0,75)(0,5)(1,6)(122)}{\cos^2 23^\circ} = 86,7 \text{ lb (permitido)}$$

$$F_O = \frac{s_o b \gamma \pi \cos \psi}{P_d} = \frac{(15.000)(0,5)(0,139)\pi(0,92)}{32} = 94,5 \text{ lb (permitido)}$$

donde $\tan \phi_n = \tan 20^\circ \cos 23^\circ$, $\phi_n = 18,5^\circ$, $Q = 2(96)/(24 + 96) = 1,6$, $K = 122,0$ (basado en ϕ_n).

(c) Verificar con base en la carga dinámica. Suponer $C = 860$ (engranajes tallados con precisión).

$$F_d = F + \frac{0,05V(Cb \cos^2 \psi + F) \cos \psi}{0,05V + \sqrt{Cb \cos^2 \psi + F}} = 380,6 \text{ lb}$$

donde $F = 22/0,375 = 58,6 \text{ lb}$; $b = 0,5$; $V = 1965 \text{ pies/min}$; $\cos 23^\circ = 0,92$.

El diseño no es satisfactorio desde el punto de vista del desgaste, ya que la carga dinámica es mayor que la carga de desgaste y que la carga de fatiga en flexión. Probablemente será necesario aumentar los diámetros y cambiar el material por otro que tenga un límite de fatiga superficial mayor.

Comenzando con la ecuación de carga de desgaste, $F_w = D_p b (1,6) K / (0,92)^2$. Sea $b = 6P_C = \pi D_p / 4$ para un piñón de 24 dientes; entonces $F_w = 1,485 D_p^2 K$.

La ecuación de carga dinámica puede establecerse también en función del diámetro del piñón, utilizando $F = 2T/D_p = 44/D_p$; $0,05V = 131D_p$ para una velocidad del piñón de 10.000 rpm y suponiendo $C = 860$.

$$F_d = \frac{44}{D_p} + \frac{131D_p[(860\pi D_p/4)(0,92)^2 + 44/D_p](0,92)}{131D_p + \sqrt{(860\pi D_p/4)(0,92)^2 + 44/D_p}}$$

Ahora, por ensayos sucesivos se determina una combinación satisfactoria de D_p y K . Ensayemos $P_d = 10$ o $D_p = 2,4 \text{ pul}$; $K = 250$, $b = \pi(2,4)/4 = 1,885$; entonces

$$F_w = 1,485 D_p^2 K = 2140 \text{ lb}, F_d = 1164 \text{ lb}, F_O = (15.000)(1,885)(0,139)\pi(0,92)/10 = 1138 \text{ lb}$$

Esto nos dará una solución, ya que F_d es sólo ligeramente mayor (2,3%) que F_O .

4. Un par de engranajes helicoidales de acero, tallados con precisión, están montados sobre ejes paralelos, con una distancia entre centros de 7,5 pul y transmiten potencia con una razón de velocidades de 4 a 1. El piñón gira a 10.000 rpm. Ambos engranajes son hechos del mismo material, el cual tiene un $s_o = 15.000 \text{ psi}$. Los dientes son "stub" a 20° y el ángulo de la hélice es 45° . La longitud del diente es 0,75 pul y el paso diametral es 24. Determinar la máxima potencia que se puede transmitir sin peligro de falla, considerando el desgaste y la resistencia. Los dos engranajes tienen una dureza Brinell de 400.

Solución:

(a) Determinar la carga de desgaste.

$$F_w = \frac{D_p b Q K}{\cos^2 \psi} = \frac{3(0,75)(1,6)(268)}{(0,707)^2} = 1930 \text{ lb}$$

donde $D_p = 3$, $b = 0,75$, $Q = 1,6$, $\tan \phi_n = \tan 20^\circ \cos 45^\circ$, $\phi_n = 14,43^\circ$, y

$$K = s_{es}^2 (\sin \phi_n) (1/E_p + 1/E_g) / 1,4 = (150.000)^2 (0,25) [2/(30 \times 10^6)] / 1,4 = 268$$

(b) Determinar la carga de fatiga.

$$F_O = \frac{s_o b \gamma \pi \cos \psi}{P_d} = \frac{(15.000)(0,75)(0,139)\pi(0,92)}{24} = 188,5 \text{ lb}$$

(c) La carga dinámica no debe sobrepasar 188,5 lb. $V = 7850 \text{ pies/min}$.

$$F_d = F + \frac{(0,05)(7850)(860 \times 0,75 \times 0,92^2 + F)(0,92)}{(0,05)(7850) + \sqrt{860(0,75)(0,92)^2 + F}}$$

Haciendo $F = 0$ en esta ecuación, obtenemos $F_d = 474 \text{ lb}$, que es mayor que F_O .

Las ecuaciones de Buckingham indican que el diseño anterior no será satisfactorio desde el punto de vista de la fatiga, aun con potencia nula. Con base en las condiciones medias de masa, la vida del engranaje será limitada.

PROBLEMAS PROPUESTOS

5. Probar: $\phi_n = \tan^{-1}[\tan \phi \cos \psi]$.
6. Dos engranajes helicoidales de acero forjado, tallados con precisión, tienen las siguientes especificaciones:
 $s_o = 10.000 \text{ psi}$, $s_{eS} = 90.000 \text{ psi}$, $P_d = 8$, $b = 1,25 \text{ pul}$
 El piñón gira a 600 rpm, la relación de transmisión es 25/9, $\phi = 20^\circ$ (dientes de profundidad total) y el ángulo de la hélice $\psi = 23^\circ$. Determinar la carga transmitida F , la carga de desgaste F_w , la carga dinámica F_d y el empuje axial F_e .
 Resp. $F = 386 \text{ lb}$, $F_w = 440 \text{ lb}$, $F_d = 773 \text{ lb}$, $F_e = 164 \text{ lb}$
7. Dos engranajes helicoidales de acero que tienen un ángulo de presión normal de $14\frac{1}{2}^\circ$ y un ángulo de hélice de 23° , conectan dos ejes paralelos. El piñón tiene 48 dientes, el engranaje 240 y el paso diametral es 8. El piñón tiene una dureza Brinell de 250 y el engranaje una dureza Brinell de 200. La longitud del diente es 10 pulgadas. Determinar la carga de desgaste.
 Resp. $K = 76$, $Q = 1,67$, $F_w = 9000 \text{ lb}$
8. Dos ejes paralelos están conectados por medio de un par de engranajes helicoidales. El piñón transmite 15 HP a una velocidad de 4000 rpm. Ambos engranajes son hechos de acero endurecido (s_o permisible = 15.000 psi). Si la razón de velocidades es $4\frac{1}{2}$ a 1, determinar los menores diámetros de los engranajes que se pueden utilizar, que tengan la resistencia suficiente. Ninguno de los engranajes debe tener menos de 30 dientes; los dientes son "stub" con un ángulo de 20° en el plano diametral y el ángulo de la hélice es 45° . Utilizar la ecuación de Lewis.
 Resp. $P_d = 16$, $b = 1,25$
9. En el problema 8 determinar la dureza Brinell promedio de los dos engranajes que se requiere para obtener un diseño satisfactorio, desde el punto de vista del desgaste. $C = 860$.
 Resp. $K = 89,5$; $s_{eS} = 86.600 \text{ psi}$, BHN promedio = 242
10. En el problema 8 determinar si los engranajes están diseñados satisfactoriamente para soportar los efectos dinámicos. Utilizar $K = 89,5$. Calcular F_w , F_o y F_d .
 Resp. $F_w = 687 \text{ lb}$, $F_o = 362 \text{ lb}$, $F_d = 686 \text{ lb}$, F_o debería ser $\geq F_d$.

Capítulo 20

Engranajes cónicos

LOS ENGRANAJES CONICOS se utilizan generalmente para conectar ejes que se cortan y se pueden clasificar de acuerdo con la amplitud de su ángulo primitivo. Los que tienen el ángulo primitivo α menor que 90° son engranajes cónicos externos, como se ve en la figura 20-1. Los que tienen el ángulo primitivo de 90° se llaman coronas dentadas, como se muestra en la figura 20-2. Los que tienen el ángulo primitivo α mayor que 90° son los engranajes cónicos internos, como se indica en la figura 20-3. La suma de los ángulos primitivos de dos engranajes cónicos acoplados es igual al ángulo formado por los dos ejes. Con respecto a un elemento del cono, los dientes pueden ser rectos o espirales. El estudio de este capítulo se limitará a los engranajes cónicos de dientes rectos que conectan ejes cortados a 90° , como muestra la figura 20-4.

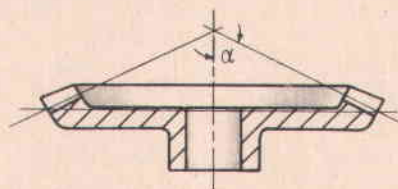


Fig. 20-1

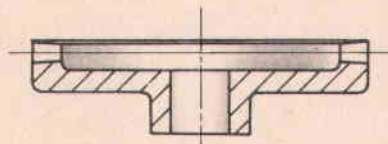


Fig. 20-2

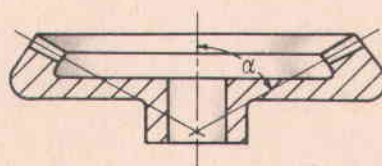


Fig. 20-3

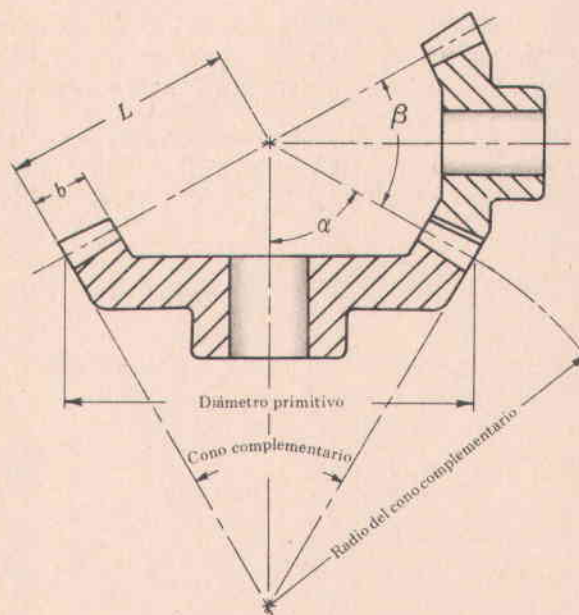


Fig. 20-4

Como ocurre en el diseño de la mayoría de elementos de máquinas, en el diseño de engranajes se hacen numerosas aproximaciones. No se pueden establecer reglas fijas, puesto que hay muchas variables. La mayor parte de los ingenieros siguen los procedimientos propuestos por Buckingham, Gleason y los recomendados por la AGMA (American Gear Manufacturers Association). Todo procedimiento para diseñar engranajes debe considerarse como preliminar, hasta que se compruebe experimentalmente que se satisfacen los requisitos especificados.

Como en los engranajes cilíndricos de dientes rectos y en los helicoidales, el diseño de engranajes cónicos se basa en la resistencia a la flexión, en la carga dinámica y en la carga de desgaste.

EL DISEÑO POR RESISTENCIA de un engranaje cónico de dientes rectos se puede hacer con base en la ecuación de Lewis. Debe observarse que el diente se adelgaza y su sección transversal se hace más pequeña a medida que converge hacia el vértice del cono. Para hacer la corrección debida a esta situación, la ecuación de Lewis se modifica en la forma indicada más adelante.

La fuerza permisible F que se puede transmitir es

$$F = \frac{sby\pi}{P_d} \left(\frac{L-b}{L} \right)$$

donde s = esfuerzo de flexión permisible, en psi

y = factor de forma basado en el número formativo de dientes y en el tipo de perfil del diente

L = generatriz del cono (pul), la cual es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de los radios primitivos de los engranajes acoplados (para ejes que se corten a 90°)

P_d = paso diametral basado en la mayor sección transversal del diente

b = longitud de los dientes de los engranajes, en pul.

Con el fin de obtener un funcionamiento satisfactorio y facilidad en la fabricación de los engranajes helicoidales, se recomienda que la longitud del diente esté limitada entre $L/3$ y $L/4$, donde L es la generatriz del cono. En general diseñaremos la longitud del diente con un valor cercano (pero nunca mayor) a $L/3$. Cuando se diseña con base en la resistencia, el diámetro del engranaje puede ser conocido o no serlo. Cuando se conoce el diámetro, es conveniente utilizar la ecuación modificada de Lewis, en la forma

$$\frac{P_d}{y} = \frac{sb\pi}{F} \left(\frac{L-b}{L} \right) = \text{valor permitido}$$

Obsérvese que todos los términos del miembro de la derecha de la ecuación anterior pueden determinarse una vez que se ha especificado el material. La fuerza transmitida F se determina dividiendo el momento de torsión del engranaje más débil por su radio primitivo. La longitud del diente, b , puede tomarse como $L/3$, redondeando hasta el valor expresado en octavos de pulgada que esté más cercano por debajo de este valor. El esfuerzo permisible s se calcula en la forma que se explica en la siguiente sección. La ecuación anterior proporciona, entonces, un valor permisible de P_d/y que se debe satisfacer, escogiendo un valor adecuado para P_d .

Cuando el diámetro es desconocido, conviene emplear la siguiente forma de la ecuación de Lewis:

$$s = \frac{2TP_d^2}{b\pi y N} \left(\frac{L}{L-b} \right) = \text{esfuerzo real} \leq \text{esfuerzo permitido}$$

Esta ecuación proporciona un valor del esfuerzo real, en función de P_d^3 , después de hacer los siguientes replazos:

$$\text{Sea } b = \frac{L}{3} = \frac{N_p}{6P_d} \sqrt{1+R^2} \quad \text{y} \quad \text{Sea } \frac{L}{L-b} = \frac{3}{2}$$

donde N = número real de dientes del engranaje más débil

N_p = número de dientes del piñón

R = razón de la velocidad angular del piñón a la velocidad angular del engranaje

El diseño desde el punto de vista de la resistencia puede considerarse como una primera aproximación que debe verificarse por efectos de desgaste y de la carga dinámica, como se explicará más tarde.

LOS ESFUERZOS PERMISIBLES, s , para las condiciones medias pueden tomarse como

$$s = s_o \left(\frac{1200}{1200+V} \right) \text{ psi para dientes fresados} \quad \text{o} \quad s = s_o \left(\frac{78}{78+\sqrt{V}} \right) \text{ psi para dientes tallados por generación}$$

donde s_o es el límite de fatiga del material del engranaje para carga libre, corregido por el efecto de la concentración promedio de esfuerzos (psi). Un valor aproximado de s_o es 1/3 de la resistencia al fallar, con base en el valor promedio de la concentración de esfuerzos. V es la velocidad en la línea primitiva (pies/min).

Para un engranaje cónico, **EL NUMERO VIRTUAL O FORMATIVO** de dientes, N_f , es el número de dientes que se tallarían en un engranaje que tuviera un radio primitivo igual al radio del cono complementario, siendo el paso el mismo del engranaje real.

$$N_f = N / \cos \alpha$$

donde N = número real de dientes del engranaje

α = ángulo primitivo o la mitad del ángulo del cono

LA CARGA DE DESGASTE LIMITE, F_w , puede aproximarse por

$$F_w = \frac{0,75 D_p b K Q}{\cos \alpha} \quad (\text{valor permitido})$$

donde D_p , b , K y Q son los mismos de los engranajes cilíndricos de dientes rectos, con la diferencia que Q se basa en el número formativo de dientes y α es el ángulo primitivo del piñón.

LA CARGA DE FATIGA LIMITE, F_o , puede aproximarse por

$$F_o = \frac{s_o b y \pi}{P_d} \left(\frac{L-b}{L} \right) \quad (\text{valor permitido})$$

LA CARGA DINAMICA, F_d , que es igual a la carga transmitida más un incremento de carga debido a los efectos dinámicos, puede aproximarse por

$$F_d = F + \frac{0,05 V (bC + F)}{0,05 V + \sqrt{bC + F}}$$

donde los símbolos son los mismos utilizados en los engranajes cilíndricos de dientes rectos. F_d debe ser $\leq F_w$, F_d debe ser $\leq F_o$.

Obsérvese que F_o y F_w son valores permitidos que no deben ser excedidos por la carga dinámica.

LAS NORMAS DE LA AMERICAN GEAR MANUFACTURERS ASSOCIATION (AGMA) recomiendan la siguiente potencia indicada para carga máxima, tanto para engranajes cónicos rectos como espirales:

$$HP = \frac{sn D_p b y \pi (L - 0,5b)}{126.000 P_d L} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right)$$

donde s = 250 veces el número de dureza Brinell del engranaje más débil, tanto para engranajes que han sido endurecidos, como para engranajes que no han sido endurecidos después de tallados

s = 300 veces el número de dureza Brinell del engranaje más débil, si éste es cementado

n = velocidad del piñón, en rpm

Todos los demás símbolos son los mismos empleados anteriormente.

LAS NORMAS DE LA AGMA PARA DESGASTE (DURABILIDAD) recomiendan las siguientes potencias indicadas:

$HP = 0,8 C_m C_B b$ para engranajes helicoidales de dientes rectos

$HP = C_m C_B b$ para engranajes helicoidales de dientes espirales

donde C_m = factor del material, de acuerdo con la lista mostrada en seguida

$$C_B = \frac{D_p^{1,5} n}{233} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right)$$

n = velocidad del piñón, en rpm

FACTOR DEL MATERIAL C_m - LISTA PARCIAL

Engranaje		Piñón		C_m
Material	Dureza Brinell	Material	Dureza Brinell	
I	160-200	II	210-245	0,30
II	245-280	II	285-325	0,40
II	285-325	II	335-360	0,50
II	210-245	III	500	0,40
II	285-325	IV	550	0,60
III	500	IV	550	0,90
IV	550	IV	550	1,00

I = acero recocido III = acero endurecido superficialmente o en aceite
 II = acero tratado térmicamente IV = acero cementado

Se ha encontrado experimentalmente que, por regla general, si los dientes de hierro fundido son suficientemente resistentes, no fallarán por desgaste y que si los dientes de acero satisfacen los requisitos de desgaste, serán suficientemente resistentes.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un engranaje cónico de hierro fundido tiene un diámetro primitivo D de 0,24 pul y un ángulo primitivo α de 30° . El paso diametral P_d es 10. Determinar la carga de fatiga permisible, F_o . Los dientes son de 20° y profundidad total.

Solución:

$$F_o = \frac{s_o b y \pi}{P_d} \left(\frac{L-b}{L} \right) = \frac{(8000)(8)(0,149)\pi}{10} \left(\frac{24-8}{24} \right) = 1996 \text{ lb}$$

donde $s_o = 8000$ psi para hierro fundido, $L = D/(2 \sin 30^\circ) = 24$ pul, $b = L/3 = 8$ pul,

$$y = 0,149 \text{ (factor de forma basado en que } N_f = \frac{N}{\cos \alpha} = \frac{P_d D}{\cos \alpha} = \frac{10(24)}{\cos 30^\circ} = 277 \text{ dientes)}$$

2. Dos engranajes cónicos de acero que tienen una dureza Brinell de 250, conectan dos ejes a 90° . Los dientes son de $14\frac{1}{2}^\circ$ y profundidad total y el paso diametral es 6. Los números de dientes del piñón y del engranaje son 30 y 48, respectivamente. La longitud del diente es 1,5 pul. Determinar la carga de desgaste, F_w .

Solución:

$$F_w = \frac{0,75 D_p b K Q}{\cos \alpha} = \frac{(0,75)(5)(1,5)(96)(1,44)}{0,846} = 918 \text{ lb}$$

donde $D_p = N_p/P_d = 30/6 = 5$ pul, $D_g = N_g/P_d = 48/6 = 8$ pul, $b = 1,5$ pul

$$K = \frac{s_{es}^2 (\sin \phi) (1/E_p + 1/E_g)}{1,4} = \frac{(90.000)^2 (0,25) [2/(30 \times 10^6)]}{1,4} = 96$$

$$s_{es} = (BHN)(250) - 10.000 = (400)(250) - 10.000 = 90.000 \text{ psi}$$

$$Q = \frac{2 N_f (\text{eng})}{N_f (\text{piñón}) + N_f (\text{eng})} = \frac{2(90,5)}{35,4 + 90,5} = 1,44$$

$$N_f (\text{eng}) = \frac{N_g}{\cos \alpha (\text{eng})} = \frac{48}{0,53} = 90,5, \quad N_f (\text{piñón}) = \frac{N_p}{\cos \alpha (\text{piñón})} = \frac{30}{0,847} = 35,4$$

$$\cos \alpha (\text{eng}) = \frac{R_p}{L} = \frac{2,5}{4,72} = 0,53, \quad \cos \alpha (\text{piñón}) = \frac{R_g}{L} = \frac{4}{4,72} = 0,847, \quad L = \sqrt{R_p^2 + R_g^2} = 4,72$$

3. Dos engranajes cónicos de hierro fundido transmiten 3 HP, con una velocidad en la línea primitiva de 860 pies/min. La longitud de los dientes de los engranajes es 0,75 pul. Determinar la carga dinámica F_d . Los dientes son de evolvente a $14\frac{1}{2}^\circ$ y tallado de precisión.

Solución:

$$F_d = F + \frac{0,05V(Cb+F)}{0,05V + \sqrt{Cb+F}} = 115 + \frac{(0,05)(860)(400 \times 0,75 + 115)}{(0,05)(860) + \sqrt{400 \times 0,75 + 115}} = 397 \text{ lb}$$

donde $F = (\text{HP}) (33.000)/V = (3)(33.000)/860 = 115 \text{ lb}$

$C = 400$ para engranajes tallados con precisión (igual que para engranajes cilíndricos de dientes rectos)

$V = 860$ pies/min, $b = 0,75$ pul

4. Dos engranajes cónicos de hierro fundido que tienen diámetros primitivos de 3 pul y 4 pul, respectivamente, deben transmitir 3 HP a una velocidad del piñón de 1100 rpm. Los perfiles de los dientes son de $14\frac{1}{2}^\circ$ y forma compuesta.

(a) Determinar la longitud b del diente y el P_d requeridos, desde el punto de vista de la resistencia, empleando la ecuación de Lewis.

(b) Verificar el diseño desde el punto de vista de la carga dinámica y del desgaste.

Solución:

El piñón es el más débil de los dos engranajes, puesto que ambos son del mismo material.

(a) Diseño basado en la resistencia.

$$\frac{P_d}{y} = \frac{sb\pi}{F} \left(\frac{L-b}{L} \right) = \frac{(4650)(0,75)\pi}{115} \left(\frac{2,5-0,75}{2,5} \right) = 66,5 \text{ (permitido)}$$

$$\text{donde } s = s_o \left(\frac{1200}{1200+V} \right) = 8000 \left(\frac{1200}{1200+860} \right) = 4650 \text{ psi, } V = \frac{3\pi}{12} (1100) = 860 \text{ pies/min.}$$

$$b = L/3 = 2,5/3 = 0,83 \text{ pul, (use 0,75 pul), } L = \sqrt{R_p^2 + R_g^2} = \sqrt{1,5^2 + 2^2} = 2,5 \text{ pul.}$$

$$s_o = 8000 \text{ psi para hierro fundido, } F = (3)(33.000)/860 = 115 \text{ lb}$$

Entonces, si $y \approx 1$ y $P_d/y = 66,5$, $P_d \approx 6$ ó 7.

Ensayemos $P_d = 7$: $N_p = (3)(7) = 21$, $N_f(\text{piñón}) = 21/\cos \alpha = 26,2$ (dientes formativos), $y = 0,098$ para 26,2 dientes. Ahora, $P_d/y = 7/0,098 = 71,5$ (demasiado débil, puesto que $71,5 > 66,5$).

Ensayemos $P_d = 6$: $N_p = (3)(6) = 18$, $N_f(\text{piñón}) = 18/\cos \alpha = 18/(2/2,5) = 22,5$, $N_g = (4)(6) = 24$, $N_f(\text{eng}) = 24/\cos \alpha = 24/(1,5/2,5) = 40$, $y = 0,094$ para 22,5 dientes. Ahora $P_d/y = 6/0,094 = 63,8$ (satisfactorio ya que $63,8 < 66,5$).

(b) Verificar por los efectos de desgaste y dinámicos, utilizando $P_d = 6$.

$$F_w = \frac{0,75 D_p b K Q}{\cos \alpha (\text{piñón})} = \frac{(0,75)(3)(0,75)(193)(1,28)}{0,8} = 522 \text{ lb (permitido)}$$

donde $K = 193$ con base en que $s_{es} = 90.000$ psi para hierro fundido contra hierro fundido (capítulo 18, tabla III y

$$Q = \frac{2N_f (\text{eng})}{N_f (\text{piñón}) + N_f (\text{eng})} = \frac{(2)(40)}{22,5 + 40} = 1,28.$$

$$F_o = \frac{s_o b y \pi}{P_d} \left(\frac{L-b}{L} \right) = \frac{(8000)(0,75)(0,094)\pi}{6} \left(\frac{2,5-0,75}{2,5} \right) = 207 \text{ lb (permitido)}$$

Tanto F_o como F_w deben ser iguales o mayores que F_d .

$$F_d = F + \frac{0,05V(Cb+F)}{0,05V + \sqrt{Cb+F}} = 115 + \frac{(0,05)(860)(400 \times 0,75 + 115)}{(0,05)(860) + \sqrt{400 \times 0,75 + 115}} = 397 \text{ lb}$$

El diseño es satisfactorio desde el punto de vista del desgaste, pero la carga dinámica es mayor que la carga de fatiga. Debe destinarse un material mejor para el piñón con el fin de aumentar la carga de fatiga por lo menos a 397 lb.

5. Se debe emplear un par de engranajes cónicos para transmitir 12 HP. Determinar el paso diametral y los diámetros para que se satisfagan las siguientes especificaciones:

	Piñón	Engranaje
No. de dientes	21	60
Material	Semiacero	Hierro fundido
s_o	12.000 psi	8000 psi
Dureza Brinell	200	160
Velocidad	1200 rpm	420 rpm
Perfil del diente	$14\frac{1}{2}^\circ$ compuesto	Igual

Solución:

- (a) Diseñar con base en la resistencia, utilizando la ecuación de Lewis.

En primer lugar se determina cuál de los dos engranajes es más débil. La resistencia de los engranajes es una función del producto de s_o por y .

$$N_f(\text{eng}) = \frac{60\sqrt{21^2 + 60^2}}{21} = 182, \quad y = 0,120, \quad N_f(\text{piñón}) = \frac{21\sqrt{21^2 + 60^2}}{60} = 22,2, \quad y = 0,093.$$

$$s_o y (\text{eng}) = 8000 \times 0,120 = 960 \text{ (más débil)}, \quad s_o y (\text{piñón}) = 12.000 \times 0,093 = 1120.$$

Basar el diseño en el engranaje, que es más débil que el piñón.

Como los diámetros son desconocidos, utilizaremos la siguiente forma de la ecuación de Lewis:

$$s_{\text{real}} = \frac{2TP_d^2}{b\pi y N} \left(\frac{L}{L-b} \right) \leq s_{\text{permitido}}$$

$$\text{donde } T = \frac{12 \times 63.000}{420} = 1800 \text{ lb-pul para el eng. y } L = \frac{N_p}{2P_d} \sqrt{1 + R^2} = \frac{21}{2P_d} \sqrt{1 + (20/7)^2} = \frac{31,8}{P_d}.$$

$$\text{Sea } b = \frac{L}{3} = \frac{31,8}{3P_d} = \frac{10,6}{P_d} \text{ y } \frac{L}{L-b} = \frac{3}{2}. \text{ Entonces } s = \frac{(2)(1800)P_d^2(3)}{(31,8/3P_d)\pi(0,120)(60)(2)} = 22,6P_d^3.$$

Suponiendo un factor de velocidad $\approx \frac{1}{2}$, $s_{\text{permitido}} \approx 8000(\frac{1}{2}) \approx 4000$; $22,6P_d^3 \approx 4000$, $P_d \approx 5$.

Ensayemos un $P_d = 5$. Entonces $D_g = 12$ pul, $V = (12\pi/12)(420) = 1320$ pies/min y

$$s_{\text{permitido}} = 8000 \left(\frac{1200}{1200+1320} \right) = 3810 \text{ psi}, \quad s_{\text{real}} = 22,6(5^3) = 2820 \text{ psi}.$$

Por consiguiente $P_d = 5$ es satisfactorio. $b = 10,6/5 = 2,12$ pul; utilizar $b = 2$ pul.

- (b) Verificar por efectos de desgaste y dinámicos.

$$F_w = 0,75 D_p b K Q / \cos \alpha = (0,75)(4,2)(2)(193)(1,78)/0,945 = 2290 \text{ lb}$$

$$\text{donde } Q = (2)(182)/(22,2+182) = 1,78.$$

$$F_o = \frac{s_o b y \pi}{P_d} \left(\frac{L-b}{L} \right) = \frac{(8000)(2)(0,120)\pi}{5} \left(\frac{6,35-2}{6,35} \right) = 825 \text{ lb}$$

$$F_d = F + \frac{0,05V(Cb+F)}{0,05V + \sqrt{Cb+F}} = 300 + \frac{(0,05)(1320)(400 \times 2 + 300)}{(0,05)(1320) + \sqrt{400 \times 2 + 300}} = 1030 \text{ lb}$$

El diseño es satisfactorio desde el punto de vista del desgaste, puesto que $F_w > F_d$, pero hay que aumentar F_o hasta igualarlo a F_d . Esto se puede llevar a cabo utilizando un paso diametral más pequeño o mejores materiales.

6. Verificar el problema 5 utilizando el procedimiento recomendado por la AGMA y $P_d = 5$.

Solución:

- (a) La potencia indicada desde el punto de vista de la resistencia, para los valores calculados en el problema 5, puede determinarse por la ecuación de la AGMA.

$$HP = \frac{s_n D_p b y \pi (L - 0,5b)}{126.000 P_d L} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right)$$

$$= \frac{(8000)(1200)(4,2)(2)(0,120)(\pi)(6,35 - 1,0)}{(126.000)(5)(6,35)} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{1320}} \right) = 27,8 \text{ HP}$$

- (b) La potencia indicada recomendada por la AGMA, con base en la durabilidad, es

$$HP = 0,8 (C_m C_B b) = (0,8)(0,3)(30,1)(2) = 14,4$$

$$\text{donde } C_m = 0,3, \quad C_B = \frac{D_p^{1,5} n}{233} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right) = \frac{(4,2^{1,5})(1200)}{233} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{1320}} \right) = 30,1, \quad b = 2 \text{ pul}$$

Las ecuaciones anteriores indican que un $P_d = 5$ y una longitud del diente de 2 pul son seguros para transmitir 12 HP, de acuerdo con la AGMA.

7. Dos engranajes cónicos de acero se han diseñado con base en la resistencia, para transmitir 25 HP. Si los engranajes tienen las especificaciones que se indican en seguida, encontrar sus durezas correspondientes para que se satisfaga la recomendación para durabilidad de la AGMA.

	Engranaje	Piñón
Diámetro	8 pulgadas	5,76 pulgadas
s_o	20.000 psi	25.000 psi
Velocidad	900 rpm	1250 rpm
No. de dientes	32	23
Long. del diente	1,5 pulgadas	1,5 pulgadas
P_d	20	20
Forma del diente	$14\frac{1}{2}^\circ$ prof. tot.	$14\frac{1}{2}^\circ$ prof. tot.

Solución:

El material que se requiere es una función de C_m .

$$C_m = \frac{HP}{0,8 C_B b} = \frac{25}{(0,8)(47,75)(1,5)} = 0,4375 \text{ necesario}$$

$$\text{donde } C_B = \left(\frac{D_p^{1,5} n}{233} \right) \left(\frac{78}{78 + \sqrt{V}} \right) = \frac{(5,76^{1,5})(1250)}{233} \left(\frac{78}{78 + \sqrt{1884}} \right) = 47,75.$$

Este material produce una dureza Brinell de 285 para el engranaje y de 325 para el piñón. Estos valores corresponden a un $C_m = 0,5$, según la tabla de factor del material.

8. Dos engranajes cónicos de acero, con dientes compuestos a $14\frac{1}{2}^\circ$, deben transmitir 20 HP con una razón de transmisión de 3. La velocidad del piñón es 1800 rpm. Si los engranajes han sido endurecidos de forma tal que el factor del material es 0,4, determinar el diámetro mínimo probable del piñón, partiendo de la ecuación de la durabilidad de la AGMA.

Solución:

$$HP = 0,8 (C_m C_B b) = 0,8 (0,4) \left(\frac{D_p^{1,5} \times 1800}{233} \right) (V.F.) \frac{D_p}{6} \sqrt{1 + 3^2} = 20$$

Suponer un V. F. (factor de velocidad) $\approx \frac{1}{2}$ y resolver para $D_p \approx 3,94$ pul; tomemos 4 pul.

Entonces $V = \frac{\pi 4}{12} (1800) = 1885$ pies/min y $V.F. = \frac{78}{78 + \sqrt{1885}} = 0,642$ en lugar del valor supuesto $\frac{1}{2}$, que está dentro del límite de seguridad.

PROBLEMAS PROPUESTOS

9. Un piñón cónico de acero fundido ($s_o = 15.000$ psi) tiene un diámetro primitivo de 9 pul y un ángulo primitivo de 30° . El paso diametral es 6 y el piñón gira a 600 rpm. Desde el punto de vista de la resistencia, únicamente, y utilizando las recomendaciones de la AGMA, calcular cuánta potencia puede transmitir el piñón. Calcular también la carga de fatiga F_o . Los dientes son de $14\frac{1}{2}^\circ$ y forma compuesta.
Resp. 18,2 HP, con base en la AGMA, $F_o = 1752$ lb
10. Dos engranajes cónicos de acero conectan dos ejes a 90° . El piñón tiene una dureza Brinell de 300 y el engranaje de 200. Los dientes son de $14\frac{1}{2}^\circ$ y profundidad total y el paso diametral es 8. El piñón tiene 40 dientes y el engranaje 64. La longitud del diente es 1,5 pul. Determinar la carga de desgaste, F_w . *Resp.* $F_w = 916$ lb
11. Dos engranajes cónicos de hierro fundido conectan un par de ejes en ángulo recto y transmiten una fuerza tangencial de 300 lb. Los dientes son de 20° y profundidad total y están cuidadosamente tallados, con un error de 0,001 pul. La velocidad en la línea primitiva es 300 pies/min y la longitud del diente es 2 pul. Calcular la carga dinámica F_d . *Resp.* $F_d = 1820$ lb
12. Un reductor de velocidad en ángulo recto emplea engranajes cónicos endurecidos de acero de aleación, tallados con precisión. La relación de transmisión es 5 a 1 y el piñón gira a 900 rpm, transmitiendo 50 HP. Si los dientes son de 20° y profundidad total y el piñón tiene un diámetro de $4\frac{1}{2}$ pul, ¿cuál debe ser el paso diametral y la longitud del diente, utilizando la ecuación de Lewis? $s_o = 30.000$ psi para ambos engranajes. ¿Qué dureza Brinell se requerirá para que el desgaste sea satisfactorio? Determinar la carga de fatiga, la carga de desgaste y la carga dinámica. *Resp.* $P_d = 10$, $b = 3\frac{3}{4}$ pul, $F_d = 3590$ lb, $F_o = 3050$ lb, $F_w = 3590$ para $K = 145$
13. Dos ejes en ángulo recto deben conectarse por medio de un par de engranajes cónicos de dientes a 20° y profundidad total. La razón de velocidades debe ser $4\frac{1}{2}$ a 1. El piñón debe ser de acero ($s_o = 15.000$ psi) y el engranaje es de semiacero ($s_o = 12.000$ psi). El piñón debe transmitir 5 HP a 900 rpm. Determinar los diámetros mínimos, el paso diametral y la longitud del diente que deben utilizarse, con base únicamente en la resistencia. Luego calcular el diámetro mínimo que se requeriría, según la ecuación de durabilidad de la AGMA, con base en el desgaste. Suponer un factor de material de 0,4.
Resp. Por resistencia: $P_d = 8$, $N_p = 16$, $N_g = 72$, $D_p = 2$ pul, $D_g = 9$ pul. Por desgaste: $D_p = 2.5$ pul
14. Un par de engranajes cónicos de dientes rectos que forman ángulo recto debe transmitir 2 HP a una velocidad del piñón de 1200 rpm. El diámetro del piñón es 3 pul y la relación de velocidades es $3\frac{1}{2}$ a 1. Los dientes son de $14\frac{1}{2}^\circ$ y forma compuesta. Tanto el piñón como el engranaje son de hierro fundido ($s_o = 8000$ psi). Determinar el paso y la longitud del diente, únicamente desde el punto de vista de la resistencia, utilizando la ecuación de Lewis. *Resp.* $P_d = 28$, $b = 1,75$ pul
15. Un par de engranajes cónicos de dientes rectos está hecho de acero SAE 1030 y sus dientes son de 20° y profundidad total. A través de los ejes, situados en ángulo recto, se transmiten 8 HP a una velocidad del piñón de 100 rpm, con una razón de velocidades de 5 a 3. Si el diámetro del piñón es 6 pul, ¿cuál es el mayor número de dientes que se puede utilizar, con base en las ecuaciones de resistencia y de desgaste de la AGMA? Los engranajes han sido tratados térmicamente y tienen una dureza Brinell de 225. Utilizar $C_m = 0,3$.
Resp. $P_d = 16$. Por durabilidad, HP = 10,45

Capítulo 21

Engranaje con tornillo sin fin

EL ENGRANAJE CON TORNILLO SIN FIN se utiliza ampliamente para transmitir potencia con altas relaciones de velocidades entre ejes que no se cortan, los cuales usualmente (pero no necesariamente) forman ángulo recto. La transmisión por tornillo sin fin consta de un tornillo sin fin acoplado a un engranaje, denominado a veces rueda dentada del tornillo sin fin, como se muestra en la figura 21-1. El tornillo puede tener uno, dos, tres o más filetes. El paso axial del tornillo sin fin, P_a , es igual al paso circular del engranaje, P_c . El avance es la distancia que avanza la hélice del tornillo sin fin a lo largo del eje, por cada revolución.

Si desarrollamos una vuelta del tornillo sin fin, ésta forma la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cuya base es igual a la circunferencia primitiva del tornillo y cuya altura es igual al avance del tornillo, como se muestra en la figura 21-2.

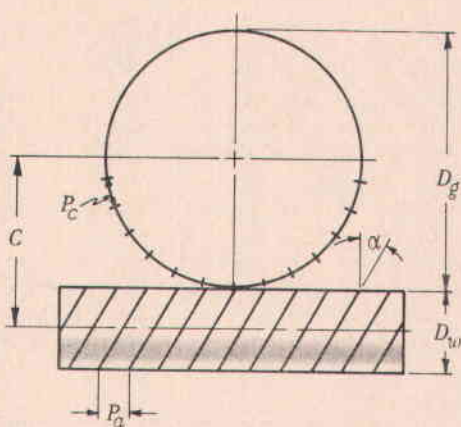


Fig. 21-1

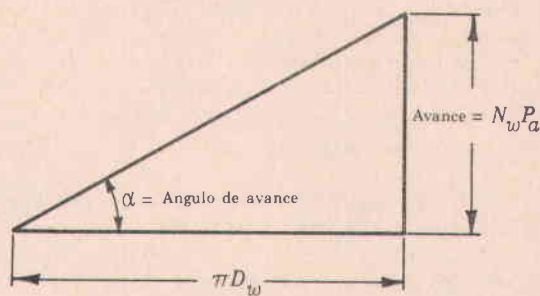


Fig. 21-2

Se observan las siguientes relaciones:

$$\tan \alpha = \frac{\text{avance}}{\pi D_w} = \frac{P_c N_w}{\pi D_w} \quad y \quad \frac{(\text{rpm})_w}{(\text{rpm})_g} = \frac{N_g}{N_w} = \frac{D_g}{D_w \tan \alpha}$$

donde el subíndice g se aplica al engranaje y el subíndice w se aplica al tornillo sin fin.

EL DISEÑO POR RESISTENCIA de la rueda dentada se basa en la ecuación de Lewis,

$$F = s_b y P_{nc} = \frac{s_b y \pi}{P_{nd}}$$

donde $F(\text{lb})$ = carga tangencial permisible, $s(\text{psi})$ = esfuerzo permisible = $s_o \left(\frac{1200}{1200 + V_g} \right)$

$s_o(\text{psi})$ = más o menos 1/3 de la resistencia al fallar, basado en el valor promedio de la concentración de esfuerzos

$V_g(\text{pies/min})$ = velocidad en la línea primitiva del engranaje.

Para engranaje con tornillo sin fin, **LA CARGA DINAMICA**, F_d , puede calcularse por la fórmula

$$F_d = \left(\frac{1200 + V_g}{1200} \right) F$$

donde F = carga tangencial realmente transmitida.

Para el engranaje, **LA CARGA DE FATIGA**, F_o , basada en la ecuación de Lewis es

$$F_o = \frac{s_o b y \pi}{P_{nd}}$$

Para el engranaje con tornillo sin fin, **LA CARGA DE DESGASTE**, F_w , puede calcularse por la fórmula

$$F_w = D_g b B$$

donde D_g = diámetro primitivo del engranaje, en pul

b = longitud del diente del engranaje, en pul

B = constante que depende de la combinación de los materiales utilizados en el tornillo sin fin y en el engranaje, como se indica en la lista que sigue a continuación

Tornillo sin fin	Engranaje	B
Acero endurecido	Hierro fundido	50
Acero, 250 BHN	Bronce fosforado	60
Acero endurecido	Bronce fosforado	80
Acero endurecido	Bronce fosforado templado superficialmente	120
Acero endurecido	Bronce antimonio	120
Hierro fundido	Bronce fosforado	150

Los anteriores valores de B son válidos para ángulos de avance hasta de 10° . Para ángulos comprendidos entre 10° y 25° , B aumenta un 25%. Para ángulos de avances mayores que 25° , B aumenta un 50%.

Lo mismo que para engranajes rectos, helicoidales y cónicos, F_o y F_w son valores permisibles que no deben ser excedidos por la carga dinámica F_d .

LAS ECUACIONES DE LA POTENCIA INDICADA recomendadas por la AGMA se basan en el desgaste y en la capacidad del sistema de engranaje de disipar calor. Desde el punto de vista del desgaste,

$$HP = \frac{n}{R} K Q m \quad (\text{verificación por desgaste})$$

donde HP = potencia de entrada

n = rpm del tornillo sin fin

R = razón de transmisión = $(\text{rpm})_w / (\text{rpm})_g$

K = presión constante que depende de la distancia entre centros, como se indica en la lista que se da

$Q = R / (R + 2.5)$

m = factor de velocidad que depende de la distancia entre centros, de la razón de transmisión y de la velocidad del tornillo sin fin. m puede calcularse por

$$m = \frac{450}{450 + V_w + 3V_w/R}$$

donde V_w = velocidad de la línea primitiva del tornillo sin fin, pies/min

Distancia entre centros C (pul)	K
1	0,0125
2	0,025
3	0,04
4	0,09
5	0,17
6	0,29
7	0,45
8	0,66
9	0,99

Distancia entre centros C (pul)	K
10	1,20
15	4,0
20	8,0
30	29,0
40	66,0
50	120,0
60	200,0
70	320,0
80	320,0

Las recomendaciones adicionales de la AGMA incluyen las siguientes ecuaciones de diseño:

$$D_w \approx \frac{C}{2,2} \approx 3P_c, \quad b \approx 0,73 \times \text{diámetro primitivo del tornillo sin fin}, \quad L \approx P_c \left(4,5 + \frac{N_g}{50} \right)$$

donde D_w = diámetro primitivo del tornillo sin fin, en pul

C = distancia entre el eje del tornillo sin fin y el eje del engranaje, en pul

b = longitud del diente del engranaje, en pul

L = longitud axial del tornillo sin fin, en pul

Estas ecuaciones sirven para calcular aproximadamente las proporciones correctas de este sistema de engranaje.

Con base en las recomendaciones de la AGMA, la potencia indicada límite de entrada de un sistema simple de engranaje con tornillo sin fin para velocidades del engranaje mayores de 200 rpm, puede calcularse, desde el punto de vista de la disipación de calor, por

$$HP = \frac{9,5C^{1,7}}{R + 5} \quad (\text{verificación por calor})$$

donde HP = potencia de entrada permisible

C = distancia entre centros, pul

R = razón de transmisión

Suponiendo que los filetes son cuadrados, la eficiencia de un engranaje con tornillo sin fin puede aproximarse por la fórmula

$$\text{Eficiencia} = \frac{1 - f \tan \alpha}{1 + f / \tan \alpha}$$

donde f = coeficiente de rozamiento

α = ángulo de avance

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un tornillo sin fin de tres filetes tiene un diámetro primitivo de 4 pul y un paso axial de 0,75 pul. Determinar el ángulo de avance, α .

Solución:
$$\tan \alpha = \frac{\text{avance}}{\pi D_w} = \frac{(0,75)(3)}{\pi(4)} = 0,179 \quad \alpha = 10,16^\circ$$

2. Un reductor con sistema de engranaje con tornillo sin fin debe tener una distancia entre centros de 16 pul. ¿Cuál será el diámetro aproximado y el paso axial del tornillo sin fin, de acuerdo con las recomendaciones de la AGMA?

Solución:
$$D_w \approx \frac{C^{0,875}}{2,2} = \frac{16^{0,875}}{2,2} = 5,14 \text{ pul} = 3P_C. \text{ Entonces } P_C \approx \frac{5,14}{3} = 1,71; \text{ utilizar } 1\frac{3}{4} \text{ pul}$$

Los pasos circulares normalizados son: $\frac{1}{8}, \frac{5}{16}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, 1, 1\frac{1}{4}, 1\frac{1}{2}, 1\frac{3}{4}, \text{ y } 2 \text{ pul.}$

3. Un reductor con sistema de engranaje con tornillo sin fin tiene una distancia entre centros de 10 pul y una relación de transmisión de 14. Calcular los caballos de fuerza a la entrada, suponiendo que no hay recalentamiento en el engranaje y que la capacidad de resistencia y de desgaste no se exceden.

Solución:

Desde el punto de vista de la disipación de calor, los caballos de fuerza permisibles a la entrada =

$$\frac{9,5 C^{1,7}}{R+5} = \frac{9,5(10)^{1,7}}{14+5} = 25 \text{ HP}$$

4. Un reductor compuesto de un tornillo sin fin de acero endurecido y de un engranaje de bronce fosforado tiene una relación de transmisión de 40 a 1 y una distancia entre centros de 12 pul. La velocidad del tornillo sin fin es 1500 rpm y su diámetro 4,9 pul. ¿Cuál es la potencia de entrada admisible, desde el punto de vista del desgaste, con base en las ecuaciones de la AGMA?

Solución:

$$\text{HP} = \frac{n}{R} K Q m = 14,5 \text{ HP}$$

donde $n = 1500 \text{ rpm}$, $R = 40$, $K = 2,3$ (hallado por interpolación en la tabla)

$$Q = R/(R+2,5) = 0,94$$

$$m = \frac{450}{450 + V_w + 3V_w/R} = 0,179, \text{ y } V_w = \text{velocidad en la línea primitiva del tornillo sin fin} = \frac{(1500)(4,9\pi)/12}{2\pi} = 1925 \text{ pies/min.}$$

5. Completar el diseño y determinar la capacidad de potencia de entrada de un reductor de velocidades con sistema de engranaje con tornillo sin fin, compuesto de un tornillo sin fin de acero endurecido y de un engranaje de bronce fosforado de dientes "stub" de evolvente a 20° . La distancia entre centros, C , debe ser 8 pul, la razón de transmisión 10 y la velocidad del tornillo sin fin 1750 rpm.

Solución:

(a) Determinar D_w , D_g , P_C , N_w , N_g , α , b , y L .

$D_w \approx C^{0,875}/2,2 = 2,81 \approx 3P_C$. Por tanto $P_C \approx 2,81/3 = 0,94 \text{ pul}$; utilizar un paso normalizado de 1 pul. Entonces, si el diámetro del tornillo sin fin es aproximadamente 3 pul, el diámetro del engranaje D_g será aproximadamente $D_g = 2C - D_w = 2(8) - 3 = 13 \text{ pul}$.

Ahora, $N_g/N_w = 10 = \pi D_g P_C N_w$ o $D_g = 10 P_C N_w / \pi$. Entonces, se puede determinar el valor exacto de D_g para diferentes valores de N_w .

N_w	1	2	3	4	5
D_g	3,19	6,38	9,57	12,76	15,95

Se tomará el diámetro del engranaje igual a 12,76" (cercano a 13") y el diámetro del tornillo sin fin será 3,24", valores cercanos a las proporciones deseadas.

Como el tornillo sin fin es de cuatro filetes, entonces $\tan \alpha = \text{avance}/\pi D_w = (1)(4)/3,24\pi = 0,393$, $\alpha = 21\frac{1}{2}^\circ$. Luego $P_{nC} = P_C \cos \alpha = (1)(\cos 21\frac{1}{2}^\circ) = 0,93''$.

La longitud del diente $b \approx 0,73 D_w = (0,73)(3,24) = 2,4''$; utilizar $2\frac{1}{2}''$.

- (b) Podemos calcular la capacidad del engranaje así:

$$F = sbyP_{nC} = 1830 \text{ lb (carga transmitida de seguridad)}$$

donde $P_{nC} = 0,93''$ (de la parte (a)), $y = 0,146$ (de la tabla de factores de forma), $b = 2\frac{1}{2}''$ (de la parte (a))

y $s = s_o \left(\frac{1200}{1200 + V_g} \right)$, en donde $s_o = 8000 \text{ psi}$ (para bronce fosforado) y $V_g = \pi D_g (\text{rpm})_g / 12 = \pi (12,76) (175) / 12 = 584 \text{ pies/min.}$

Para una carga transmitida $F = 1830 \text{ lb}$, la carga dinámica será aproximadamente $\left(\frac{1200 + V_g}{1200} \right) F = 2720 \text{ lb.}$

Sin embargo, la carga de desgaste permisible es $F_w = D_g b B = 3200 \text{ lb}$, donde $B = (80)(1,25) = 100$ para acero endurecido contra bronce fosforado y un ángulo de avance comprendido entre 10° y 25° . Como la carga dinámica no sobrepasa a la carga de desgaste permisible, sirve de base la carga transmitida de seguridad que se calculó anteriormente. Por tanto, desde el punto de vista de la resistencia y el desgaste del diente, la potencia permisible es

$$\text{HP} = FV_g / 33.000 = (1830)(584) / 33.000 = 32,4 \text{ HP}$$

- (c) Según la fórmula de la AGMA basada en el desgaste, la capacidad de absorber potencia del sistema es

$$\text{HP} = \frac{n}{R} K Q m = 17,5 \text{ HP}$$

donde $n = 1750 \text{ rpm}$, $R = 10$, $K = 0,66$ (de la tabla, para $C = 8''$), $Q = R / (R + 2,5) = 0,8$ y $m = \frac{450}{450 + V_w + 3V_w/R}$ en que $V_w = \pi D_w n / 12 = 1485 \text{ pies/min.}$

- (d) Desde el punto de vista de la disipación de calor, los caballos de fuerza a la entrada pueden calcularse por la fórmula

$$\text{HP} = \frac{9,5 C^{1,7}}{R + 5} = \frac{9,5 (8)^{1,7}}{15} = 21,5 \text{ HP}$$

Los anteriores análisis indican que los caballos de fuerza a la entrada deben limitarse a 17,5, según las recomendaciones de la AGMA basadas en el desgaste.

6. Se debe diseñar un reductor de velocidad para una potencia de entrada de 1 HP y una relación de transmisión de 27. El tornillo sin fin es de acero endurecido y tiene una velocidad de 1750 rpm. La rueda dentada debe ser de bronce fosforado y los dientes deben ser de evolvente a $14\frac{1}{2}^\circ$.

Solución:

- (a) Se necesita escoger por ensayo una distancia entre centros. Supongamos que de una experiencia anterior se sabe que la distancia entre centros para un sistema de este tamaño es, más o menos, 4 pul. Entonces $D_w \approx 4^{0,875} / 2,2 = 1,53 \approx 3P_C$ y $D_g \approx 8 - 1,53 = 6,47''$; estas son las proporciones deseadas.

N_g debe ser un múltiplo de 27, esto es, $\pi(6,47)/P_C = 27, 54, 81$, etc.

Así mismo, $P_C \approx \pi(6,47)/N_g$ debe ser aproximadamente $1/3$ de D_w o sea aproximadamente 0,5.

Para $N_g = 27$, $P_C = 0,75''$. Para $N_g = 54$, $P_C = 0,375''$. Usar $P_C = 0,375''$ y $N_w = 2$.

Entonces $D_g = (0,375)(54)/\pi = 6,45''$, $D_w = (2)(4) - 6,45 = 1,55''$, y la longitud del diente $b \approx (0,73)(1,55) = 1,13''$. Utilizar $b = 1,125''$.

- (b) Verificar el diseño con base en la resistencia y el desgaste del diente. La carga transmitida permisible es

$$F = sbyP_C = 381 \text{ lb}$$

donde $P_C = 0,375''$ (hallado anteriormente), $y = 0,111$ (de la tabla de factor de forma, para 54 dientes de evolvente a $14\frac{1}{2}^\circ$), $b = 1,125''$ (hallado anteriormente) y $s = s_o \left(\frac{1200}{1200 + V_g} \right)$ en que $s_o = 8000 \text{ psi}$ (para bronce fosforado) y $V_g = \pi D_g (\text{rpm})_g / 12 = 109,5 \text{ pies/min.}$

Carga transmitida requerida, $F = (\text{HP transmitidos})(33.000)/V_g = 301 \text{ lb.}$

Carga dinámica calculada $= F\left(\frac{1200 + V_g}{1200}\right) = 301\left(\frac{1200 + 109,5}{1200}\right) = 328 \text{ lb.}$

Carga de desgaste permisible, $F_w = D_g b B = (6,45)(1,125)(80) = 581 \text{ lb.}$

Como la carga de desgaste permisible es mayor que la carga dinámica calculada y la carga transmitida permisible es mayor que la carga transmitida requerida, el diseño es satisfactorio desde el punto de vista de la resistencia y el desgaste de los dientes del engranaje. En efecto, la potencia permisible es

$$F V_g / 33.000 = (344)(109,5) / 33.000 = 1,14 \text{ HP}$$

(c) Verificar la potencia de entrada por medio de la fórmula de la AGMA basada en el desgaste.

$$\text{potencia de entrada} = \frac{n}{R} K Q m = 1,94 \text{ HP}$$

donde $n = 1750 \text{ rpm}$, $R = 27$, $K = 0,09$ (de la tabla, para una distancia entre centros de 4"), $Q = R/(R + 2,5) = 0,915$ y $m = \frac{450}{450 + V_w + 3V_w/R} = 0,364$ en que $V_w = \pi D_w n / 12 = 710 \text{ pies/min.}$

(d) Verificar con base en la disipación de calor. Potencia de entrada permisible =

$$\frac{9,5C^{1,7}}{R + 5} = \frac{(9,5)(4)^{1,7}}{27 + 5} = 3,15 \text{ HP}$$

(e) En resumen:

Potencia admisible	Basada en
1,14 HP	Resistencia y desgaste del diente del engranaje
1,94 HP	Potencia de entrada según la fórmula de la AGMA, basada en el desgaste
3,15 HP	Capacidad de disipar calor

De acuerdo con nuestros cálculos, el reductor diseñado es conveniente para potencias de entrada hasta de 1,4 HP. El reductor debe diseñarse nuevamente para una distancia entre centros ligeramente menor.

PROBLEMAS PROPUESTOS

- Un tornillo sin fin de doble filete tiene un ángulo de avance de 20° . Si el paso es de $1,25''$, ¿cuál es el diámetro del tornillo? Resp. $D_w = 2,19 \text{ pul}$
- Un reductor de velocidades de sistema de engranaje con tornillo sin fin tiene una distancia entre centros de 10 pul . ¿Cuál debe ser el diámetro y el paso axial del tornillo, de acuerdo con las recomendaciones de la AGMA? Resp. $D_w = 3,40 \text{ pul}$, $P_C = 1,25 \text{ pul}$
- Un reductor de velocidades compuesto de un tornillo sin fin de acero endurecido y un engranaje de bronce fosforado tiene una relación de transmisión de 20 a 1. La velocidad del tornillo es 1200 rpm y su diámetro $2,68 \text{ pul}$. ¿Cuál es, aproximadamente, la potencia de entrada permisible, desde el punto de vista de la ecuación de la AGMA basada en el desgaste? Resp. $17,8 \text{ HP}$
- Un reductor de velocidades de sistema de engranaje con tornillo sin fin tiene una distancia entre centros de $8,5 \text{ pul}$ y una razón de transmisión de 20. ¿Cuál es, aproximadamente, la potencia de entrada máxima admisible, para que no haya recalentamiento? Resp. $14,4 \text{ HP}$
- Un tornillo sin fin de acero endurecido transmite potencia a un engranaje de bronce fosforado, con una relación de velocidades de 20 a 1. La distancia entre centros es 15 pulgadas . Determinar el paso circular normalizado y el ángulo de avance, para que las proporciones estén tan cerca como sea posible a las recomendaciones de la AGMA. Resp. $P_C = 1,75 \text{ pul}$, ángulo de avance = $8,15^\circ$
- Un tornillo de acero endurecido gira a 1250 rpm y transmite potencia a un engranaje de bronce fosforado, con una relación de transmisión de 15 a 1. La distancia entre centros es 9 pul . Determinar el diseño restante y calcular la potencia de entrada, desde el punto de vista de la resistencia, la fatiga y la disipación de calor. Los dientes del engranaje son de evolvente a $14\frac{1}{2}^\circ$ y profundidad total.
 Resp. $D_g = 14,3 \text{ pul}$ $b = 2,75 \text{ pul}$
 $D_w = 3,7 \text{ pul}$ $\text{HP} = 15,3$ (resistencia)
 $N_w = 3$ $\text{HP} = 15,2$ (fatiga)
 $N_g = 45$ $\text{HP} = 19,9$ (calor)
 $P_C = 1 \text{ pul}$

Capítulo 22

Cojinetes de rodamientos

INTRODUCCION. La aplicación de los cojinetes de rodamientos implica una selección, montaje, lubricación y protección adecuadas, con el fin de que el funcionamiento de los cojinetes, con las condiciones especificadas, sea satisfactorio.

La selección de un cojinete de rodamientos se hace con base en catálogos. Desafortunadamente, los catálogos de los diferentes fabricantes no emplean, necesariamente, los mismos métodos para seleccionar un cojinete, debido, principalmente, a las diferencias de interpretación de los datos de ensayo y de las condiciones de servicio. Sin embargo, la clasificación de los cojinetes se basa en cierta teoría general que está bosquejada en este capítulo y que modifican las diferentes compañías, de acuerdo con sus propias experiencias.

El montaje de cojinetes se puede hacer con base en uno de los diferentes procedimientos recomendados, y con frecuencia haciendo un control desde el punto de vista económico.

Los cojinetes de rodamientos se llaman también cojinetes antifricción, aunque el rozamiento en dichos cojinetes es comparable al de un cojinete ordinario bien diseñado que opere con condiciones de película gruesa. La decisión sobre qué clase de cojinete se debe emplear, es decir, si se debe utilizar cojinete de rodamientos o un cojinete ordinario, puede tomarse con base en uno o más de los siguientes factores:

- (1) Cuando los momentos de arranque son altos, los cojinetes de rodamientos son más ventajosos, debido a la acción giratoria de las bolas o de los rodillos.
- (2) Los cojinetes de rodamientos no son tan silenciosos como los cojinetes ordinarios, especialmente a altas velocidades de funcionamiento.
- (3) Cuando hay limitaciones de espacio, se prefieren los cojinetes de rodamientos si la dimensión axial es limitada y se prefieren los cojinetes ordinarios si está limitada la dimensión radial, aunque el empleo de un cojinete de collar con el correspondiente tanque de aceite, podría requerir una gran dimensión radial.
- (4) Cuando se desea hacer un aislamiento eléctrico, la película de aceite ayudará a proporcionar el aislamiento.
- (5) Los cojinetes de rodamientos dan una advertencia (haciéndose ruidosos) cuando la falla es inminente, mientras que en los cojinetes ordinarios la falla ocurre repentinamente, siendo más desastrosos los resultados.
- (6) Los cojinetes de rodamientos pueden soportar cargas radiales y axiales combinadas (con excepción de los cojinetes de rodillos rectos).
- (7) Los cojinetes de rodamientos pueden precargarse, si así se desea, con el fin de reducir las deformaciones en los cojinetes y obtener mayor exactitud, como en el caso de las máquinas herramienta.
- (8) El juego debe ser mucho menor en los cojinetes de rodamientos que en los cojinetes ordinarios, a fin de obtener gran exactitud en la colocación de las partes de una máquina, tales como engranajes.
- (9) Los cojinetes de rodamientos pueden engrasarse antes del montaje, con lo cual se evita el mantenimiento posterior. Cuando se utiliza aceite para lubricar cojinetes de rodamientos, el problema de la lubricación generalmente es mucho más sencillo que el que se presenta con cojinetes ordinarios. La falla del sistema de lubricación de un cojinete de rodamientos no es calamitosa, como podría serlo en el caso de un cojinete ordinario.
- (10) Los cojinetes de rodamientos pueden soportar altas sobrecargas por períodos cortos.

EL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO en los cojinetes de rodamientos varía con la velocidad, la carga, la cantidad de lubricación, el montaje y la temperatura de funcionamiento. Se puede utilizar un coeficiente constante para hacer cálculos aproximados con condiciones de lubricación favorables, llamadas condiciones normales de funcionamiento.

Los valores enumerados a continuación son los que recomienda la SKF:

$f = 0,0010$ para cojinetes autoalineantes (carga radial)

$f = 0,0011$ para cojinetes de rodillos cilíndricos con rodillos cortos para guía de brida (carga radial)

$f = 0,0013$ para cojinetes de bolas para empuje axial (carga de empuje axial)

$f = 0,0015$ para cojinetes de una hilera de bolas (carga radial)

$f = 0,0018$ para cojinetes de rodillos esféricos (carga radial)

$f = 0,0018$ para cojinetes de rodillos cónicos

Los coeficientes de rozamiento ocasionados por el uso de aceites de alta viscosidad, una lubricación mayor que la óptima o el empleo de cojinetes nuevos, serán mayores que los que se enumeraron anteriormente. El rozamiento por cierre no debe ignorarse. Los valores del coeficiente de rozamiento hallados en pruebas por la New Departure varían desde 0,0005 hasta 0,003, con un promedio de más o menos 0,001.

Debe señalarse que un montaje incorrecto, como ocurriría cuando la interferencia entre el eje y el interior del anillo del cojinete es mayor que la recomendada por los fabricantes, puede causar una excesiva ligazón y excesivo rozamiento.

El momento de rozamiento está dado por

$$M_t = Ff(D/2)$$

donde M_t = momento de rozamiento, en lb-pul; F = carga radial o axial, según se especifique, en lb; f = coeficiente de rozamiento; D = diámetro interno del cojinete. (En la práctica es usual referir la fuerza de rozamiento al diámetro interno del cojinete o al diámetro del eje.)

LA CAPACIDAD ESTÁTICA DE LOS COJINETES depende de las condiciones subsiguientes a la aplicación de la carga estática, así como también de las dimensiones físicas. La capacidad estática de un cojinete que no *gira* después de aplicada la carga estática será mucho mayor que la de un cojinete que sí gire; las cargas muy pequeñas producirán deformaciones permanentes en el cuerpo rodante y en el camino de rodadura, que impiden el funcionamiento silencioso a altas velocidades, aunque el valor del rozamiento no se afecta apreciablemente ni el cojinete se avería.

En la figura 22-1 se muestra un cojinete liviano, uno mediano y uno pesado, que tienen el mismo diámetro interior.

El primer trabajo sobre la capacidad estática de los cojinetes, hecho por Stribeck, sirvió por muchos años como base para hallar la capacidad de los cojinetes. Posteriores experiencias y datos de ensayos dieron informaciones adicionales, tales como las capacidades adecuadas de los cojinetes. Finalmente Palmgren hizo algunas modificaciones que a su vez fueron modificadas por la Anti-Friction Bearing Manufacturers Association (AFBMA) para adaptar las condiciones dinámicas. El trabajo de Stribeck sirve aún como base de la capacidad estática de los cojinetes.

La ecuación de Stribeck para la capacidad estática C_o , para cojinetes de bolas, es

$$C_o = \frac{KZD^2}{5}$$

donde K es una constante que depende del diámetro de las bolas; Z = número de bolas; D = diámetro de las bolas. La ecuación de la capacidad estática de un cojinete de rodillos rectos es

$$C_o = \frac{KZDL}{5}$$

donde K = una constante; Z = número de rodillos; D = diámetro de los rodillos; L = longitud de los rodillos.

Las siguientes definiciones y datos empleados en el método para evaluar las capacidades de carga estática de cojinetes de bolas radiales, se tomaron de la AFBMA Standards — *Methods of Evaluat-*

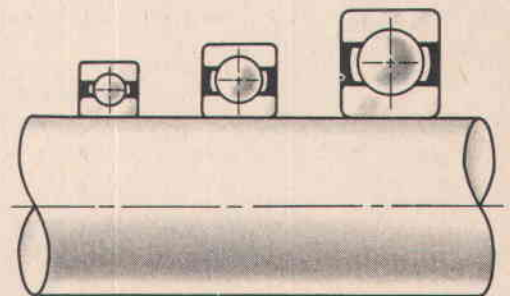


Fig. 22-1

ing Load Ratings of Ball Bearings, publicados por la Anti-Friction Bearing Manufacturers Association Inc. y reproducidos con su permiso.

I. METODO PARA EVALUAR LAS CAPACIDADES DE CARGA ESTATICA DE COJINETES DE BOLAS RADIALES

A. Definiciones

- (1) La *carga estática* se define como la carga que actúa sobre un cojinete que no gira.
- (2) Bajo la acción de cargas estáticas de magnitud moderada aparecen deformaciones permanentes en las bolas y en los anillos de rodadura, que aumentan gradualmente cuando la carga disminuye. Por consiguiente, la carga estática permisible depende de la magnitud permisible de la deformación permanente.

La experiencia demuestra que una deformación permanente de 0,0001 del diámetro de las bolas, producida en la bola más cargada y en los puntos de contacto de los anillos de rodadura con ésta, se puede tolerar en la mayor parte de las aplicaciones de los cojinetes, sin menoscabo del funcionamiento del cojinete.

En ciertas aplicaciones, donde la rotación del cojinete es lenta y los requerimientos de lisura y rozamiento no son demasiado exactos, se puede permitir una deformación permanente mucho mayor. Así mismo, cuando se necesita una lisura extrema o los requerimientos de rozamiento son críticos, la deformación permanente total que se puede tolerar es menor.

Con el fin de establecer capacidades comparativas, la *capacidad de base estática* se define como la carga estática radial que corresponde a una deformación permanente total de 0,0001 del diámetro de las bolas, que se produce en la bola más cargada y en los puntos de contacto de los anillos de rodadura con ésta.

En cojinetes de una hilera de bolas con contacto angular, la capacidad de base estática se relaciona con la componente radial de la carga de base estática, la cual produce un desplazamiento permanente radial de los anillos del cojinete, uno respecto al otro.

- (3) La *carga estática equivalente* se define como la carga estática radial que si se aplica, produce la misma deformación permanente total en la bola más cargada y en los puntos de contacto de los anillos con ésta, que causaría la condición real de carga.

B. Cálculo de la capacidad de base estática y de la carga estática equivalente

- (1) **Capacidad de base estática:** La magnitud de la capacidad de base estática C_0 es

$$C_0 = f_0 i Z D^2 \cos \alpha$$

donde i = número de hileras de bolas de un cojinete cualquiera

α = ángulo nominal de contacto = ángulo nominal comprendido entre la línea de acción de la carga sobre la bola y un plano perpendicular al eje del cojinete

Z = número de bolas por hilera

D = diámetro de las bolas

En la tabla I-1 se dan los valores del factor f_0 para diferentes clases de cojinetes, tal como se diseñan y se fabrican comúnmente, contruidos de acero endurecido.

Tabla I-1
Factor f_0

Tipo de cojinete	f_0	
	Unidades kg, mm	Unidades libra, pulgada
Cojinetes de bolas autoalineantes	0,34	484
Cojinetes de bolas con surco de contacto radial y angular	1,25	1780

- (2) **Carga estática equivalente:** Para cojinetes sometidos a cargas radiales y axiales combinadas, la magnitud de la carga estática equivalente P_0 es la mayor de

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a$$

$$P_0 = F_r$$

donde X_O = factor radial F_r = carga radial
 Y_O = factor axial F_a = carga de empuje axial

Los valores de X_O y Y_O se dan en la tabla I-2.

Tabla I-2
Factores X_O y Y_O

Tipo de cojinete	Cojinetes de una hilera ⁽¹⁾		Cojinetes de doble hilera ⁽³⁾	
	X_O	Y_O	X_O	Y_O
Cojinetes de bolas con surco de contacto radial ⁽¹⁾	0,6	0,5	0,6	0,5
Cojinetes de bolas con surco de contacto angular ⁽²⁾	$\alpha = 20^\circ$	0,42	1	0,84
	$\alpha = 25^\circ$	0,38	1	0,76
	$\alpha = 30^\circ$	0,33	1	0,66
	$\alpha = 35^\circ$	0,29	1	0,58
	$\alpha = 40^\circ$	0,26	1	0,52
Cojinetes de bolas autoalineantes	0,5	$0,22 \cot \alpha$	1	$0,44 \cot \alpha$

Notas: (1) P_O es siempre $\geq F_r$.

(2) Para dos cojinetes similares de una hilera de bolas con contacto angular, montados "cara a cara" o "espalda contra espalda", utilizar los valores de X_O y Y_O que se aplican a un cojinete de dos hileras de bolas con contacto angular. Para dos o más cojinetes similares de una sola hilera de bolas con contacto angular montados "uno tras otro", utilizar los valores de X_O y Y_O que se aplican a un cojinete de una hilera de bolas con contacto angular.

(3) Se supone que los cojinetes de doble hilera son simétricos.

(4) El valor máximo permisible de F_a/C_O depende del diseño del cojinete (profundidad del surco y juego interno).

LA CAPACIDAD DINAMICA DE UN COJINETE se basa en la resistencia a la fatiga del material, que contrasta con la capacidad estática que se basa en la deformación permanente. *Es importante observar que, en general, un cojinete que gira a baja velocidad tiene una capacidad normal más alta que la capacidad normal estática, ya que la deformación permanente que tiene lugar se distribuye más uniformemente; en consecuencia, con rotación se puede tolerar una mayor cantidad de deformación permanente.*

La duración de un cojinete puede definirse en función de las horas de rotación a cierta velocidad o bien en función del número de revoluciones. Es necesario definir la duración en función del funcionamiento de un grupo de cojinetes, ya que la duración de un cojinete en particular no puede predecirse. Los cojinetes están clasificados de acuerdo con dos bases, según el fabricante:

- (1) La duración media de un grupo de cojinetes.
- (2) La duración alcanzada o sobrepasada por el 90% de los cojinetes. Las capacidades normales dadas por la AFBMA se basan en la duración alcanzada o sobrepasada por el 90% de los cojinetes de un grupo.

La mayor duración de un cojinete particular rara vez es mayor que 4 veces la duración media. La duración alcanzada o sobrepasada por el 50% de un grupo de cojinetes es aproximadamente 5 veces la duración alcanzada o sobrepasada por el 90% de los cojinetes. La duración máxima de un cojinete particular es alrededor de 30 ó 50 veces la duración mínima. Así, cuando para un cojinete particular, la confiabilidad y la seguridad son esenciales, se deben utilizar factores de seguridad más grandes, puesto que no hay forma de predecir qué tan lejos estará la duración de este cojinete de la duración media.

La capacidad de base dinámica de un cojinete C se define como la carga radial constante que puede soportar un cojinete radial (o la carga axial constante que puede soportar un cojinete de empuje axial) para que la duración mínima sea de 1.000.000 de revoluciones (que es el equivalente a

500 horas de funcionamiento a una velocidad de 33,3 rpm); la duración mínima es la duración alcanzada o sobrepasada por el 90% de cojinetes de un grupo. La capacidad de base dinámica se basa en el hecho que el anillo interno gira y el exterior es estacionario. (Obsérvese que la duración media correspondería, entonces, a 5.000.000 de revoluciones, es decir, a 2500 horas de funcionamiento a 33,3 rpm.)

La información sobre el método para evaluar las capacidades de carga dinámica en cojinetes radiales de bolas, suministrada por la Anti-Friction Bearing Manufacturers Association, Inc. y reproducida aquí con su permiso, da las definiciones, los métodos de calcular las capacidades de base dinámicas, la duración nominal, la carga equivalente y las constantes necesarias para cojinetes radiales de bolas, que se escogieron para ilustrar los procedimientos empleados en la clasificación de cojinetes. La AFBMA ha preparado informaciones análogas de otros cojinetes, que no se incluyen aquí. Obsérvese que la información puede utilizarse para determinar la capacidad básica de carga de un cojinete dado, pero la selección de un cojinete requiere la tabulación de los resultados obtenidos de una serie de cojinetes, ya que los diámetros de las bolas y los números de bolas varían.

II. METODO PARA EVALUAR LAS CAPACIDADES DE BASE DINAMICAS EN COJINETES DE BOLAS RADIALES

A. Definiciones

- (1) La *duración* de un cojinete de bolas individual se define como el número de revoluciones (u horas de funcionamiento a una velocidad constante dada) que puede efectuar un cojinete antes que aparezca la primera evidencia de fatiga en el material de los anillos o en cualquiera de los elementos rodantes.
- (2) La *duración nominal* de un grupo de cojinetes de bolas aparentemente idénticos se define como el número de revoluciones (u horas de funcionamiento a una velocidad constante dada) que alcanzan o sobrepasan el 90% de cojinetes del grupo antes que aparezcan signos de fatiga. Como se determinará en seguida, la duración alcanzada o superada por el 50% de los cojinetes del grupo es aproximadamente cinco veces la duración nominal.
- (3) La *capacidad básica de carga* es la carga radial estacionaria constante que un grupo de cojinetes de bolas aparentemente idénticos con el anillo exterior estacionario, pueden aguantar, para una duración nominal del anillo interior de un millón de revoluciones. En cojinetes de una hilera de bolas con contacto angular, la capacidad básica de carga se refiere a la componente radial de la carga, la cual causa un desplazamiento puramente radial de un anillo del cojinete respecto al otro.
- (4) Cuando se dan las capacidades de carga para velocidades específicas, se deben basar en una duración nominal de 500 horas.
- (5) La *carga equivalente* se define como la carga radial estacionaria y constante que aplicada a un cojinete con el anillo interior giratorio y el exterior estacionario, producirá la misma duración que alcanzaría el cojinete sometido a las condiciones reales de carga y de rotación.

B. Cálculo de la capacidad básica de carga, la duración nominal y la carga equivalente

- (1) De tiempo en tiempo se deben revisar estas recomendaciones, debido a los adelantos y nuevos desarrollos.
- (2) **Capacidad básica de carga:** La magnitud de la capacidad básica de carga C , para cojinetes de bolas con contacto angular y radial (excepto para cojinetes con rebaje para rellenado), con bolas cuyo diámetro no sea mayor de 25,4 mm (1 pulgada), es

$$C = f_c (i \cos \alpha)^{0,7} Z^{2/3} D^{1,8};$$

Cuando los diámetros de las bolas son mayores que 25,4 mm y las unidades utilizadas son kg y mm,

$$C = f_c (i \cos \alpha)^{0,7} Z^{2/3} 3,647 D^{1,4};$$

Cuando los diámetros de las bolas son mayores que 1 pul y las unidades utilizadas son lb y pul,

$$C = f_c (i \cos \alpha)^{0,7} Z^{2/3} D^{1,4}$$

donde i = número de hileras de bolas en un cojinete cualquiera

α = ángulo nominal de contacto = ángulo nominal comprendido entre la línea de acción de la carga sobre la bola y un plano perpendicular al eje del cojinete

Z = número de bolas por hilera

D = diámetro de las bolas

f_c = factor que depende de las unidades utilizadas, de la geometría de los componentes del cojinete, de la exactitud con que se han fabricado las partes del cojinete y del material empleado

Los valores de f_c se obtienen multiplicando los valores de f_c/f , tomados de la columna apropiada de la tabla II-1, por un factor f , señalado en el apéndice 1.

Tabla II-1

Factor $\frac{f_c}{f}$

$\frac{D \cos \alpha}{d_m}^{(1)}$	$\frac{f_c}{f}$		
	Cojinetes de bolas de una hilera con surco para contacto radial y cojinetes de bolas de una y de doble hilera con surco para contacto angular (2)	Cojinetes de bolas de doble hilera con surco para contacto radial	Cojinetes de bolas autoalineantes
0,05	0,476	0,451	0,176
0,06	0,500	0,474	0,190
0,07	0,521	0,494	0,203
0,08	0,539	0,511	0,215
0,09	0,554	0,524	0,227
0,10	0,566	0,537	0,238
0,12	0,586	0,555	0,261
0,14	0,600	0,568	0,282
0,16	0,608	0,576	0,303
0,18	0,611	0,579	0,323
0,20	0,611	0,579	0,342
0,22	0,608	0,576	0,359
0,24	0,601	0,570	0,375
0,26	0,593	0,562	0,390
0,28	0,583	0,552	0,402
0,30	0,571	0,541	0,411
0,32	0,558	0,530	0,418
0,34	0,543	0,515	0,420
0,36	0,527	0,500	0,421
0,38	0,510	0,484	0,418
0,40	0,492	0,467	0,412

Notas: (1) d_m denota el diámetro primitivo del juego de bolas. Para valores de $\frac{D \cos \alpha}{d_m}$ diferentes a los dados en la tabla, f_c/f se obtiene por interpolación lineal.

- (2) a. Cuando se calcula la capacidad básica de carga de una unidad que consta de dos cojinetes similares de una hilera de bolas con contacto radial, en un montaje doble, la pareja se considera como un cojinete de dos hileras de bolas con contacto radial.
- b. Cuando se calcula la capacidad básica de carga de una unidad que consta de dos cojinetes similares de una hilera de bolas con contacto angular, colocados "cara a cara" o "espalda contra espalda", en un montaje doble, la pareja se considera como un cojinete de dos hileras de bolas con contacto angular.
- c. Cuando se calcula la capacidad básica de carga de una unidad que consta de dos o más cojinetes similares de una hilera de bolas con contacto angular, montados "uno tras otro", y fabricados y montados de modo que la distribución de carga sea uniforme, la capacidad de la combinación es igual al número de cojinetes elevado a una potencia igual a 0,7 veces la capacidad de uno solo de los cojinetes. Si por alguna razón técnica, la unidad se puede tratar como un número de cojinetes intercambiables individuales de una hilera de bolas, la nota (2)c no se aplica.

- (3) **Duración nominal:** La magnitud aproximada de la duración nominal L para cojinetes de bolas (excepto para cojinetes de rebaje para rellenado) es

$$L = (C/P)^3 \text{ millones de revoluciones}$$

donde P = carga equivalente.

- (4) **Carga equivalente:** La magnitud de la carga equivalente P para cojinetes de bolas con contacto radial y angular de tipos convencionales (excepto para cojinetes de rebaje para rellenado) sometidos a una combinación de carga radial constante y carga de empuje axial constante, es

$$P = XVE_r + YF_a$$

donde X = factor radial Y = factor axial F_a = carga de empuje axial
 V = factor de rotación E_r = carga radial

Los valores de X , V y Y se dan en la tabla II-2. El factor V se utiliza como medida de precaución, debido a la escasez de evidencias experimentales.

Tabla II-2
Factores X , V y Y

Tipo de cojinete			Con relación a la carga el anillo interior está		Cojinetes de una sola hilera ⁽²⁾		Cojinetes de doble hilera ⁽³⁾				e
			Girando	Fijo	$\frac{F_a}{VF_r} > e$		$\frac{F_a}{VF_r} \leq e$		$\frac{F_a}{VF_r} > e$		
					X	Y	X	Y	X	Y	
Cojinetes de bolas con surco para contacto radial ⁽⁴⁾	$\frac{F_a^{(1)}}{C_0}$	$\frac{F_a}{iZD^2}$ Unidades lb, pul	1	1,2	0,56	2,30 1,99 1,71 1,55 1,45 1,31 1,15 1,04 1,00	1	0	0,56	2,30 1,99 1,71 1,55 1,45 1,31 1,15 1,04 1,00	0,19 0,22 0,26 0,28 0,30 0,34 0,38 0,42 0,44
Cojinetes de bolas con surco para contacto angular, con ángulo de contacto ⁽⁴⁾ : 5°	$\frac{iF_a^{(1)}}{C_0}$	$\frac{F_a}{ZD^2}$ Unidades lb, pul	1	1,2	Para este tipo, utilizar los valores de X, Y y e aplicables a los cojinetes de una hilera con contacto radial	1	2,78 2,40 2,07 1,87 1,75 1,58 1,39 1,26 1,21	0,78	3,74 3,23 2,78 2,52 2,36 2,13 1,87 1,69 1,63	0,23 0,26 0,30 0,34 0,36 0,40 0,45 0,50 0,52	
10°	0,014 0,029 0,057 0,086 0,11 0,17 0,29 0,43 0,57	25 50 100 150 200 300 500 750 1000	1	1,2	0,46	1,88 1,71 1,52 1,41 1,34 1,23 1,10 1,01 1,00	1	2,18 1,98 1,76 1,63 1,55 1,42 1,27 1,17 1,16	0,75	3,06 2,78 2,47 2,29 2,18 2,00 1,79 1,64 1,63	0,29 0,32 0,36 0,38 0,40 0,44 0,49 0,54 0,54
15°	0,015 0,029 0,058 0,087 0,12 0,17 0,29 0,44 0,58	25 50 100 150 200 300 500 750 1000	1	1,2	0,44	1,47 1,40 1,30 1,23 1,19 1,12 1,02 1,00 1,00	1	1,65 1,57 1,46 1,38 1,34 1,26 1,14 1,12 1,12	0,72	2,39 2,28 2,11 2,00 1,93 1,82 1,66 1,63 1,63	0,38 0,40 0,43 0,46 0,47 0,50 0,55 0,56 0,56
20°			1	1,2	0,43	1,00	1	1,09	0,70	1,63	0,57
25°			1	1,2	0,41	0,87	1	0,92	0,67	1,41	0,68
30°			1	1,2	0,39	0,76	1	0,78	0,63	1,24	0,80
35°			1	1,2	0,37	0,66	1	0,66	0,60	1,07	0,95
40°			1	1,2	0,35	0,57	1	0,55	0,57	0,93	1,14
Cojinetes de bolas autoalineantes			1	1	0,40	0,4 cot α	1	0,42 cot α	0,65	0,65 cot α	1,5 tan α

Notas: (1) C_O es la capacidad de carga estática.

(2) Para cojinetes de una sola hilera, utilizar $X = 1$ y $Y = 0$ cuando $\frac{F_a}{VF_r} \leq e$.

Dos cojinetes similares de una hilera de bolas con contacto angular montados "cara a cara" o "espalda contra espalda" se consideran como un cojinete de doble hilera con contacto angular.

Para dos o más cojinetes similares de una hilera de bolas montados "uno tras otro", utilizar los valores de X , Y y e que se aplican a un solo cojinete. Cuando α es menor de 20° , F_r y F_a no son las cargas totales sino las cargas por cada uno de los cojinetes. C_O e i también se refieren a un solo cojinete.

(3) Se supone que los cojinetes de doble hilera son simétricos.

(4) El máximo valor permisible de F_a/C_O depende del diseño del cojinete.

(5) Los valores de X , Y y e para cargas o ángulos de contacto diferentes de los indicados en la tabla II-2, se obtienen por interpolación lineal.

(5) Estas normas están limitadas a los cojinetes en que el radio de la sección transversal de los anillos no es mayor que:

En los anillos internos de cojinetes de bolas con contacto angular y surcos profundos: 52% del diámetro de las bolas.

En los anillos exteriores de cojinetes de bolas con contacto angular y surcos profundos: 53% del diámetro de las bolas.

En los anillos internos de cojinetes de bolas autoalineantes: 53% del diámetro de las bolas.

La capacidad de carga no se aumenta por el empleo de radios de surco menores, pero sí se reduce por el empleo de radios mayores que los indicados antes.

Apéndice 1. Un valor recomendado del factor f , que se basa en pruebas corrientes efectuadas a cojinetes de bolas de buena calidad (cojinetes de bolas de acero endurecido) es

$f = 10$ cuando las unidades utilizadas son kg y mm

$f = 7450$ cuando las unidades utilizadas son lb y pul

III. METODO PARA EVALUAR LAS CAPACIDADES DE CARGA DINAMICA EN COJINETES DE BOLAS QUE TIENEN LOS RADIOS DE LA SECCION TRASVERSALE DE LOS ANILLOS IGUALES AL 57% DEL DIAMETRO DE LAS BOLAS

A. Las definiciones están dadas en el numeral II A.

B. Cálculo de la capacidad básica de carga, la duración nominal y la carga equivalente

(1) De tiempo en tiempo se deben revisar estas recomendaciones debido a los adelantos y a los nuevos desarrollos.

(2) **Capacidad básica de carga:** La magnitud de la capacidad básica de carga C , para cojinetes de bolas con contacto radial y angular es

$$C = f_c (i \cos \alpha)^{0.7} Z^{2/3} D^{1.8}$$

donde i , α , Z , D y f_c están definidos en la misma forma que en el numeral II B.

Los valores de f_c se obtienen multiplicando el valor de f_c/f , tomado de la columna apropiada de la tabla III-1, por un factor f , indicado en el apéndice 1 de la sección II.

(3) **Duración nominal:** La magnitud aproximada de la duración nominal L , para cojinetes de bolas, es

$$L = (C/P)^3 \text{ millones de revoluciones}$$

donde P = carga equivalente.

(4) **Carga equivalente:** La magnitud de la carga equivalente P , para cojinetes de bolas con contacto radial y angular de tipo convencional, sometidos a una combinación de carga radial constante y carga de empuje axial constante es

$$P = XVF_r + YF_a$$

Tabla III-1

Factor $\frac{f_c}{f}$

$D \cos \alpha$ (1)	$\frac{f_c}{f}$
d_m	Cojinetes de bolas con surco para contacto radial y angular (2)
0,05	0,296
0,06	0,311
0,07	0,324
0,08	0,335
0,09	0,344
0,10	0,352
0,12	0,364
0,14	0,373
0,16	0,378
0,18	0,380
0,20	0,380
0,22	0,378
0,24	0,373
0,26	0,368
0,28	0,362
0,30	0,355
0,32	0,347
0,34	0,337
0,36	0,327
0,38	0,317
0,40	0,306

Las notas (1) y (2) dadas a continuación de la tabla II-1 se aplican también a la tabla III-1.

Tabla III-2
Factores X , Y y e

Tipo de cojinete		Cojinetes de una hilera ⁽¹⁾		Cojinetes de doble hilera ⁽³⁾				e
		$\frac{F_a}{VF_r} > e$		$\frac{F_a}{VF_r} \leq e$		$\frac{F_a}{VF_r} > e$		
		X	Y	X	Y	X	Y	
Rodamientos de bolas con surco para contacto radial	$\frac{F_a}{iZD^2}$ Unidades lb-pul	0,56	3,09 2,77 2,43 2,23 2,10 1,92 1,71 1,56 1,44	1	0	0,56	3,09 2,77 2,43 2,23 2,10 1,92 1,71 1,56 1,44	0,09 0,12 0,14 0,15 0,16 0,18 0,21 0,23 0,24
	25							
	50							
	100							
	150							
	200							
	300							
	500							
	750							
	1000							
Cojinetes de bolas con surco para contacto angular, con ángulo de contacto: 5°	$\frac{F_a}{ZD^2}$ Unidades lb-pul	Para este tipo, utilizar los valores de X, Y y e aplicables a los cojinetes de una hilera con contacto radial		1	3,69 3,30 2,89 2,66 2,50 2,29 2,04 1,86 1,72	0,78	5,02 4,49 3,94 3,63 3,41 3,12 2,78 2,53 2,35	0,17 0,19 0,22 0,24 0,25 0,27 0,31 0,34 0,36
	25							
	50							
	100							
	150							
	200							
	300							
	500							
	750							
	1000							
10°	25	0,46	2,20	1	2,55	0,75	3,58	0,25
	50		2,09		2,41		3,39	0,26
	100		1,94		2,24		3,14	0,28
	150		1,84		2,13		2,99	0,29
	200		1,77		2,04		2,87	0,31
	300		1,66		1,92		2,69	0,33
	500		1,53		1,77		2,49	0,35
	750		1,44		1,66		2,33	0,38
	1000		1,36		1,57		2,21	0,40
15°	25	0,44	1,55	1	1,74	0,72	2,52	0,35
	50		1,51		1,70		2,46	0,36
	100		1,48		1,66		2,41	0,36
	150		1,42		1,59		2,31	0,38
	200		1,39		1,56		2,25	0,39
	300		1,34		1,50		2,17	0,41
	500		1,26		1,42		2,05	0,43
	750		1,20		1,35		1,96	0,45
	1000		1,16		1,30		1,88	0,47
20°		0,43	1,14	1	1,25	0,70	1,86	0,50
25°		0,41	0,95	1	1,00	0,67	1,55	0,62
30°		0,39	0,81	1	0,83	0,63	1,31	0,75
35°		0,37	0,69	1	0,69	0,60	1,12	0,91
40°		0,35	0,60	1	0,58	0,57	0,97	1,08

donde X = factor radial
 V = factor de rotación = 1,0 si el anillo interno gira con relación a la carga
 = 1,2 si el anillo interno es estacionario con relación a la carga
 Y = factor axial F_r = carga radial F_a = carga de empuje axial

Los valores de X y Y se dan en la tabla III-2. El factor V se utiliza como medida de precaución, debido a la escasez de evidencias experimentales.

Notas: (1) Para cojinetes de una sola hilera utilizar $X = 1$ y $Y = 0$, cuando $\frac{F_a}{V F_r} \leq e$.

Dos cojinetes similares de una hilera de bolas con contacto angular montados "cara a cara" o "espalda contra espalda" se consideran como un cojinete de doble hilera con contacto angular.

Para dos o más cojinetes similares de una hilera de bolas, montados "uno tras otro", utilizar los valores de X , Y y e que se aplican a un solo cojinete. Cuando α es menor de 20° , F_r y F_a no son las cargas totales, sino las cargas por cada uno de los cojinetes.

- (2) La máxima carga de empuje axial permisible depende de la geometría del cojinete.
- (3) Se supone que los cojinetes de doble hilera son simétricos.
- (4) Los valores de X , Y y e para cargas o ángulos de contacto diferentes a los que se indican en la tabla III-2, se obtienen por interpolación lineal.
- (5) Estas normas están limitadas a los cojinetes en los cuales los surcos de los anillos tienen un radio de 57% del diámetro de las bolas.

Para condiciones de carga variable, la **CARGA EQUIVALENTE** está dada por la carga media cúbica o carga media efectiva F_m , que produce la misma duración que las cargas variables. En seguida se indican diferentes expresiones de la carga media cúbica F_m .

Si las cargas son constantes por períodos,

$$F_m = \sqrt[3]{\frac{\sum F^3 N}{L_n}} = \sqrt[3]{\frac{F_1^3 N_1 + F_2^3 N_2 + F_3^3 N_3 + \dots}{L_n}}$$

donde F_m = carga media cúbica, en lb
 F = fuerza que actúa durante N revoluciones, en lb
 L_n = número total de revoluciones para el cual se calcula la carga media cúbica F_m
 F_1, F_2, F_3 = cargas que actúan durante N_1, N_2 y N_3 revoluciones, respectivamente.

Si las cargas son variables,

$$F_m = \sqrt[3]{\frac{\int_0^{L_n} F^3 dN}{L_n}}$$

donde F = carga ejercida en un número arbitrario de revoluciones
 N = número variable de revoluciones
 L_n = duración alcanzada con la carga media cúbica, en revoluciones.

Si la velocidad de rotación es constante y la carga varía con el tiempo,

$$F_m = \sqrt[3]{\frac{\sum F^3 t}{T}} = \sqrt[3]{\frac{\int_0^T F^3 dt}{T}}$$

donde F = fuerza ejercida en un instante cualquiera, t
 T = tiempo que gasta un ciclo de la variación de carga

Si la carga es constante y la velocidad varía, se puede utilizar la velocidad promedio, puesto que en los cojinetes la fatiga se presenta después de un cierto número de repeticiones del esfuerzo.

El efecto dinámico es una cantidad adicional que se debe tener en cuenta. Los factores recomendados por la SKF para multiplicar la carga equivalente, con base en que las cargas son constantes, varían entre 1 y 3,5, según la aplicación de los cojinetes.

SELECCION DE UN COJINETE. Digamos unas palabras generales de advertencia con respecto a la selección de un cojinete. Como todos los fabricantes de cojinetes interpretan sus propios datos de una manera diferente y emplean diferentes bases de clasificación,

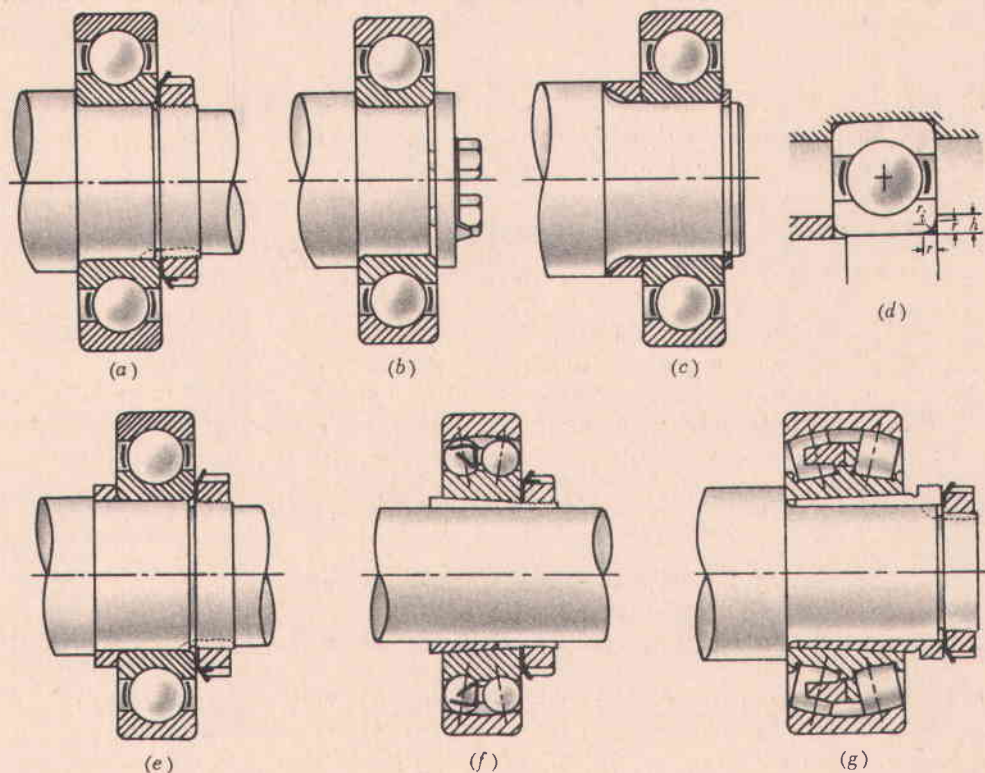
es necesario que el diseñador esté completamente familiarizado con los procedimientos descritos en el catálogo que esté utilizando. Se presentan variaciones individuales, tales como la interpretación de la duración de un grupo de cojinetes. [La *New Departure* basa sus capacidades en la duración *media* probable de un cojinete de 3800 horas y emplea una velocidad base de 1000 rpm. La conversión de la capacidad del catálogo de 3800 horas y 1000 rpm a otra duración (en horas) y otra velocidad (rpm) está dada por

$$\text{Duración deseada (en horas)} = (3800 \text{ hr}) \left(\frac{1000 \text{ rpm}}{N} \right) \left(\frac{\text{capacidad según catálogo a 1000 rpm, lb}_4}{F} \right)^4$$

donde N está expresada en rpm y F es la carga real, en lb.]

LA INSTALACION DE COJINETES DE RODAMIENTOS tiene muchas variaciones. El diseñador debe afrontar, generalmente, el problema de seleccionar una de las muchas posibles variaciones, tomando en cuenta el costo, la facilidad de montaje y desmontaje, la confiabilidad y el ajuste. No existen reglas fijas para determinar el tipo específico de cojinete que se debe emplear en una aplicación dada o en un tipo de montaje.

A continuación se muestran algunos arreglos para fijar el anillo interno del cojinete al eje, cuando el eje debe girar, como se indica. Generalmente el cojinete se ajusta a presión sobre el eje, con las dimensiones de ajuste del eje dadas en los catálogos de cojinetes, para diferentes aplicaciones.



Cortesía de la SKF Industries, Inc.

Fig. 22-2

En la figura 22-2 se muestran los siguientes detalles, suministrados por la SKF y reproducidos con su permiso:

- (a) Muestra una tuerca de fijación y una arandela de cierre.
- (b) Muestra una placa asegurada con tornillos; es una modificación de (a).
- (c) Muestra el empleo de un aro de resorte y un resalte obtenido con una pieza auxiliar.
- (d) Muestra los detalles de los chaflanes y el contacto del cojinete con los resaltes. Véanse en los catálogos de cojinetes las dimensiones de ajuste recomendadas.
- (e) Muestra el empleo de un anillo separador para obtener el resalte necesario para el cojinete. El anillo se adapta al eje con un ajuste holgado.
- (f) Muestra el empleo de una camisa adaptadora que se utiliza en ejes largos (laminada en frío y sin

ajuste), donde resulta impráctico colocar cojinetes con ajuste de interferencia. El rozamiento producido por la presión de ajuste es suficiente para prevenir el desplazamiento axial de la camisa.

- (g) Muestra una camisa desmontable que se utiliza en las aplicaciones en que el cojinete se debe colocar con algún ajuste de interferencia, pero se debe quitar después de ciertos intervalos de tiempo para efectuar inspecciones o ajustar partes de la máquina.

Un montaje corriente de cojinetes tiene los cojinetes rígidamente asegurados al eje por medio de tuercas de fijación y arandelas de cierre. (Véase la figura 22-3.) Un cojinete se fija en su alojamiento mientras que el otro se puede mover libremente en el suyo, en dirección axial, con el fin de prevenir las variaciones de dimensión y la expansión térmica. El cojinete izquierdo puede soportar empuje axial en cualquiera de los dos sentidos. Las figuras 22-3 a 22-8 fueron suministradas por la *New Departure* y reproducidas con su permiso.

En la figura 22-4 se muestra una variante de montaje que se utiliza cuando no se necesita restringir el movimiento axial; no se necesitan tuercas de fijación ni arandelas de cierre. El movimiento total de los cojinetes varía entre 0,015" y 0,020". El empuje axial hacia la derecha es soportado por el cojinete derecho y el empuje hacia la izquierda por el cojinete izquierdo. Obsérvese que si se desea restringir el movimiento axial, se pueden utilizar planchas de relleno con este montaje. Si se presentan expansiones térmicas se debe tener cuidado con este montaje.

En la figura 22-5 se muestra un montaje que tiene un aro de resorte en el alojamiento.

Un cojinete con pantalla y cierre en un lado se utiliza cuando se requiere protección contra la suciedad en un lado y el aceite llega desde el otro lado, generalmente por sistema de salpicadura. (Véase la figura 22-6.)

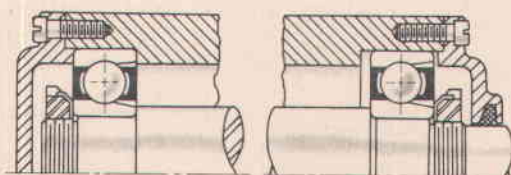


Fig. 22-3

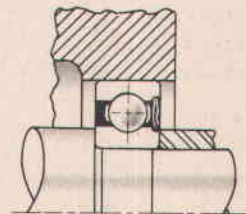


Fig. 22-6

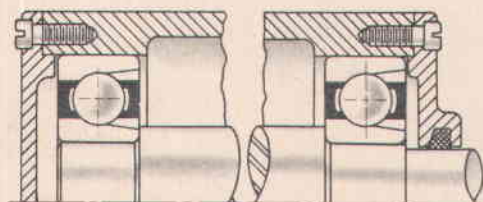


Fig. 22-4

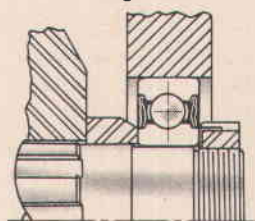


Fig. 22-7

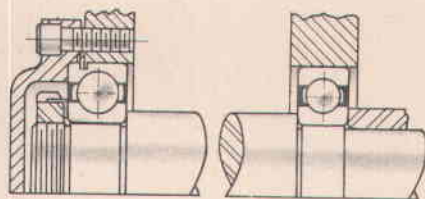


Fig. 22-5

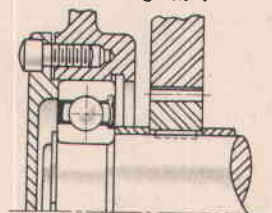


Fig. 22-8

Cortesía de la New Departure

En la figura 22-7 se muestra un cojinete con pantalla y cierre a ambos lados; el cojinete queda protegido de la contaminación y se evita el escape de grasa. En este caso el cojinete es engrasado por el fabricante.

En la figura 22-8 se muestra un cojinete con pantalla, únicamente; el cojinete queda protegido de suciedades y partículas metálicas que pudieran estar dentro de la máquina, con excepción de las partículas demasiado finas que pueden ser transportadas en el salpique de aceite.

En las aplicaciones en que el calor generado no se puede disipar fácilmente, con temperaturas moderadas de funcionamiento, se requiere un enfriamiento artificial. Una temperatura alta del cojinete (generalmente por encima de 200°F; en la mayor parte de las aplicaciones industriales la temperatura

está entre 110°F y 180°F) en general requerirá un diseño especial del cojinete o, de lo contrario, se producirá una disminución en la duración del cojinete. En diseños críticos se debe calcular la capacidad de generar calor y la capacidad de disipar calor.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. ¿Cuántos caballos de fuerza se perderán por rozamiento en un cojinete radial de bolas que tiene un diámetro interno de 2,1654" y está sometido a una carga radial de 5000 lb? El eje gira a 600 rpm.

Solución:

$$\text{Momento de rozamiento } M_t = Ff(D/2) = (5000)(0,0015)(2,1654/2) = 8,1 \text{ lb-pul}$$

$$\text{HP de pérdidas por rozamiento} = M_t N / 63.000 = (8,1)(600) / 63.000 = 0,077 \text{ HP}$$

2. Determinar el momento de rozamiento aproximado, M_t , producido en un cojinete radial de surcos profundos, sometido a una carga de 1960 lb. El cojinete es de la serie 302, con un agujero 0,5906" —0,5903".

Solución:

$$\text{Momento de rozamiento, } M_t = Ff(D/2) = (1960)(0,0015)(0,5906/2) = 0,868 \text{ lb-pul}$$

3. Deducir la ecuación de Stribeck para la capacidad estática de un cojinete radial de una hilera de bolas y surcos profundos, suponiendo que los anillos son rígidos y las bolas están igualmente espaciadas. Determinar también la máxima carga ejercida sobre una bola. (Expresar el resultado en función del diámetro de las bolas, D y del número de bolas, Z .)

Solución:

- (a) La carga radial C_O está balanceada por las componentes verticales de las fuerzas que actúan sobre el anillo, por medio de las bolas, en la mitad inferior del cojinete:

$$C_O = F_1 + 2F_2 \cos \theta + 2F_3 \cos 2\theta + \dots$$

- (b) Para solucionar la ecuación anterior obtenemos una segunda consideración de las relaciones entre las deformaciones. La deformación radial debida a la carga F_1 es δ_1 , la deformación radial debida a la carga F_2 es δ_2 , etc., siendo

$$\delta_2 = \delta_1 \cos \theta, \quad \delta_3 = \delta_1 \cos 2\theta, \quad \text{etc.}$$

si se supone que los anillos conservan su forma circular.

- (c) Así mismo, las relaciones de las deformaciones y las cargas están dadas por las siguientes fórmulas, que se justifican en las ecuaciones de esfuerzo de Hertz:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\delta_1^{3/2}}{\delta_2^{3/2}}, \quad \frac{F_1}{F_3} = \frac{\delta_1^{3/2}}{\delta_3^{3/2}}, \quad \text{etc.}$$

- (d) El remplazo de (b) y (c) en (a) da

$$C_O = F_1 [1 + 2(\cos \theta)^{5/2} + 2(\cos 2\theta)^{5/2} + \dots]$$

- (e) El ángulo θ depende del número de bolas Z : $\theta = 360^\circ/Z$.

- (f) Expresar (d) como $C_O = F_1 M$, donde $M = [1 + 2(\cos \theta)^{5/2} + 2(\cos 2\theta)^{5/2} + \dots]$.

- (g) Stribeck encontró que Z/M era prácticamente una cantidad constante, sin importar cuál sea el número de bolas, siendo el valor medio aproximadamente igual a 4,37. El sugirió utilizar un valor de 5 en las condiciones prácticas, debido a la presencia del juego interno y de la deformación que hace perder la forma circular. Trabajos experimentales posteriores confirmaron esta conclusión. De modo que para un cojinete radial sometido a una distribución de carga radial, la máxima carga producida sobre una bola se puede expresar como

$$F_1 = \frac{C_O Z}{ZM} = \frac{C_O(5)}{Z}$$

- (h) Stribeck encontró, con base en sus trabajos experimentales, que la carga F_1 que produce una deformación permanente dada entre dos bolas del mismo diámetro, puede expresarse con la fórmula

$$F_1 = KD^2$$

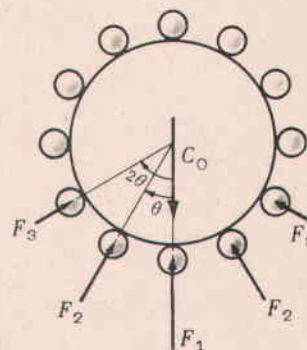


Fig. 22-9

donde K es una constante de proporcionalidad. Así que $KD^2 = 5C_0/Z$, o sea que la capacidad estática radial de un cojinete es

$$C_0 = KZD^2/5$$

En consecuencia, la capacidad estática es $C_0 = KZD^2/5$ y la carga máxima producida sobre una bola es $F_1 = 5C_0/Z$.

4. Utilizando $K = 8820$ en la ecuación de Stribeck, calcular la capacidad estática de un cojinete de la serie 208, de una hilera de 9 bolas de 15/32 pul de diámetro, con surcos profundos, y compararla con:
 - (a) La capacidad estática SKF de un cojinete de la serie 6208 de una hilera de 9 bolas de 15/32 pul de diámetro y surcos profundos.
 - (b) La capacidad estática New Departure de un cojinete 3208 que tiene 9 bolas de 15/32 pul de diámetro y surcos profundos.
 - (c) Utilizando la capacidad AFBMA, determinar la capacidad estática de un cojinete de una hilera de 9 bolas de 15/32 pul de diámetro, con surcos de contacto radial.

Solución:

- (a) En el catálogo de la SKF hallamos que la capacidad estática de un cojinete 6208 es 3520 lb.
- (b) En el catálogo de la New Departure hallamos que la capacidad necesaria para lograr el funcionamiento silencioso de un cojinete estacionario 3208 es 3350 lb. Para el cojinete particular que se escogió, con el mismo tamaño y el mismo número de bolas, la discrepancia es pequeña (con respecto a la parte (a)) y se debe a una diferencia de interpretación y a las diferentes constantes empleadas por los fabricantes.
- (c) La capacidad AFBMA está determinada por

$$C_0 = f_0 i Z D^2 \cos \alpha = (1780)(1)(9)(15/32)^2 (\cos 0^\circ) = 3520 \text{ lb}$$

donde f_0 se halla en la tabla I-1.

Es interesante observar que si el cojinete no funciona a altas velocidades después que se ha producido la carga estática, la carga puede aumentar hasta cuatro veces ($4 \times 3520 = 14.080 \text{ lb}$) y la carga de rotura es aproximadamente 8 veces la carga estática ($8 \times 3520 = 28.160 \text{ lb}$).

5. Utilizando la capacidad AFBMA, determinar la carga estática radial equivalente de un cojinete radial de bolas, con surcos profundos, sometido a una carga radial $F_r = 3000 \text{ lb}$ y a una carga de empuje axial $F_a = 1000 \text{ lb}$. ($X_0 = 0,6$ y $Y_0 = 0,5$, según la tabla I-2.)

Solución:

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a = (0,6)(3000) + (0,5)(1000) = 2300 \text{ lb}$$

Pero P_0 debe ser igual o mayor que F_r ; por tanto, la carga radial equivalente es igual a 3000 lb.

6. Utilizando la capacidad AFBMA, determinar la carga estática radial equivalente de un cojinete de bolas con contacto angular, sometido a una carga radial de 2000 lb y a una carga de empuje axial de 3600 lb. ($X_0 = 0,5$, $Y_0 = 0,33$ para un ángulo de contacto de 30° , según la tabla I-2.)

Solución:

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a = (0,5)(2000) + (0,33)(3600) = 2200 \text{ lb}$$

Como P_0 debe ser igual o mayor que F_r , la carga radial equivalente es igual a 2200 lb.

7. Repetir el problema 6, con la diferencia que la carga de empuje axial es $F_a = 1200 \text{ lb}$.

Solución:

$$P_0 = X_0 F_r + Y_0 F_a = (0,5)(2000) + (0,33)(1200) = 1400 \text{ lb}$$

que es menor que F_r ; por consiguiente la carga radial equivalente es 2000 lb.

8. Aunque los catálogos de cojinetes tabulan la capacidad de carga estática, determinar la capacidad estática de un cojinete 6309 de una sola hilera de bolas y surcos profundos, que tiene 8 bolas de 11/16 pul de diámetro.

Solución:

Capacidad de carga estática, $C_0 = f_0 i Z D^2 \cos \alpha = (1780)(1)(8)(11/16)^2 \cos 0^\circ = 6730 \text{ lb}$.

(El catálogo de la SKF, que emplea las normas AFBMA, tiene un valor $C_0 = 6730 \text{ lb}$ para un cojinete 6309.)

9. Un cojinete de bolas SKF No. 1310 de autoalineamiento tiene una capacidad dinámica específica, $C = 7510$ lb (es decir, que el 90% de un grupo de cojinetes tendrá una duración de 500 horas a 33,3 rpm, con una capacidad de 7510 lb). Si la carga radial equivalente realmente aplicada al cojinete es $P = 10.000$ lb, determinar:

- La duración probable, expresada en millones de revoluciones (la duración lograda por el 90% de un grupo de cojinetes de este número), siendo la velocidad de rotación 1800 rpm.
- La duración lograda por el 90% de cojinetes, expresada en horas.
- La duración media probable, expresada en horas.

Solución:

- (a) Duración en millones de revoluciones $= (C/P)^3 = (7510/10.000)^3 = 0,423$ millones de revoluciones

Obsérvese que la velocidad no entra en los cálculos.

- (b) Duración en horas $= \frac{423.000 \text{ rev}}{1800 \text{ rev/min}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 3,92 \text{ h.}$

Así, la duración probable del 90% de los cojinetes es 3,92 horas.

- (c) La duración media probable es 5 veces la duración probable del 90% de los cojinetes, o sea 19,6 horas.

10. Repetir el problema 10, si la carga radial equivalente P es 1000 lb.

Solución:

- (a) Duración en millones de revoluciones $= (C/P)^3 = (7510/1000)^3 = 423$ millones de revoluciones

- (b) Duración en horas $= \frac{423 \times 10^6 \text{ rev}}{1800 \text{ rev/min}} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 3920 \text{ h.}$

- (c) La duración media probable es 5 veces la duración probable del 90% de los cojinetes, o sea 19.600 horas.

11. Un cojinete tiene una capacidad dinámica radial específica de 8800 lb. ¿Qué carga radial equivalente P puede soportar el cojinete a una velocidad de 400 rpm, si se desea que el 90% de un grupo de cojinetes tenga una duración H de 5000 horas, en estas condiciones?

Solución:

$$\text{Duración deseada (en revoluciones)} = (5000 \times 60) \text{ min} \times 400 \text{ rev/min} = 120 \times 10^6 \text{ rev.}$$

$$\text{Duración en millones de revoluciones} = (C/P)^3 \text{ o sea que } 120 = (8800/P)^3 \text{ de donde } P = 1780 \text{ lb.}$$

12. ¿Cuál es la capacidad dinámica específica C necesaria para obtener una duración $H = 10.000$ horas (para el 90% de cojinetes), con una velocidad de 650 rpm y una carga radial $P = 670$ lb?

Solución:

$$\text{Duración deseada (en revoluciones)} = (10.000 \times 60) \text{ min} \times 650 \text{ rev/min} = 390 \times 10^6 \text{ rev.}$$

$$\text{Duración (en millones de revoluciones)} = (C/P)^3 \text{ o sea que } 390 = (C/670)^3 \text{ de donde } C = 4900 \text{ lb.}$$

13. Escoger un cojinete de bolas con surcos profundos, para colocarlo en la parte inferior del eje vertical que se muestra en la figura 22-10, el cual es accionado por una correa en V. Se ha determinado que la fuerza resultante que actúa sobre la polea ($T_1 + T_2$) es 1200 lb. Basar la selección en una distribución uniforme de carga y una duración de 9000 horas (para el 90% de un grupo de cojinetes). Con base en la resistencia, el mínimo diámetro del eje (en el asiento del cojinete inferior) es 15/16 pul. El eje gira a 300 rpm. En este problema se utilizará un catálogo de la SKF para escoger el cojinete.

Solución:

- (a) Aunque la carga es uniforme, la SKF recomienda un factor, con el fin de tomar los efectos dinámicos de la vibración de la correa y la fuerza adicional necesaria para mantener la tensión correcta en la correa. Para una correa en V el factor recomendado varía entre 1,5 y 2. Aquí se utilizará, arbitrariamente, 1,5.

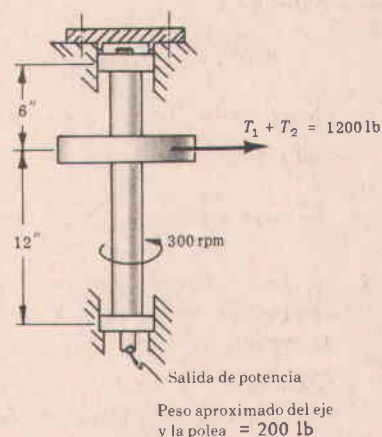


Fig. 22-10

- (b) La carga radial uniforme que se ejerce sobre el cojinete inferior es 400 lb y empleando un factor de choque de 1,5, tendremos $F_r = 600$ lb.
- (c) La carga axial (en la dirección vertical) tomada por el cojinete inferior es $F_a = 200$ lb. El factor dinámico no se aplicará a esta carga, ya que el peso es constante.
- (d) La carga radial equivalente es

$$P = XVF_r + YF_a$$

donde (para un cojinete de una hilera de bolas y surcos profundos):

X = factor radial que se da a continuación

V = factor de rotación = 1,0 si el anillo interior gira con respecto a la carga
= 1,2 si el anillo exterior gira con respecto a la carga

Y = factor axial que se da a continuación

e = valor de referencia que se da en la tabla de en seguida

Cuando F_a/VF_r es menor o igual a e , utilizar $X = 1$ y $Y = 0$.

Cuando F_a/VF_r es mayor que e , utilizar $X = 0,56$ y tomar Y de la tabla dada a continuación.

F_a/C_0	0,014	0,028	0,056	0,084	0,11	0,17	0,28	0,42	0,56
e	0,19	0,22	0,26	0,28	0,30	0,34	0,38	0,42	0,44
Y	2,30	1,99	1,71	1,55	1,45	1,31	1,15	1,04	1,00

C_0 = capacidad de carga estática (tabulado, por conveniencia en el catálogo de cojinetes). Los valores de F_a/C_0 , e y Y son los que se dan en la tabla II-2 de las normas AFBMA y son los mismos del catálogo de la SKF.

- (e) Como todavía no se conoce el cojinete que se debe emplear, se debe seguir el método de ensayo y error para obtener la constante necesaria. Como sabemos que el diámetro del eje es 15/16 pul, encontramos un cojinete de una sola hilera de bolas que tenga el agujero adecuado y verificamos su capacidad. Encontramos los siguientes diámetros:

Cojinete	6005	6006	6205	6206	6305	6306	6405	6406
Agujero (pul)	0,9843	1,1811	0,9843	1,1811	0,9843	1,1811	0,9843	1,1811

- (f) Probemos, arbitrariamente, un cojinete 6205. Los valores dados para este cojinete son: $C_0 = 1560$ lb, $C = 2420$ lb. Entonces $F_a/C_0 = 200/1560 = 0,128$ que corresponde a $e = 0,31$ y $Y = 1,41$ (por interpolación).

Como $\frac{F_a}{VF_r} = \frac{200}{(1)(600)} = 0,33 > e$, utilizar $X = 0,56$ y $Y = 1,41$. En consecuencia

$$P = XVF_r + YF_a = 0,56(1)(600) + 1,41(200) = 618 \text{ lb}$$

Duración probable, $L = (C/P)^3 = (2420/618)^3 = 60$ millones de revoluciones.

Duración deseada (en revoluciones) = $(9000 \times 60 \text{ min})(300 \text{ rev/min}) = 162 \times 10^6$ revoluciones.

Por consiguiente el cojinete 6205 no tiene la suficiente capacidad para esta aplicación.

- (g) Ensayemos un cojinete 6305, que tiene el diámetro interior que deseamos. Entonces $C_0 = 2390$ lb, $C = 3660$ lb, $F_a/C_0 = 0,084$, $e = 0,28$ y $Y = 1,55$.

Como $\frac{F_a}{VF_r} = \frac{200}{(1)(600)} = 0,33 > e$, utilizar $X = 0,56$ y $Y = 1,55$. En consecuencia

$$P = XVF_r + YF_a = 0,56(1)(600) + 1,55(200) = 646 \text{ lb}$$

Duración probable, $L = (C/P)^3 = (3660/646)^3 = 182$ millones de revoluciones y la duración deseada es 162 millones de revoluciones.

El cojinete 6305 tiene una capacidad mayor que la necesaria, pero como su diámetro interior es aproximadamente 15/16 pul, el cojinete se acomoda bastante bien a los requerimientos. El diámetro preferido del resalte para un cojinete 6305 es 1,220 pul.

14. Seleccionar un cojinete de bolas para la parte superior del montaje que se estudió en el problema 13. Carga radial $F_r = 800$ lb; duración deseada = 9000 horas a 300 rpm, o sea 162×10^6 revoluciones. No hay carga de empuje axial, o sea que $F_a = 0$.

Solución:

- (a) El diámetro que debe tener el eje se determina por el agujero del menor cojinete que satisfaga las condiciones o con base en la resistencia del eje.

Desde el punto de vista de la resistencia del eje, la flexión es cero en el asiento del cojinete superior, pero existe una carga transversal que produce esfuerzos de corte transversales. Seleccionaremos el cojinete de agujero mínimo que sea compatible con la resistencia del eje.

- (b) Tomando en cuenta el factor dinámico 1,5, la carga radial F_r es $800(1,5) = 1200$ lb.
- (c) La capacidad dinámica específica C que se necesita, se puede encontrar de $L = (C/P)^3$, donde $P = XVF_r + YF_a = (1)(1)(1200) + Y(0) = 1200$ lb. Entonces $162 = (C/1200)^3$ y $C = 6550$ lb.
- (d) Del catálogo de cojinetes obtenemos los siguientes cojinetes, con sus correspondientes capacidades dinámicas específicas, diámetros del agujero y diámetros exteriores.

Cojinete	C	Agujero	Diám. ext.
6015	6830 lb	2,9528"	4,5276"
6211	7500 lb	2,1654"	3,9370"
6308	7040 lb	1,5748"	3,5433"
6406	7460 lb	1,1811"	3,5433"

(Los valores de C enumerados arriba son mayores que el valor deseado $C = 6550$ lb, pero están bastante próximos.)

- (e) Si tomamos arbitrariamente un esfuerzo de corte permisible de 12.000 psi, podemos hallar el diámetro del eje con base en el esfuerzo, por medio de la fórmula

$$s_s = \frac{4V}{3A}, \quad 12,000 = \frac{4(800)}{3(\frac{\pi}{4}d^2)}, \quad d = 0,34"$$

Comparando (d) con (e) observamos que el tamaño del cojinete impone el diámetro del eje. Si se desea el agujero más pequeño posible, se debe utilizar un cojinete 6406. Si se desea utilizar el cojinete con menor diámetro exterior posible, se puede emplear el 6308 o el 6406. (El diámetro preferido para el resalte del eje es 1,929" para un cojinete 6308 y 1,535" para el cojinete 6406.)

Por tanto, es posible utilizar un cojinete 6406 con un diámetro pequeño del eje o un cojinete 6308, con un diámetro del eje, grande. La elección final depende del costo y de la forma de la máquina y de los cojinetes, así como también de la rigidez y de las consideraciones sobre la velocidad crítica.

15. Uno de los cojinetes que se puede elegir en el problema anterior es uno SKF 6406, que tiene un $Z = 8$ bolas de diámetro $D = 21/32$ pul. El cojinete tiene una capacidad dinámica específica $C = 7460$ lb, de acuerdo con el catálogo de la SKF. Determinar: (a) La clasificación AFBMA de la capacidad de carga estática C_0 . (b) La capacidad de base C , con $f_0 = 1780$ (tabla I-1) y $f_c = 4340$ (hallado a continuación).

Solución:

- (a) $C_0 = f_0 i Z D^2 \cos \alpha = 1780(1)(7)(21/32)^2 \cos 0^\circ = 5370$ lb (igual a la capacidad SKF).
- (b) $C = f_c (i \cos \alpha)^{0.7} Z^{2/3} D^{1.8} = 4340(1 \cos 0^\circ)^{0.7} (7)^{2/3} (21/32)^{1.8} = 7460$ lb (igual a la capacidad SKF).

El valor de f_c se halla como se indica a continuación, utilizando la tabla II-1 y el apéndice 1.

$$\frac{D}{d_m} \cos \alpha \approx \frac{(21/32)}{2,36} \cos 0^\circ \approx 0,278. \text{ Se utiliza la relación aproximada, ya que se supone que}$$

el diámetro primitivo del juego de bolas, d_m , es el promedio de los diámetros de los anillos interior y exterior, por no conocer las dimensiones específicas. El diámetro del anillo exterior de un cojinete 6406 es 3,5433" y el diámetro del agujero de este cojinete es 1,1811". El diámetro primitivo aproximado del juego de bolas, d_m , es $\frac{1}{2}(3,5433 + 1,1811)'' = 2,36''$.

De la tabla II-1, para $\frac{D}{d_m} \cos \alpha \approx 0,278$, $\frac{f_c}{f} = 0,583$. Del apéndice 1, $f = 7450$. En consecuencia, $f_c = 4340$ lb.

Obsérvese que los valores catalogados de la capacidad básica se deben tomar del catálogo del fabricante en que se está escogiendo el cojinete.

16. Una carga radial $F_1 = 1000$ lb actúa por dos horas sobre un cojinete de rodamientos y luego se reduce a $F_2 = 500$ lb, por una hora. El ciclo se repite continuamente y el eje gira a 300 rpm. Determinar la carga media cúbica F_m que se debe utilizar en la selección del cojinete, para una duración de 12.000 horas.

Solución:

$$F_m = \sqrt[3]{\frac{F_1^3 N_1 + F_2^3 N_2}{L_n}} = \sqrt[3]{\frac{(1000)^3 (8000 \times 60 \times 300) + (500)^3 (4000 \times 60 \times 300)}{(12.000 \times 60 \times 300)}} = 893 \text{ lb}$$

donde

$$\begin{aligned} N_1 &= \text{revoluciones ejecutadas bajo la acción de } F_1 & N_2 &= \text{revoluciones ejecutadas bajo la acción de } F_2 \\ L_n &= \text{revoluciones totales} \end{aligned}$$

17. La magnitud de una carga varía continuamente en forma sinusoidal y su sentido permanece constante. Para una duración total de 20.000.000 de revoluciones a una velocidad de 400 rpm, determinar la carga media cúbica, F_m , si la carga máxima es 1000 lb.

Solución:

Como la variación de la carga se repite, la carga media cúbica para un ciclo será la misma para todos los ciclos. Por consiguiente, consideremos un ciclo, o sea una revolución.

Después que ha tenido lugar una fracción de la revolución, la carga está dada por $F = +500 - 500 \cos 2\pi N$, donde N es la fracción de revolución (cuando $N = 0$, $F = 0$; cuando $N = 1/2$ rev, $F = +1000$; cuando $N = 1$ rev, $F = 0$).

$$\begin{aligned} F_m &= \sqrt[3]{\frac{\int_0^{L_n} F^3 dN}{L_n}} = \sqrt[3]{\frac{\int_0^1 (500 - 500 \cos 2\pi N)^3 dN}{1}} \\ &= \sqrt[3]{(500)^3 \left[N - \frac{3 \sin 2\pi N}{2\pi} + \frac{3}{2\pi} \left(\pi N + \frac{\sin 4\pi N}{4} \right) - \frac{\sin 2\pi N}{6\pi} (\cos^2 2\pi N + 2) \right]_0^1} \\ &= \sqrt[3]{(500)^3 (2,5)} = 679 \text{ lb} \end{aligned}$$

En los catálogos de cojinetes se expresa que para el caso que la carga varíe como una curva sinusoidal, la carga media cúbica se obtiene por medio de la fórmula aproximada $F_m = 0,68 F_{\max}$, que concuerda con el cálculo hecho anteriormente.

18. Un eje que gira a una velocidad constante soporta una carga variable. La carga radial sobre el cojinete es $F_1 = 500$ lb por un tiempo $t_1 = 1$ segundo, $F_2 = 300$ lb por $t_2 = 2$ segundos, $F_3 = 100$ lb por $t_3 = 3$ segundos. La variación de la carga se repite continuamente. ¿Cuál es la carga equivalente F_m ?

Solución:

$$F_m = \sqrt[3]{\frac{\sum F^3 t}{T}} = \sqrt[3]{\frac{F_1^3 t_1 + F_2^3 t_2 + F_3^3 t_3}{T}} = \sqrt[3]{\frac{(500)^3 (1) + (300)^3 (2) + (100)^3 (3)}{6}} = 312 \text{ lb}$$

Nota. La ecuación $F_m = \sqrt[3]{\frac{\sum F^3 N}{L_n}} = \sqrt[3]{\frac{F_1^3 N_1 + F_2^3 N_2 + F_3^3 N_3}{L_n}}$ también se puede utilizar aquí, obteniéndose el mismo resultado final. Las revoluciones ejecutadas bajo la acción de las cargas F_1 , F_2 y F_3 en H horas de operación son respectivamente $N_1 = \frac{1}{6}(60H)(\text{rpm})$, $N_2 = \frac{2}{6}(60H)(\text{rpm})$, $N_3 = \frac{3}{6}(60H)(\text{rpm})$; y las revoluciones totales $L_n = (60H)(\text{rpm})$. Remplazando estos valores en la ecuación anterior, obtenemos $F_m = 312$ lb.

19. Sobre el eje que se muestra en la figura 22-11 están montados un engranaje recto G y una polea P . A la polea se le suministra potencia por medio de una correa plana y se toma la potencia del eje por medio del engranaje. El eje está soportado por dos cojinetes de surcos profundos. Se ha establecido la siguiente información:

Caballos de fuerza = 10 (condiciones de carga uniforme)

Velocidad del eje = 900 rpm

El eje debe ser torneado en AISI 1035 laminado en caliente

Diámetro de la polea = 10,0"

Diámetro primitivo del engranaje = 10,0"

El peso de la polea es aproximadamente 30 lb

El peso del engranaje es aproximadamente 30 lb

Relación de las tensiones en la correa, $T_1/T_2 = 2,5$

Angulo de presión del engranaje = 20°

La polea y el engranaje se montan con un ligero ajuste de presión y se acuan al eje.

Las fuerzas de la correa son perpendiculares al papel, siendo T_1 la fuerza en el ramal tirante y T_2 la fuerza en el ramal flojo. La fuerza tangencial que actúa sobre el engranaje es F_t y la fuerza

separadora, F_r , F_t es perpendicular al papel.

El diseño del eje con base en la resistencia, la velocidad crítica y la rigidez se trata en los capítulos correspondientes a los esfuerzos variables, diseño de ejes y deformaciones. Ahora se hará la selección de los cojinetes, de una hilera de bolas y surcos profundos.

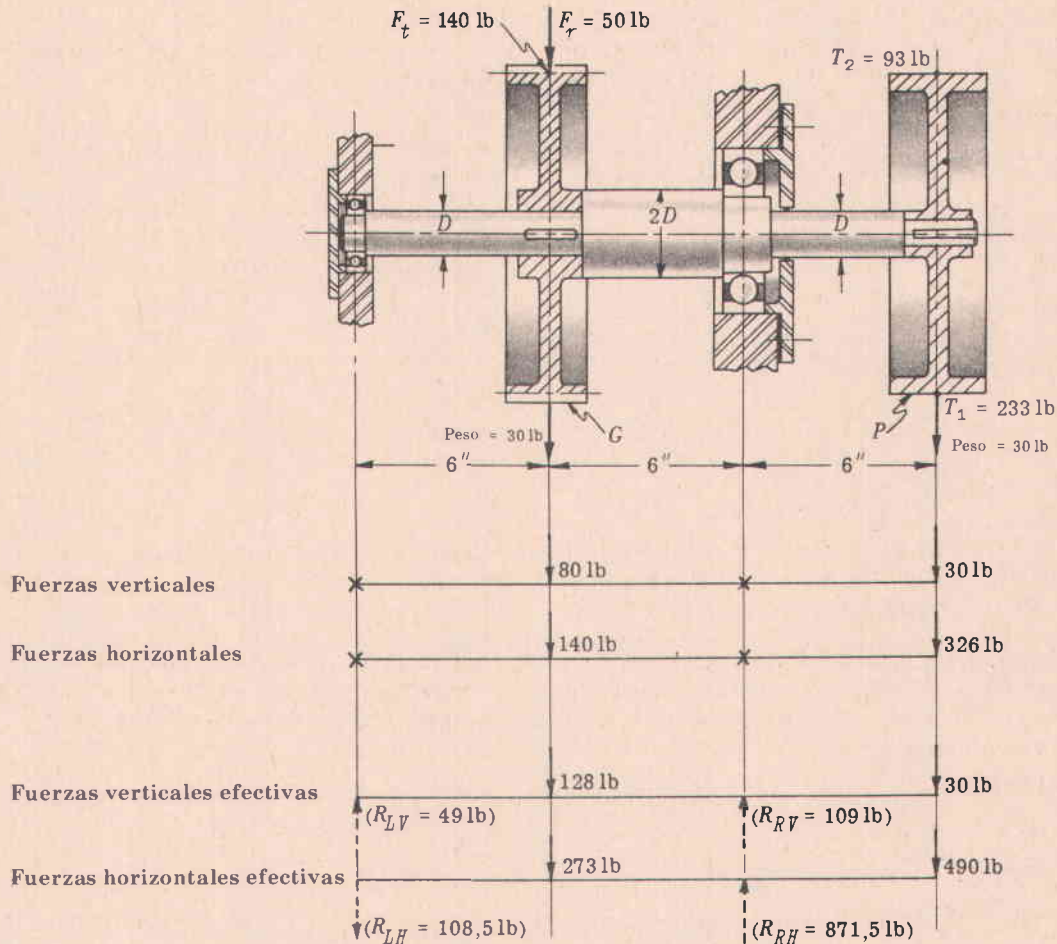


Fig. 22-11

Solución:

La primera información que se debe obtener es la relativa a la aplicación y los detalles de funcionamiento. Un cojinete adecuado para 500 horas de funcionamiento, por ejemplo, debe ser mucho más pequeño que otro para 50.000 horas. La SKF recomienda una duración de 20.000 a 30.000 horas para máquinas de industria mecánica, en general, donde las máquinas son utilizadas continuamente por períodos de 8 horas. Supongamos que nuestra aplicación es de un tipo tal, que necesitamos una duración de 25.000 horas.

El efecto dinámico producido en la transmisión por engranaje se debe a dos efectos dinámicos:

- (1) La vibración que se introduce por las inexactitudes en la forma de los dientes del engranaje, f_k .
- (2) Los efectos dinámicos del mecanismo accionado, f_d .

La fuerza del engranaje se encuentra a partir de la fórmula

$$F_{eff} = F f_k f_d$$

donde F es la fuerza teórica calculada con base en el momento de torsión y la geometría. Los valores de f_k recomendados por las SKF están limitados entre 1,0 y 1,3 y los valores de f_d entre 1,0 y 3,0. Utilicemos arbitrariamente $f_k = 1,3$ y $f_d = 1,5$. Entonces $F_{eff} = F(1,3)(1,5) = 1,95 F$.

Para la transmisión por correa se debe emplear un factor f_k que varía entre 1,5 y 2, para tomar en cuenta el efecto dinámico de la vibración de la correa y la fuerza adicional necesaria para mantener la tensión adecuada en la correa. Utilicemos $f_k = 1,5$ para la correa. Por consiguiente, la fuerza efectiva en la correa es $1,5 F$.

Las fuerzas que se deben utilizar en los cálculos son:

$$\text{Fuerza tangencial efectiva sobre el engranaje} = 1,95(140) = 273 \text{ lb}$$

Fuerza radial efectiva sobre el engranaje	=	1,95(50)	=	98 lb
Fuerza efectiva en la correa, T_1	=	1,5(233)	=	350 lb
Fuerza efectiva en la correa, T_2	=	1,5(93)	=	140 lb

La suma de las tensiones en la correa, $T_1 + T_2$, es $350 + 140 = 490$ lb. Obsérvese que los efectos dinámicos no se consideran aplicados a los pesos de la polea o del engranaje.

Las reacciones a las fuerzas efectivas se indican en la figura, con líneas de trazos.

La carga radial resultante en el cojinete izquierdo es $R_L = \sqrt{(49)^2 + (108,5)^2} = 119$ lb.

La carga radial resultante en el cojinete derecho es $R_R = \sqrt{(109)^2 + (871,5)^2} = 879$ lb.

Revoluciones necesarias para el 90% de los cojinetes = $(25.000)(60)(900) = 1350 \times 10^6$ revoluciones.

La capacidad dinámica específica C requerida por cada cojinete es:

Cojinete izquierdo: $L = (C/P)^3$ donde $P = R_L$. Entonces $1350 = (C/119)^3$ o sea que $C = 1300$ lb.

Cojinete derecho: $L = (C/P)^3$ donde $P = R_R$. Entonces $1350 = (C/879)^3$ o sea que $C = 9650$ lb.

En el catálogo de cojinetes de la SKF se obtienen los siguientes cojinetes de una sola hilera de bolas y surcos profundos, de tamaños mínimos, que tienen una capacidad de base dinámica cercana a $C = 1300$ lb:

Cojinete	Capacidad de base dinámica	Diámetro preferido del resalte del eje	Agujero	Diámetro exterior
6907	1690 lb	1,578"	1,3780"	2,1654"
6004	1620 lb	0,890"	0,7874"	1,6535"
6202	1320 lb	0,703"	0,6693"	1,5748"
6300	1400 lb	0,563"	0,3937"	1,3780"

Como el diámetro del eje, D , es 1,288" (con base en las deformaciones) se puede utilizar el diámetro preferido del resalte como base de la selección. El cojinete 6907 requiere un diámetro del resalte demasiado grande, mientras que el cojinete 6404 requiere uno demasiado pequeño. Una nueva inspección del catálogo indica los diámetros preferidos de los resaltes, cercanos a 1,288", de algunos cojinetes que tienen capacidades de carga mayores que la capacidad requerida:

Cojinete	Diámetro preferido del resalte del eje	Diámetro exterior
6006	1,346"	2,1654"
6206	1,406"	2,4409"
6305	1,469"	2,4409"
6405	1,339"	3,1496"

Considerando la economía y los requerimientos de tamaño, se concluye que un cojinete 6006 es el más indicado para esta aplicación.

Un análisis similar hecho para el cojinete derecho, con un diámetro del eje de $2D = 2,576$ " (determinado con base en un análisis de rigidez) y una capacidad dinámica específica requerida de 9650 lb, da los siguientes tamaños mínimos de algunos cojinetes de una hilera de bolas y surcos profundos, con base, únicamente, en la capacidad de carga:

Cojinete	Capacidad de base dinámica	Diámetro preferido del resalte del eje	Agujero	Diámetro exterior
6018	11.500 lb	3,898"	3,5433"	5,5118"
6216	10.000 lb	3,504"	3,1496"	5,5118"
6310	10.700 lb	2,362"	1,9865"	4,3307"
6408	11.000 lb	1,969"	1,5478"	4,3307"

En el catálogo se encuentra el cojinete de tamaño más pequeño (mostrado en la tabla adyacente) que tiene el diámetro preferido del resalte más cercano al valor $2D = 2,576$ " (y tiene una capacidad dinámica específica mayor que 9650 lb). Desde el punto de vista de la economía y los requerimientos de tamaño, el cojinete 6311 es adecuado.

Los diámetros calculados con base en diferentes consideraciones son

Resistencia: Ecuación de Soderberg (factor de diseño = 1,5)
Código de sistemas de ejes de la ASME

Cojinete	Diámetro preferido del resalte del eje	Diámetro exterior
6311	*2,559"	4,7244"
6411	2,638"	5,039"

* Ligeramente mayor que 2,576", pero satisfactoriamente.

Diámetro D	Diámetro $2D$
$1\frac{1}{8}$ "	$2\frac{1}{4}$ "
1,01"	2,02"

Velocidad crítica (no se considera la deformación por esfuerzo de corte transversal)

0,597"

1,194"

La máxima inclinación de los cojinetes es 1°

0,470"

0,940"

La máxima deformación en el engranaje es 0,001"

1,288"

2,576"

PROBLEMAS PROPUESTOS

20. Determinar el momento de rozamiento aproximado probable en un cojinete de una hilera de bolas y surcos profundos, sometido a una carga radial de 6000 lb. El diámetro interno del cojinete es 2,1654".

Resp. Tomando un coeficiente de rozamiento de 0,0015, el momento de rozamiento es 9,75 lb-pul

21. Utilizando las normas de la AFBMA, determinar la carga estática radial equivalente P_O de un cojinete con surcos de contacto radial, sometido a una carga radial $F_r = 2000$ lb y a una carga axial $F_a = 2000$ lb.

Resp. $P_O = 2200$ lb (con $X_O = 0,6$ y $Y_O = 0,5$)

22. Repetir el problema 21, tomando $F_r = 2000$ lb y $F_a = 500$ lb. Resp. $P_O = 2000$ lb

23. Determinar la capacidad de carga estática AFBMA de un cojinete de una hilera de bolas y surcos profundos, que tiene 10 bolas de $5/8$ pul de diámetro. Resp. $C_O = 6950$ lb

24. Un cojinete de una hilera de bolas y surcos profundos tiene una capacidad dinámica específica de 10.400 lb (para 1.000.000 de revoluciones o 500 horas de funcionamiento a una velocidad de 33,3 rpm, que son alcanzadas o sobrepasadas por el 90% de un grupo de cojinetes). (a) Si la velocidad de rotación es 1800 rpm y la carga radial real que se aplica al cojinete es 2000 lb, ¿cuál es la duración, en revoluciones? (b) ¿Cuál será la duración probable, en horas? (c) ¿Cuál es la duración media probable? Resp. (a) 141×10^6 rev, (b) 1310 h, (c) 6550 h

25. Un cojinete tiene una capacidad dinámica radial específica $C = 5500$ lb. ¿Qué carga radial puede soportar el cojinete a una velocidad de 1200 rpm, si la duración deseada es 2000 horas (para el 90% de un grupo de cojinetes)? Resp. 1050 lb

26. Una carga radial de 2000 lb actúa durante 5 revoluciones y se reduce a 1000 lb durante 10 revoluciones. La variación de carga se repite continuamente. ¿Cuál es la carga media cúbica? Resp. 1495 lb

27. Determinar el cojinete de la serie 6200 adecuado para soportar una carga radial de 400 lb durante 2000 horas, con una velocidad de funcionamiento de 1200 rpm. La distribución de carga es uniforme. A continuación se indica la capacidad dinámica de base, C , de algunos cojinetes de la serie 6200:

Cojinete	6200	6201	6202	6203	6204
C , lb	805	1180	1320	1650	2210

Resp. $C = 2100$ lb; el cojinete 6204 es adecuado

28. Un cojinete 6203 de una hilera de bolas y surcos profundos tiene una capacidad de carga estática $C_O = 1000$ lb y una capacidad dinámica $C = 1650$ lb. ¿Cuál es la duración probable (que alcanza o supera el 90% de los cojinetes) para una carga radial $F_r = 300$ lb y una carga de empuje axial $F_a = 280$ lb? El anillo exterior es estacionario.

Resp. $F_a/C_O = 280/1000 = 0,28$, $e = 0,38$, $Y = 1,15$ y la carga de empuje axial equivalente es $P = 490$ lb. La duración probable es $38,2 \times 10^6$ revoluciones

29. Resolver el problema 28, si $F_a = 56$ lb.

Resp. $F_a/C_O = 56/1000 = 0,056$, $e = 0,26$, $F_a/VE_r = 56/(1)(300) = 0,187$, $X = 1$ y $Y = 0$. La carga radial equivalente es 300 lb y la duración probable 166×10^6 revoluciones

30. Cierta cojinete tiene las dimensiones que se muestran en la figura 22-12. Si el anillo exterior gira a 1000 rpm y el anillo interno es estacionario, ¿cuál será la velocidad de la jaula (separador)? Suponer que no hay deslizamiento entre las bolas y los anillos. Resp. 612 rpm

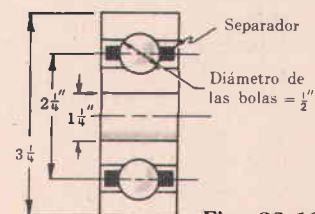


Fig. 22-12

Capítulo 23

Lubricación y diseño de cojinetes

LA LUBRICACION implica el empleo de un lubricante entre las superficies de roce de ciertos elementos de máquinas, con el fin de eliminar o reducir la superficie real de contacto, lo cual conduce a un menor desgaste y a un coeficiente de rozamiento más bajo. Los lubricantes más utilizados son los aceites y las grasas, aunque se puede utilizar cualquier sustancia que tenga las propiedades de viscosidad requeridas. Generalmente el lubricante es líquido. Sin embargo, se pueden utilizar algunos sólidos, tales como grafito, saponita y algunos otros sólidos grasientos no abrasivos. Aun los gases, en determinadas circunstancias, resultan buenos lubricantes.

LA VISCOSIDAD es una propiedad muy importante de los lubricantes. El significado fundamental de la viscosidad se puede ilustrar considerando una placa plana que se mueve bajo la acción de una fuerza P , paralelamente a otra placa fija, estando las dos placas separadas por una delgada película de lubricante fluido de espesor h , como se muestra en la figura 23-1.

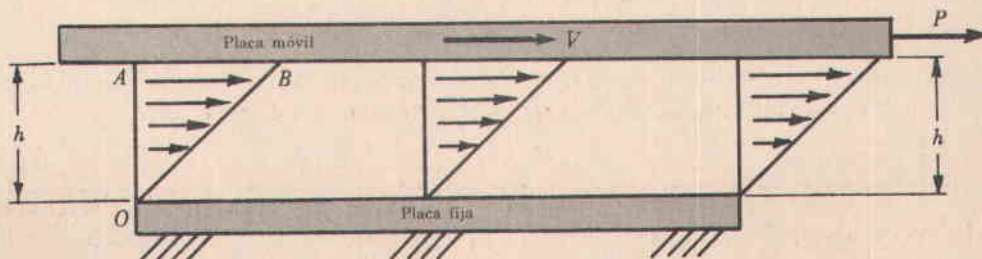


Fig. 23-1

Las partículas de lubricante se adhieren fuertemente a las dos placas. El movimiento está acompañado de un deslizamiento lineal o esfuerzo de corte entre las partículas, a lo largo de todo el espesor de la película.

Si A es el área de la placa que está en contacto con el fluido, el esfuerzo de corte unitario es

$$s_s = P/A$$

Newton determinó que la magnitud de este esfuerzo cortante varía directamente con la velocidad de la placa móvil, V , e inversamente con el espesor de la película, h . Se supone que el fluido llena completamente el espacio comprendido entre las superficies de las dos placas, que la velocidad del fluido que está en contacto con una placa es la misma de la placa y que cualquier flujo de fluido, perpendicular a la velocidad de la placa, es despreciable.

$$\frac{P}{A} \propto \frac{V}{h}, \quad \frac{P}{A} = Z \frac{V}{h}$$

donde Z es una constante de proporcionalidad que numéricamente se define como la viscosidad del fluido.

$$Z = \frac{P/A}{V/h} = \frac{\text{esfuerzo de corte}}{\text{gradiente de velocidad}}$$

Si la placa móvil tiene un área de un centímetro cuadrado y está separada de la placa fija por una película de fluido de un centímetro de espesor y se necesita una fuerza de una dina para mantener la placa móvil a una velocidad de un centímetro por segundo, el fluido tendrá una viscosidad absoluta de un poise. Entonces 1 poise = 1 dina-seg/cm². La viscosidad de la mayor parte de lubricantes fluidos es menor de 1 poise, por lo cual es común, en la práctica, expresar la viscosidad absoluta en **centipoises**, es decir, en centésimas de poise.

Cuando se expresa la viscosidad absoluta en el sistema inglés, las unidades son lb-seg/pul² y la unidad de viscosidad es el **reyn**, que está representado por

$$\mu \text{ (reyns)} = \frac{Z \text{ (centipoises)}}{6,9 \times 10^8}$$

Otros dos medios para expresar la viscosidad, que se utilizan comúnmente en trabajos de lubricación, son la viscosidad universal Saybolt y la viscosidad cinemática, definidas por las siguientes ecuaciones

$$Z = (0,22\tau - \frac{180}{\tau}) \text{ (centipoises)}$$

$$\text{viscosidad cinemática} = \frac{Z}{\rho} \text{ (centistokes)}$$

donde Z = viscosidad absoluta, en centipoises

τ = viscosidad universal Saybolt, en segundos

ρ = densidad del lubricante, en gramos por cm³

En cálculos de diseño, generalmente es satisfactorio un valor promedio $\rho = 0,9$, para aceites. Para obtener una mayor exactitud en el cálculo de ρ , a una temperatura cualquiera t (Fahrenheit), se emplea la siguiente fórmula, para aceites de petróleo:

$$\rho = \rho_{60^\circ} - 0,000365(t - 60^\circ)$$

La viscosidad de los aceites de cárter se expresa por medio del número de viscosidad SAE, relacionado con la viscosidad universal Saybolt como se indica en la siguiente tabla:

Número de viscosidad SAE	Límites de viscosidad Saybolt a 130°F, seg	Número de viscosidad SAE	Límites de viscosidad Saybolt a 130°F, seg
10	90-120	40	80
20	120-185	50	80-105
30	185-255	60	105-125
40	255	70	125-150

Cuando la placa fija es paralela a la placa móvil, como se muestra en la figura 23-1, la velocidad de las diferentes láminas de fluido son proporcionales a sus distancias a la placa fija y el área del triángulo de gradiente de velocidad, OAB , es proporcional al volumen de fluido que pasa por unidad de tiempo por una sección que tiene una anchura unitaria. En este caso la placa móvil no soporta carga vertical. Si la placa fija está inclinada, de modo que el espesor de la película varía desde h_1 (donde entra el aceite) hasta h_2 (donde sale el aceite), el gradiente de velocidad no puede ser el mismo en ambas posiciones. La curva de velocidad es cóncava a la entrada y convexa a la salida, como se muestra en la figura 23-2. Las figuras así formadas en la película convergente no son triangulares,

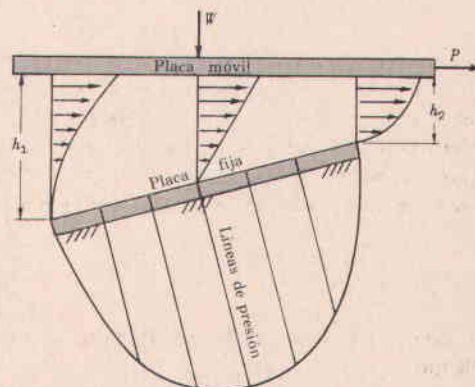


Fig. 23-2

pero sus áreas son iguales, si se supone que no hay escapes. La placa móvil soportará ahora una carga W debida a las relaciones velocidad-presión, que produce una presión en la película de aceite que va desde cero hasta un valor máximo y de aquí nuevamente hasta cero, como se muestra.

El uso de **LOS COJINETES** (el soporte de cargas sobre una película de lubricante) se basa en la teoría de la película convergente. La figura 23-3 muestra la vista del extremo de un cojinete en las posiciones de "reposo", "arranque" y "marcha". Obsérvese que en las posiciones de "reposo" y "arranque" hay contacto entre el muñón (eje) y el cojinete (pieza exterior). Sin embargo, si se satisfacen las con-

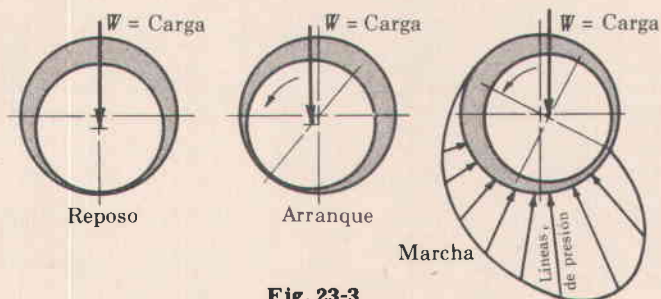


Fig. 23-3

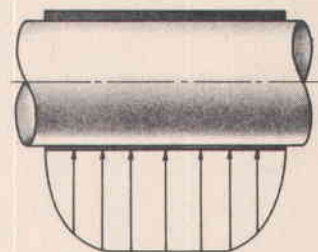


Fig. 23-4

diciones de lubricación perfecta o película gruesa (que se explicarán más tarde), el eje se separará del cojinete por medio de una película de lubricante, como se indica en la posición de "marcha" y la carga será soportada por la presión de la película. El término película delgada o lubricación imperfecta se aplica a la situación en que el diseño del cojinete y la selección del lubricante no satisfacen todos los requerimientos de la lubricación perfecta o película gruesa y el contacto entre el muñón y el cojinete no se puede evitar por completo. Debido a las fugas de lubricante por los extremos del cojinete, hay una distribución de presión en la dirección axial, como se muestra en la figura 23-4. La capacidad de soportar carga de un cojinete con lubricación perfecta es una función de muchas variables, pero esencialmente depende de la selección del lubricante adecuado para proporcionar la lubricación perfecta en las condiciones de funcionamiento especificadas y al mismo tiempo proporcionar el balance térmico adecuado entre el calor generado dentro del cojinete y el calor disipado, con el fin de que el cojinete no sobrepase la temperatura de seguridad especificada, durante su funcionamiento.

EL CALOR GENERADO dentro de un cojinete, H_g , es una función del coeficiente de rozamiento f .

$$H_g = fW \frac{\pi DN}{12} \text{ lb-p/min}$$

donde H_g = calor generado, en lb-p/min N = velocidad del muñón, en rpm
 f = coeficiente de rozamiento W = carga radial total sobre el cojinete, en lb
 D = diámetro del muñón, en pul

El principal problema en este punto es determinar tan cerca como sea posible, el valor del coeficiente de rozamiento. Es difícil obtener un valor preciso de f , ya que éste varía ampliamente con las condiciones de funcionamiento. El estudio de este capítulo se limitará a los cojinetes completos (360°).

Varios investigadores han demostrado (empleando el análisis dimensional) que el coeficiente de rozamiento es una función de, por lo menos, tres parámetros adimensionales,

$$ZN/p, \quad D/C, \quad \text{y} \quad L/D$$

donde Z = viscosidad absoluta del lubricante a su temperatura de funcionamiento, en centipoises
 N = velocidad del muñón, rpm; N' = velocidad del muñón, rps (para utilizarla más tarde)
 p = presión en el cojinete, basada en el área proyectada, W/LD psi
 W = carga radial sobre el cojinete, en lb
 D = diámetro del muñón, en pul
 C = huelgo diametral del muñón, en pul
 L = longitud del cojinete, en pul

La relación entre el coeficiente de rozamiento y el parámetro ZN/p , llamado módulo del cojinete, es de especial interés. La curva de la figura 23-5 es característica, pero la pendiente y la ordenada al origen de la porción recta de la región de película gruesa depende de variables tales como la razón de huelgo C/D y la razón L/D . Con datos experimentales obtenidos por McKee en cojinetes pequeños, se estableció la siguiente ecuación aproximada del coeficiente de rozamiento.

$$f = \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{ZN}{p} \right) \frac{D}{C} + k$$

Esta ecuación, que es la de la porción recta de la región de película gruesa, se puede emplear para calcular el coeficiente de rozamiento.

Datos experimentales indican que el valor de K se puede tomar como 0,002 para relaciones L/D comprendidas entre 0,75 y 2,8. La figura 23-6 muestra (en general) cómo varía K con la relación L/D . En la práctica, el valor promedio de D/C es 1000 y el valor de L/D está limitado entre 1 y 2 cuando los requerimientos de espacio permiten utilizar un cojinete largo. En la tabla que sigue se indican los valores prácticos de funcionamiento de ZN/p que se han determinado para cierto número de aplicaciones características. Los valores de funcionamiento de ZN/p deben ser lo suficientemente grandes para evitar que se entre en las regiones de transición o de película delgada.

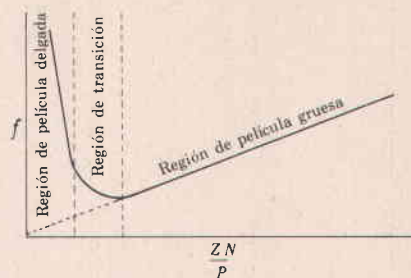


Fig. 23-5

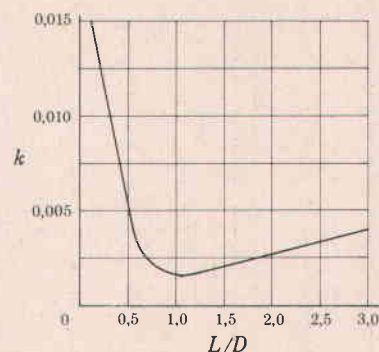


Fig. 23-6

APLICACIONES PRACTICAS DE LOS COJINETES

Equipo	Cojinete	Presión máx. p	Lubricante	
			Z	ZN/p
Motores de automóviles y de aviación	Principal	700-1700	7	15
	Muñón del cigüeñal	1400-3400	8	10
	Botón de manivela	2000-5000	8	
Motores de gas y aceite	Principal	500-1200	20	20
	Muñón del cigüeñal	1000-1800	40	10
	Botón de manivela	1200-2000	65	
Motores marinos	Principal	500	30	20
	Muñón del cigüeñal	600	40	15
	Botón de manivela	1500	50	
Motores de vapor estacionarios	Principal	200-400	15-60	20
	Muñón del cigüeñal	600-1500	30-80	6
	Botón de manivela	1800	25-60	
Bombas y motores reciprocantes	Principal	250	30	30
	Muñón del cigüeñal	600	50	20
	Botón de manivela	1000	80	
Turbinas de vapor	Principal	100-300	2-16	100
Motores y bombas rotativos	Eje	100-200	25	200

OTROS METODOS para determinar el coeficiente de rozamiento se basan en la ecuación de Petroff y en la teoría hidrodinámica.

LA ECUACION DE PETROFF, desarrollada en 1883, da una expresión del coeficiente de rozamiento, sobre la base que el muñón y el cojinete son concéntricos (no hay carga radial) y las fugas son despreciables.

$$f = \frac{\pi^2}{30} \left(\frac{\mu N}{p} \right) \frac{D}{C} = 2\pi^2 \left(\frac{\mu N'}{p} \right) \frac{D}{C}$$

Como esta ecuación se dedujo para cojinetes no cargados, es sólo una aproximación a los cojinetes ligeramente cargados.

EL NUMERO DE SOMMERFELD, S , es otro parámetro adimensional utilizado ampliamente en el análisis de la lubricación. Con base en la teoría hidrodinámica se puede demostrar que el número de Sommerfeld es función únicamente de la razón de **excentricidad** (que se define más adelante). Entonces se puede hacer una gráfica del número de Sommerfeld contra la cantidad $f(D/C)$, que también es una función únicamente de la razón de **excentricidad**, y se puede determinar el coeficiente de rozamiento. El número de Sommerfeld es

$$S = \frac{\mu N'}{p} \left(\frac{D}{C} \right)^2$$

Un factor importante que no se tiene en cuenta en la ecuación de Petroff es la excentricidad del cojinete cuando está sometido a carga, mientras que en la gráfica del número de Sommerfeld contra $f(D/C)$, de acuerdo con la teoría hidrodinámica, sí se toma en cuenta la excentricidad. Cuando el muñón está sometido a carga, no es concéntrico con el cojinete, sino que se mueve aproximadamente a lo largo de un arco semicircular de diámetro $C/2$. Esto conduce al establecimiento de un **espesor mínimo de película**, h_0 , como se indica en la figura 23-7 (muy exagerado). La distancia entre el centro del cojinete y el centro del eje se llama **excentricidad** y se denota por la letra e . La razón de esta excentricidad al huelgo radial se llama **razón de excentricidad**.

$$\text{Razón de excentricidad } \epsilon = \frac{2e}{C} = 1 - \frac{2h_0}{C}$$

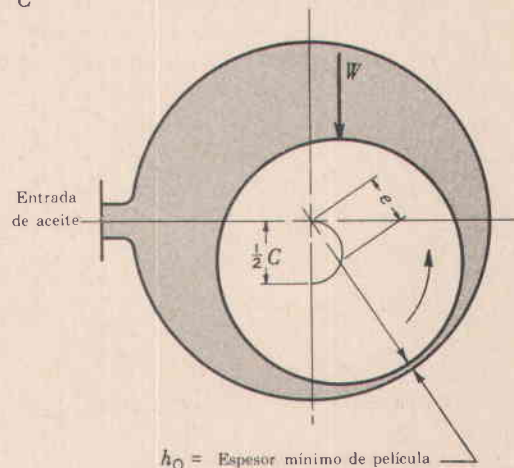


Fig. 23-7

Debe observarse que tanto la ecuación de Petroff como la gráfica $f(D/C)$ contra número de Sommerfeld se basan en cojinetes ideales (sin pérdidas laterales). Algunos métodos de diseño han propuesto el uso de correcciones por pérdidas laterales y por excentricidad en estas ecuaciones. En el pasado, la mayor parte de estos métodos fueron muy inexactos y no del todo satisfactorios.

A. A. Raimondi y John Boyd de la Westinghouse Research Laboratories han preparado **CURVAS DE DISEÑO** corregidas por el efecto de las pérdidas laterales (para diferentes razones L/D), en las cuales se hacen las gráficas de las variables de funcionamiento contra el número de Sommerfeld. (ASLE Transactions, volumen 1, No. 1, abril de 1958). Sus últimas curvas fueron desarrolladas sobre una base completamente racional y los resultados se obtuvieron por medio de computadores. Estas curvas remplazaron las curvas anteriormente publicadas por los mismos autores en 1951, las cuales no estaban corregidas por el efecto de las pérdidas laterales. El empleo de las últimas curvas elimina completamente la necesidad de aplicar factores de corrección por pérdidas laterales y por tanto simplifica grandemente la labor de calcular el rendimiento de los cojinetes. Con el fin de demostrar su uso, se ha reproducido aproximadamente una parte de estas gráficas, escogidas arbitrariamente para un cojinete completo (360°) que tiene una razón L/D igual a 1. Estas curvas se basan también en la posibilidad que pueda ocurrir la rotura de la película. Para el estudio de cojinetes parciales y de diferentes

razones L/D , el lector debe recurrir al artículo original, así como también para el diseño de un cojinete de rendimiento óptimo. El artículo original también abarca el caso de cojinetes sumergidos que funcionan bajo presión, donde la rotura de la película probablemente no ocurre.

EL COEFICIENTE DE ROZAMIENTO se puede determinar en la figura 23-8, donde se muestra gráficamente el coeficiente de rozamiento, $f(D/C)$, contra el número de Sommerfeld.

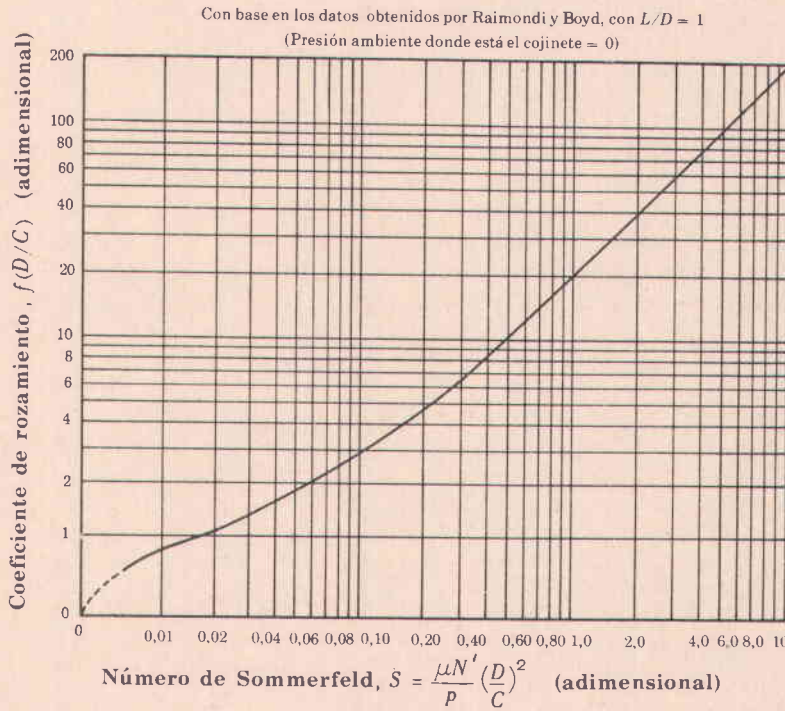


Fig. 23-8

EL ESPESOR MINIMO DE PELICULA se puede determinar en la figura 23-9, donde se muestra gráficamente el espesor mínimo de película, $2h_0/C$, contra el número de Sommerfeld.

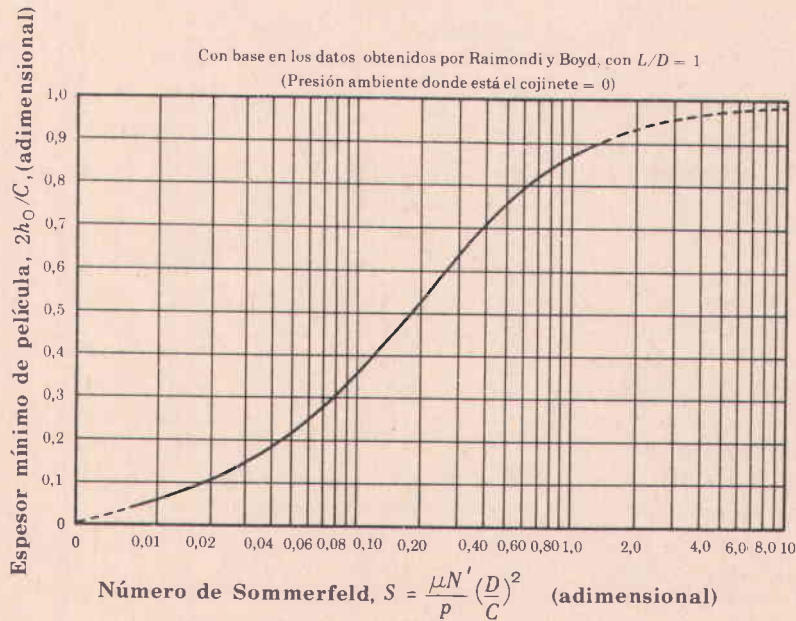


Fig. 23-9

El espesor mínimo de película permisible depende principalmente del tamaño y del acabado superficial del cojinete; mientras más áspera sea la superficie, más gruesa deberá ser la película. Para cojinetes ordinarios revestidos de babbitt, el espesor de la película no debe ser menor de 0,00075 pul. En maquinaria de alta potencia, el espesor mínimo de película puede limitarse entre 0,001 pul y 0,005 pul. Una regla usual es limitar el espesor mínimo de película a $0,00025D$.

EL FLUJO DE ACEITE (Q pul³/seg) que pasa por el cojinete debido a la acción de bombeo del eje se puede determinar en la figura 23-10, donde se muestra gráficamente el flujo $4Q/DCN'L$ contra el número de Sommerfeld.

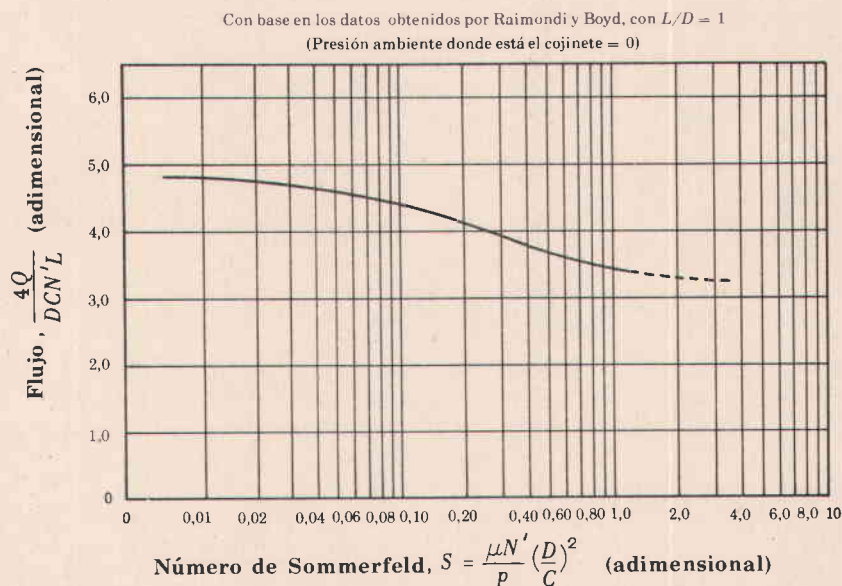


Fig. 23-10

LAS PERDIDAS LATERALES (Q_s pul³/seg) que tienen lugar en los extremos del cojinete, se pueden determinar en la figura 23-11, donde se muestra gráficamente la razón Q_s/Q contra el número de Sommerfeld. Q_s es la cantidad de lubricante que se debe suministrar a un cojinete que funciona bajo la presión atmosférica, para compensar las pérdidas debidas a las fugas.

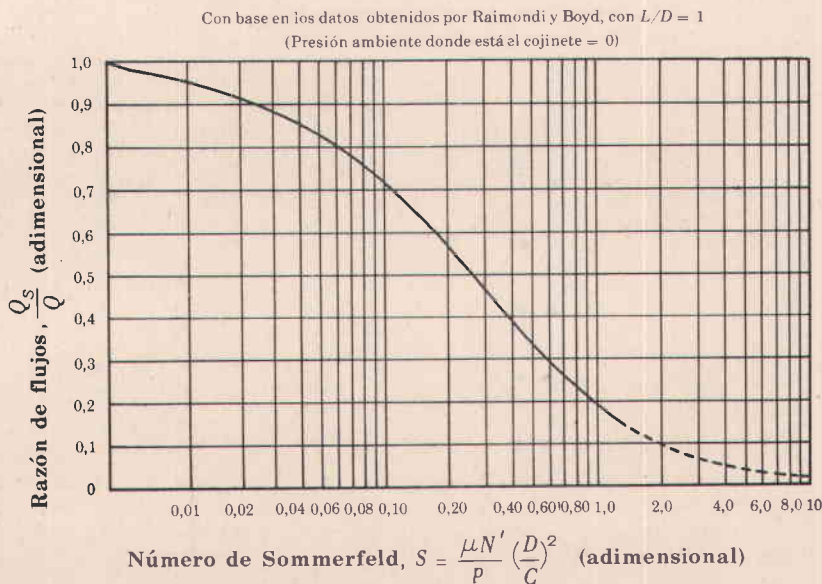


Fig. 23-11

LA ELEVACION DE TEMPERATURA del lubricante, a medida que éste pasa por el cojinete, se puede determinar en la figura 23-11, donde se muestra gráficamente la elevación de temperatura, $J\gamma c \Delta T/p$, contra el número de Sommerfeld. Se supone que todo el calor que se genera por rozamiento se utiliza para elevar la temperatura del lubricante, a medida que éste fluye a través del cojinete.

J = equivalente mecánico del calor = 9336 lb-pul/Btu

γ = peso por unidad de volumen del lubricante, en lb/pul³ (0,03 para el aceite)

c = calor específico del lubricante, en Btu/lb-°F (0,4 para el aceite)

ΔT = elevación de temperatura del lubricante, a medida que pasa por el cojinete, en °F. Se puede considerar que la elevación de temperatura tiene lugar entre el borde de entrada y el borde de salida de la cuña

Con base en los datos obtenidos por Raimondi y Boyd, con $L/D = 1$
(Presión ambiente donde está el cojinete = 0)

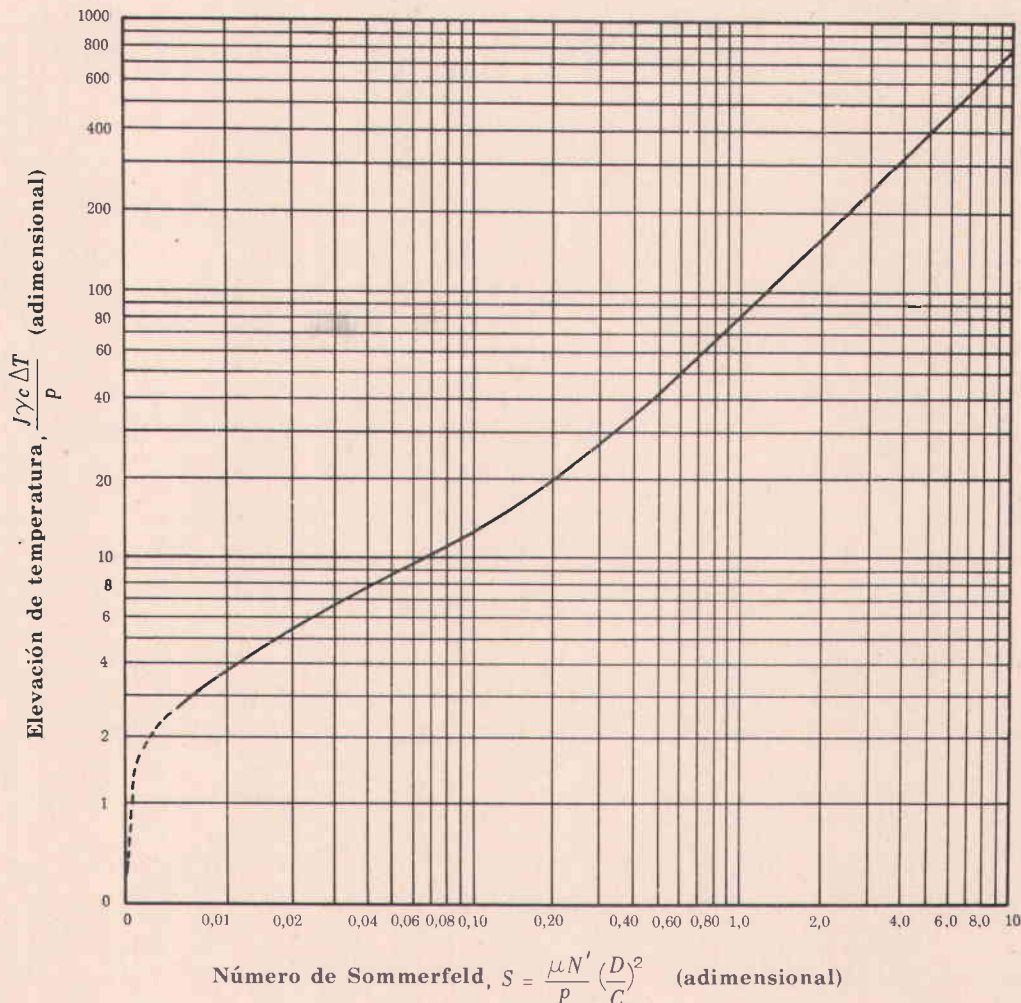


Fig. 23-12

En la siguiente tabla se hace una comparación de los datos obtenidos por Raimondi y Boyd con los datos obtenidos por McKee y con la ecuación de Petroff, cuando se hace la gráfica de $f(D/C)$ contra el número de Sommerfeld para un cojinete completo que tiene una razón L/D igual a 1.

$f(D/C)$ para un cojinete completo con $L/D = 1$

Número de Sommerfeld S	Datos obtenidos por Raimondi y Boyd para presión amb = 0	Ecuación de Petroff	Ecuación de McKee, suponiendo $D/C = 1000$ y usando $f = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{ZN}{P} \right) (1000)$
0,01	0,8	0,197	2,196
0,02	1,1	0,395	2,39
0,04	1,6	0,789	2,79
0,06	2,1	1,17	3,12
0,08	2,4	1,58	3,57
0,10	2,8	1,97	3,96
0,20	4,6	3,95	5,92
0,40	8,4	7,89	9,84
0,60	12,0	11,7	13,8
0,80	16,0	15,8	17,7
1,00	20,0	19,7	21,6
2,00	40,0	39,5	41,2
4,00	80,0	78,9	80,0
6,00	120,0	117,0	119,0
8,00	160,0	158,0	159,0
10,00	200,0	197,0	198,0

Obsérvese que los valores de $f(D/C)$ están en perfecto acuerdo para cojinetes ligeramente cargados, es decir, para números de Sommerfeld altos.

EL CALOR DISIPADO (H_d) por un cojinete completo (360°) puede calcularse por medio de la siguiente ecuación, basada en el trabajo de Lasche:

$$H_d = \frac{(\Delta T + 33)^2}{K} (LD) \text{ lb-p/min}$$

donde $\Delta T = (T_B - T_A)$ = diferencia entre la temperatura de la superficie del cojinete, T_B , y la temperatura del aire circundante, T_A , en $^\circ\text{F}$

$K = 31$ para un cojinete de construcción pesada que esté bien ventilado

$K = 55$ para un cojinete de construcción media o liviana, en aire quieto

L = longitud del muñón, en pul

D = diámetro del muñón, en pul

La relación de la temperatura de funcionamiento del aceite, T_O , la temperatura del aire, T_A , y la temperatura del cojinete, T_B , puede aproximarse por

$$\Delta T = (T_B - T_A) = \frac{1}{2}(T_O - T_A)$$

En la figura 23-13 se muestran las gráficas de las viscosidades absolutas promedios de aceites de números SAE característicos contra la temperatura.

Números SAE de aceites característicos
Viscosidades absolutas medias contra temperatura

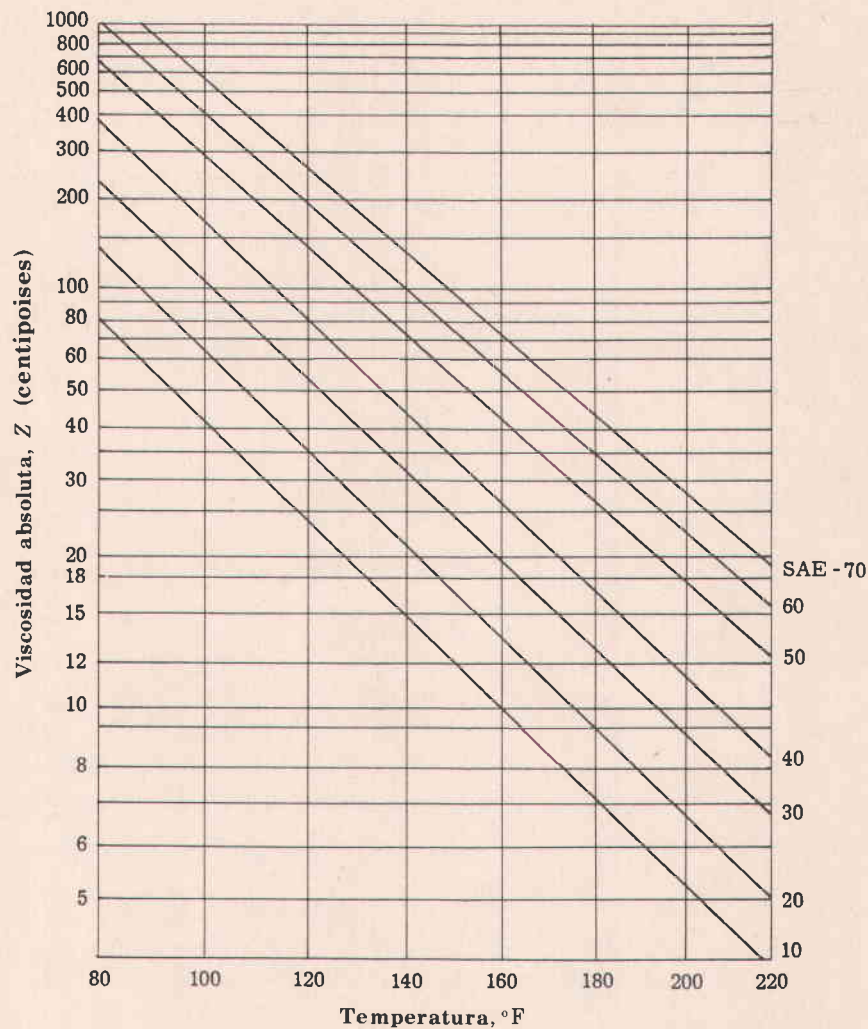


Fig. 23-13

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Un cojinete completo de 3 pul de longitud y 3 pul de diámetro soporta una carga de 2700 lb sobre un muñón que gira a 1800 rpm. Suponiendo que el aceite tiene una viscosidad de 10 centipoises, a la temperatura de operación, y la razón D/C es 1000, determinar el coeficiente de rozamiento utilizando, (a) la ecuación de McKee, (b) la curva de Raimondi y Boyd de la figura 23-8. (Nota: $L/D = 1$.)

Solución:

(a) Utilizando la ecuación de McKee,

$$f = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{ZN}{P} \right) \frac{D}{C} = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{(10)(1800)}{300} \right) (1000) = 0,00484$$

- (b) Para utilizar la curva de Raimondi y Boyd de la figura 23-8, primero se calcula el número de Sommerfeld, S .

$$S = \frac{\mu N'}{p} \left(\frac{D}{C} \right)^2 = 0,145$$

donde $\mu = \frac{10}{6,9 \times 10^6}$ reyns, $N' = \frac{1800}{60} = 30$ rps, y $p = \frac{W}{LD} = \frac{2700}{3(3)} = 300$ psi.

De la figura 23-8, $S = 0,145$ da $f(D/C) = 3,7$; entonces $f(1000) = 3,7$ o $f = 0,0037$.

2. Con referencia al problema 1, determinar la cantidad de calor generado, utilizando el coeficiente de rozamiento que se calculó por medio de la ecuación de McKee.

Solución:

$$H_g = fW \frac{\pi DN}{12} = (0,00484)(2700) \frac{\pi(3)(1800)}{12} = 18.500 \text{ lb-p/min}$$

3. En los problemas 1 y 2 determinar la temperatura superficial probable del cojinete, utilizando la ecuación de Lasche y suponiendo que todo el calor generado se disipa en aire quieto a 70°F.

Solución:

Haciendo el calor disipado H_d igual al calor generado H_g , tenemos

$$H_d = \frac{(\Delta T + 33)^2}{55} LD = H_g, \quad \frac{(\Delta T + 33)^2}{55} (3)(3) = 18.500, \quad \Delta T = 305^\circ \text{F}$$

Entonces $T_B = \Delta T + T_A = 305 + 70 = 375^\circ \text{F}$ (demasiado alto).

4. Un cojinete de 3 pul de longitud soporta una carga de 1645 lb sobre un muñón de 2 pul de diámetro que gira a 750 rpm. El huelgo diametral es 0,00273 pul. ¿Cuál deberá ser la viscosidad del aceite, en centipoises, si la temperatura de la superficie del cojinete está limitada hasta 170°F cuando funciona en aire quieto a 70°F?

Solución:

Utilizar las ecuaciones de McKee y Lasche y suponer que el calor generado es igual al calor disipado.

$$f = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{ZN}{p} \right) \left(\frac{D}{C} \right) = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{750Z}{274} \right) \left(\frac{2}{0,00273} \right) = 0,002 + 0,000095Z$$

$$H_g = fW \frac{\pi DN}{12} = (0,002 + 0,000095Z)(1645) \frac{\pi(2)(750)}{12} = 1290 + 61,3Z$$

$$H_d = \frac{(\Delta T + 33)^2}{55} LD = \frac{(170 - 70 + 33)^2}{55} (3)(2) = 1930 \text{ lb-p/min}$$

Entonces, suponiendo que $H_g = H_d$, tenemos $(1290 + 61,3Z) = 1930$ o sea que $Z = 10,45$ centipoises.

5. Un cojinete de 6 pul de diámetro y 9 pul de longitud, soporta una carga de 200 lb a 1200 rpm. Si el huelgo radial es 0,003 pul y el cojinete consume 2 HP (66.000 lb-p/min) en rozamiento, ¿cuál es la viscosidad del aceite a la temperatura de operación?

Solución:

Basada en la ecuación de McKee.

$$66.000 = fW \frac{\pi DN}{12} = \left[0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{1200Z}{2000/54} \right) \left(\frac{6}{0,006} \right) \right] (2000) \frac{\pi(6)(1200)}{12} \quad \text{o} \quad Z = 10,1 \text{ centipoises}$$

6. Un cojinete de 4 pul de diámetro y 6 pul de longitud soporta una carga radial de 1200 lb. La velocidad del eje es 500 rpm. La temperatura del cuarto es 90°F y la temperatura superficial del cojinete está limitada a 145°F. Seleccionar el aceite adecuado para satisfacer los anteriores requerimientos, si el cojinete está bien ventilado y no se utiliza enfriamiento artificial. Suponer que $D/C = 1000$.

Solución:

Se iguala el calor generado al calor disipado, utilizando las ecuaciones de McKee y Lasche.

$$H_g = fW \frac{\pi DN}{12} = \left[0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{500Z}{1200/24} \right) (1000) \right] (1200) \frac{\pi(4)(500)}{12}$$

$$H_d = \frac{(\Delta T + 33)^2}{31} LD = \frac{(\Delta T + 33)^2}{31} (24)$$

$$\Delta T = T_B - T_A = 145 - 90 = 55. \text{ Así mismo, } \Delta T = \frac{1}{2}(T_O - T_A) \text{ o } 55 = \frac{1}{2}(T_O - 90), \text{ y } T_O = 200$$

Ahora hacemos $H_g = H_d$ y obtenemos $Z = 16$ centipoises a 200°F, que corresponde a un aceite que tiene un número SAE comprendido entre 50 y 60, según la figura 23-13.

7. Un diseño tentativo de un cojinete exige un diámetro de 3 pul y una longitud de 5 pul para soportar una carga de 4500 lb. El eje debe funcionar a una velocidad de 1000 rpm. La temperatura del cuarto es 100°F y se desea que durante el funcionamiento del cojinete la temperatura no sobrepase 170°F. El aceite utilizado tiene una viscosidad de 9,8 centipoises a 240°F. Determinar la cantidad de enfriamiento artificial que se necesita aplicar por medio de un enfriador de aceite externo, si se supone que el cojinete disipa calor de acuerdo con la siguiente fórmula: $H_d = (\Delta T + 33)^2(15/55)$.

Solución:

$$f = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{ZN}{P} \right) \left(\frac{D}{C} \right) = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{9,8 \times 1000}{4500/15} \right) (1000) = 0,00355$$

$$H_g = fW \frac{\pi DN}{12} = (0,00355) (4500) \frac{\pi(3)(1000)}{12} = 12.550 \text{ lb-p/min}$$

$$H_d = (170 - 100 + 33)^2(15/55) = 2890 \text{ lb-p/min}$$

$$\text{Cantidad de enfriamiento artificial necesaria} = 12.550 - 2890 = 9660 \text{ lb-p/min.}$$

8. Un eje que gira a 900 rpm está soportado por cojinetes de 2 pul de diámetro y 3 pul de longitud. La temperatura superficial del cojinete es 180°F y la temperatura del cuarto, 90°F. El aceite utilizado tiene una viscosidad de 12,8 centipoises a la temperatura de operación (270°F), el huelgo diametral es 0,002 pul y los cojinetes deben funcionar en aire quieto, sin enfriamiento artificial. Determinar la carga permisible, W y la pérdida de potencia por cada cojinete.

Solución:

$$T_B - T_A = \frac{1}{2}(T_O - T_A), \quad T_B - 90^\circ = \frac{1}{2}(270 - 90), \quad T_B = 180^\circ \text{F}$$

$$H_g = fW \frac{\pi DN}{12} = \left[0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{12,8 \times 900}{W/6} \right) \left(\frac{2}{0,002} \right) \right] W \frac{\pi(2)(900)}{12}$$

$$H_d = \frac{(\Delta T + 33)^2}{55} LD = \frac{(90 + 33)^2}{55} (3)(2)$$

Hacer $H_g = H_d$ para obtener $W = 117$ lb. Remplazando W por 117 en la ecuación de H_g , obtenemos $H_g = 1650$ lb-p/min. En consecuencia, la pérdida de potencia es $1650/33.000 = 0,05$ HP.

9. Un engranaje está montado sobre un eje de forma tal que la carga total radial sobre un cojinete es 3000 lb y la carga total radial sobre el otro cojinete es 4000 lb. Ambos cojinetes tienen 6 pul de longitud. Los cojinetes están ajustados a 3,502/3,500 y los muñones a 3,497/3,495. En la tabla siguiente se da la viscosidad del aceite a diferentes temperaturas.

Temperatura, °F	200	220	240	260	280
VUS, seg	300	175	105	76	60
Viscosidad cinemática, centistokes	65	38	22	14	10

¿Cuál cojinete funcionará más caliente? ¿Qué combinación de los diámetros de cojinetes y muñones producirá la más alta temperatura de operación? Determinar también la temperatura

superficial del cojinete más caliente, empleando la ecuación de McKee para calcular el coeficiente de rozamiento. Suponer que la gravedad específica del aceite a la temperatura de funcionamiento es 0,9. El eje gira a 500 rpm.

Solución:

El cojinete más cargado con huelgo mínimo funcionará a la máxima temperatura.

$$\text{Huelgo mínimo} = 3,500 - 3,497 = 0,003''. p = 4000/(6 \times 3,5) = 190 \text{ psi.}$$

$$f = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{ZN}{p} \right) \left(\frac{D}{C} \right) = 0,002 + \frac{473}{10^{10}} \left(\frac{500Z}{190} \right) \left(\frac{3,5}{0,003} \right) = 0,002 + \frac{145Z}{10^8}$$

Suponiendo que todo el calor generado sale del cojinete por medio de transferencia de calor y el cojinete está en aire quieto,

$$\begin{aligned} fW \frac{\pi DN}{12} &= \frac{(\Delta T + 33)^2}{55} DL \\ (0,002 + \frac{145Z}{10^8})(4000) \frac{\pi(3,5)(500)}{12} &= \frac{(T_B - 70 + 33)^2}{55} (6)(3,5) \\ 3660 + 265Z &= (T_B - 37)^2(21/55) \end{aligned}$$

La última ecuación se puede balancear por el método de ensayo y error.

Ensayemos: Temperatura del aceite, $T_O = 270^\circ\text{F}$. Ahora, viscosidad cinemática = 12 centistokes, $Z = 12(0,9) = 10,8$ centipoises y la temperatura superficial del cojinete, $T_B = \frac{1}{2}(270 - 70) + 70 = 170^\circ\text{F}$. Entonces

$$3660 + 265(10,8) = 6520 \quad \text{y} \quad (170 - 37)^2(21/55) = 6750$$

que es un balance suficientemente aproximado. Esto indica que la temperatura superficial del cojinete será aproximadamente 170°F .

10. Un cojinete de 3 pul de diámetro soporta una carga radial de 800 lb. El cojinete tiene una longitud de 3 pul y el eje funciona a 400 rpm. Suponer un espesor mínimo de película de 0,00075 pul y un ajuste de tercera clase para el agujero del cojinete. Utilizando las curvas de Raimondi y Boyd determinar, (a) la viscosidad del aceite adecuado, μ , (b) el coeficiente de rozamiento, f , (c) el calor generado, H_g , (d) la cantidad de aceite bombeado a través del cojinete, Q , (e) las pérdidas laterales (la cantidad de aceite que se debe suministrar al cojinete), (f) la elevación de temperatura del aceite que fluye a través del cojinete.

Solución:

- (a) Para un ajuste de tercera clase, el máximo huelgo es 0,004 pul.

El valor del número de Sommerfeld, S , se puede determinar en la figura 23-9, utilizando el valor $2h_o/C = 2(0,00075)/0,004 = 0,375$, que corresponde a un $S = 0,105$.

$$\text{Entonces } S = 0,105 = \frac{\mu N'}{p} \left(\frac{D}{C} \right)^2 = \frac{\mu(400/60)}{800/(3 \times 3)} \left(\frac{3,000}{0,004} \right)^2 \quad \text{de donde } \mu = 2,49 \times 10^{-6} \text{ reyns.}$$

- (b) En la figura 23-8, $S = 0,105$ da $f(D/C) = 3,0$. Entonces $f(3/0,004) = 3,0$ y $f = 0,004$.

$$(c) H_g = fW\pi DN/12 = (0,004)(800)(\pi)(3)(400)/12 = 1005 \text{ lb-p/min}$$

- (d) En la figura 23-10, $S = 0,105$ da $\frac{4Q}{DCN'L} = 4,4$. Entonces

$$\frac{4Q}{(3)(0,004)(400/60)(3)} = 4,4 \quad \text{y} \quad Q = 0,264 \text{ pul}^3/\text{seg.}$$

- (e) En la figura 23-11, $S = 0,105$ da $Q_s/Q = 0,7$. Entonces $Q_s = (0,7)(0,264) = 0,185 \text{ pul}^3/\text{seg.}$

- (f) En la figura 23-12, $S = 0,105$ corresponde a $\frac{J\gamma c \Delta T}{p} = 13,5$, donde $J = 9336 \text{ lb-pul/Btu}$, $\gamma = 0,03 \text{ lb/pul}^3$, $c = 0,4 \text{ Btu/lb-}^\circ\text{F}$ (supuesto) y $p = 800/9 \text{ psi}$. Entonces $\Delta T = 10,7^\circ\text{F}$ es la elevación de temperatura en la película de aceite situada entre el borde de entrada y el borde de salida de la cuña.

PROBLEMAS PROPUESTOS

11. Un eje de 4 pul de diámetro que funciona a 2000 rpm está soportado por un cojinete completo de 6 pul de longitud que está sometido a una carga radial de 9600 lb. La temperatura de operación del aceite está limitada a 175°F y la temperatura del aire circundante es 100°F. Suponer que $ZN/p = 200$ y utilizar las ecuaciones de McKee y Lasche. Determinar el coeficiente de rozamiento, la presión en el cojinete, el calor generado, el calor disipado y el aceite que se debe emplear. ¿Se necesita utilizar enfriamiento artificial?
Resp. 0,01146, 400 psi, 231.000 lb-p/min, 1725 lb-p/min, SAE 70. Sí
12. Un cojinete completo de peso mediano de 2 pul de diámetro y 4 pul de longitud, soporta una carga de 600 lb cuando el eje gira a 800 rpm. Suponiendo que la diferencia entre la temperatura de funcionamiento de la superficie del cojinete y la temperatura del aire circundante quieto es 70°F, escoger entre los siguientes valores el coeficiente de rozamiento necesario para eliminar la necesidad de enfriamiento artificial: 0,00432, 0,00615, 0,00715, 0,00816 y 0,00256. Utilizar las ecuaciones de McKee y Lasche. Resp. $f = 0,00615$
13. Un cojinete de $2\frac{7}{16}$ pul de diámetro y 4 pul de longitud soporta una carga de 500 lb a 600 rpm. Si la temperatura del cuarto es 75°F, ¿qué viscosidad debe tener el aceite utilizado, para limitar la temperatura superficial del cojinete a 140°F? Utilizar las ecuaciones de McKee y Lasche. Resp. $Z = 12,45$ centipoises
14. Un rotor que pesa 1200 lb está montado en el punto medio de un eje de 2 pul de diámetro, que gira a 800 rpm, entre dos cojinetes. El aceite escogido tiene una viscosidad de 7,2 centipoises a la temperatura de operación de 230°F. ¿Cuál debe ser la longitud de los cojinetes, si deben funcionar en una atmósfera a 90°F, sin enfriamiento artificial? Utilizar las ecuaciones de McKee y Lasche. Resp. $L = 3,2$ pul
15. Una carga de 600 lb está soportada por un cojinete de 3 pul de longitud, sobre un eje de 2,5 pul de diámetro. El cojinete tiene un huelgo de 0,002 pul y está lubricado con un aceite cuya viscosidad a la temperatura de operación es 20,7 pul. Determinar la velocidad máxima de rotación si el cojinete puede disipar, por transferencia de calor, 3500 lb-p/min. Utilizar la ecuación de McKee. Resp. 700 rpm.
16. Un cojinete de 6 pul de diámetro y 9 pul de longitud soporta una carga radial de 2000 lb a 1200 rpm. El huelgo diametral es 0,003 pul. Si se consumen 2 HP por rozamiento, ¿cuál es la viscosidad, en centipoises, del aceite empleado, a la temperatura de operación? Utilizar la ecuación de McKee.
Resp. $Z = 10,1$ centipoises
17. Un cojinete de 3,5 pul de diámetro y 6 pul de longitud tiene una carga radial de 300 psi sobre el área proyectada. La velocidad del eje es 500 rpm y se utiliza un ajuste de segunda clase. La temperatura del aire circundante es 70°F y el aceite empleado tiene una viscosidad de 9,9 centipoises, a la temperatura de operación. Determinar la temperatura probable de la superficie del cojinete, suponiendo que todo el calor generado se disipa por transferencia de calor, de acuerdo con $H_d = \frac{(T_B - T_A + 33)^2}{55} \times LD$. Utilizar las ecuaciones de McKee y Lasche.
Resp. $T_B = 180^\circ\text{F}$
18. Un cojinete de 3 pul de diámetro y 5 pul de longitud tiene un huelgo diametral mínimo de 0,003 pul y soporta una carga de 400 lb. El muñón gira a 500 rpm. El aceite utilizado tiene las siguientes características viscosidad-temperatura:

Temperatura, °F	240	260	280
Viscosidad, centipoises	19,8	13,0	9,0

Utilizando la ecuación de McKee, determinar la temperatura aproximada del aceite, suponiendo que la temperatura del cuarto es 80°F y que todo el calor generado se disipa por transferencia de calor, de acuerdo con $H_d = (\Delta T + 33)^2(15/55)$. Resp. $T_O = 270^\circ\text{F}$

19. Un cojinete completo de 4 pul de diámetro y 4 pul de longitud está lubricado con agua y soporta una carga de 300 lb. El eje gira a 1000 rpm, el huelgo diametral es 0,004 pul y el agua tiene una viscosidad de $4,35 \times 10^{-8}$ reyns. Suponer $c = 1,0$ Btu/lb-°F y $\gamma = 0,035$ lb/pul³. Utilizando las curvas de Raimondi y Boyd determinar el coeficiente de rozamiento, el espesor mínimo de película, el flujo de lubricante dentro del cojinete, las pérdidas laterales de lubricante, la elevación de temperatura del agua y la pérdida de potencia debida al rozamiento.
Resp. $f = 0,0016$; $h_O = 0,00034$ pul; $Q = 4,4$ pul³/seg; $Q_S = 3,83$ pul³/seg; $\Delta T = 1,38^\circ\text{F}$, 0,015 HP
20. Un cojinete completo de 8 pul de diámetro y 8 pul de longitud soporta una carga radial de 10.000 lb. El muñón gira a 1200 rpm y la razón D/C es 1000. La viscosidad del aceite, a la temperatura de operación (180°F), es $2,5 \times 10^{-6}$ reyns. Utilizando las curvas de Raimondi y Boyd determinar el espesor mínimo de película, el calor generado en el cojinete, la pérdida natural de calor del cojinete, suponiendo que $H_d = \frac{(\Delta T + 33)^2}{31} \times (\text{área proyectada})$, la cantidad de aceite perdido por los extremos y el calor que sale del cojinete, debido a las pérdidas laterales.
Resp. $h_O = 0,0026$ pul; $H_g = 1,76 \times 10^6$ lb-p/min, $H_d = 16.000$ lb-p/min, $Q_S = 4,38$ pul³/seg, 1,025 Btu/min

Capítulo 24

Trasmisión por correas

LAS CORREAS PLANAS Y LAS CORREAS EN V se pueden emplear para transmitir potencia de un eje a otro, cuando no se necesita mantener una razón de velocidades exacta entre los dos ejes. En la mayor parte de las transmisiones por correa, las pérdidas de potencia debidas al deslizamiento y al arrastre son de 3 a 5 por ciento. En el presente estudio se supone que los ejes son paralelos. Sin embargo, tanto las correas planas como las correas en V se pueden utilizar para transmitir potencia entre ejes no paralelos, si se satisfacen requerimientos especiales. En este caso, para que la correa se apoye correctamente sobre las poleas, se debe aproximar cada polea a un plano central perpendicular al eje de rotación de la polea.

EL DISEÑO DE UNA CORREA implica la selección de la correa adecuada para transmitir una determinada potencia o bien, la determinación de la potencia que se puede transmitir con una correa plana o con una correa en V dada. En el primer caso, la anchura de la correa es desconocida, mientras que en el segundo caso es conocida. En ambos casos se supone el espesor de la correa.

La potencia transmitida por una transmisión por correa es una función de las tensiones y de la velocidad de la correa.

$$\text{potencia} = \frac{(T_1 - T_2)v}{550} \text{ caballos de fuerza}$$

donde T_1 = tensión en el ramal tirante de la correa, en lb
 T_2 = tensión en el ramal flojo de la correa, en lb
 v = velocidad de la correa, en p/seg

Cuando el espesor de una correa plana es dado, pero se desconoce su anchura, se emplea la siguiente fórmula para determinar el esfuerzo s_2 (psi).

$$\frac{s_1 - w'v^2/g}{s_2 - w'v^2/g} = e^{f\alpha}$$

donde s_1 = esfuerzo máximo permisible, en psi
 s_2 = esfuerzo en el ramal flojo de la correa, en psi
 w' = peso de 1 pie de una correa que tiene una sección trasversal de 1 pul²
 v = velocidad de la correa, en p/seg
 g = aceleración de la gravedad, 32,2 p/seg²
 f = coeficiente de rozamiento entre la correa y la polea
 α = ángulo de abrazamiento de la correa sobre la polea, en rad

En caso que se desconozca la anchura, el área de la sección trasversal requerida puede determinarse por

$$\frac{T_1 - T_2}{s_1 - s_2} = \text{área de la sección trasversal requerida}$$

Por consiguiente, la anchura que debe tener la correa es $b = \text{área}/\text{espesor}$. El valor de $(T_1 - T_2)$ se puede determinar con base en los caballos de fuerza estipulados: $HP = (T_1 - T_2)v/550$.

La máxima tensión en el ramal tirante de la correa depende del esfuerzo permisible del material de la correa. Generalmente se utilizan cuero y tejido de algodón impregnados en caucho y superpuestos en capas. El esfuerzo de tensión permisible para correas de cuero está generalmente entre 300 y 500 psi y el esfuerzo permisible para correas de caucho estará entre 150 y 250 psi, según la calidad del material. Las correas de cuero se pueden obtener de una sola capa de 1/8 pul, 5/32 pul o 3/16 pul de espesor. También se puede disponer de correas de dos y tres capas, cada una de las cuales puede tener uno de los espesores dados anteriormente. El peso específico del cuero es aproximadamente 0,035 lb/pul³. Las correas de caucho se pueden obtener en capas de 3/64 pul a 5/64 pul de espesor y tienen un peso específico de 0,045 lb/pul³, aproximadamente.

Para determinar el valor de T_2 , tanto para correas planas como para correas en V, cuando la anchura y el espesor de la correa son conocidos, se emplea la fórmula

$$\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha/\sin \frac{1}{2}\theta}$$

donde w = peso de 1 pie de correa; v = velocidad de la correa, p/seg; g = aceleración de la gravedad, 32,2 p/seg²; f = coeficiente de rozamiento entre la correa y la polea; α = ángulo de abrazamiento, radianes; θ = ángulo de la garganta, para correas en V (para una correa plana θ es 180°).

La cantidad wv^2/g es debida a la fuerza centrífuga que tiende a separar la correa de la polea y reduce la potencia que se puede transmitir.

LA CAPACIDAD DE CONDUCIR CARGA de un par de poleas está determinada por la que tenga el menor valor de $e^{f\alpha/\sin \frac{1}{2}\theta}$. Es por esta razón que una correa en V se puede utilizar con una polea acanalada y una polea plana, con lo cual se economizan gastos innecesarios.

La excesiva flexión de una correa hace que su vida se disminuya. Para obtener una vida razonable de la correa, la relación mínima del diámetro de una polea al espesor de la correa debe ser aproximadamente 30.

LA SELECCION DE CORREAS se puede hacer con base en la aplicación de las ecuaciones apropiadas o utilizando las tablas suministradas por la American Leather Belting Association para correas planas y los catálogos suministrados por los diferentes fabricantes de correas en V. En este libro se empleará la aplicación de las ecuaciones, aunque las recomendaciones de la A.L.B.A. y de los fabricantes de correas en V generalmente darán diseños más seguros, utilizando factores apropiados de aplicación.

ANGULOS DE ABRAZAMIENTO. Los ángulos de abrazamiento de una correa abierta se pueden determinar por

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{R - r}{C} \\ \alpha_1 &= 180^\circ - 2\beta = 180^\circ - 2 \sin^{-1} \frac{R - r}{C}, \quad \alpha_2 = 180^\circ + 2\beta = 180^\circ + 2 \sin^{-1} \frac{R - r}{C} \end{aligned}$$

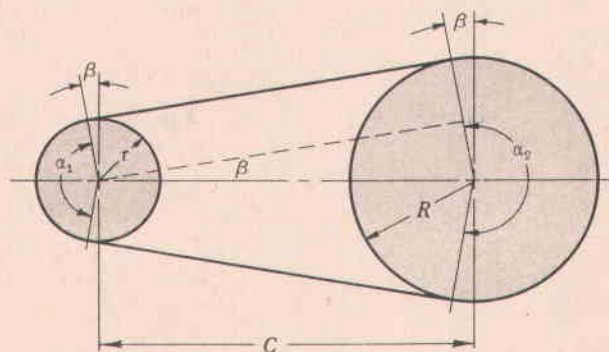


Fig. 24-1

Los ángulos de abrazamiento de una transmisión por **correa cruzada** se pueden determinar por

$$\text{sen } \beta = \frac{R+r}{C}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha_2 = 180^\circ + 2\beta \\ &= 180^\circ + 2 \text{ sen}^{-1} \frac{R+r}{C}\end{aligned}$$

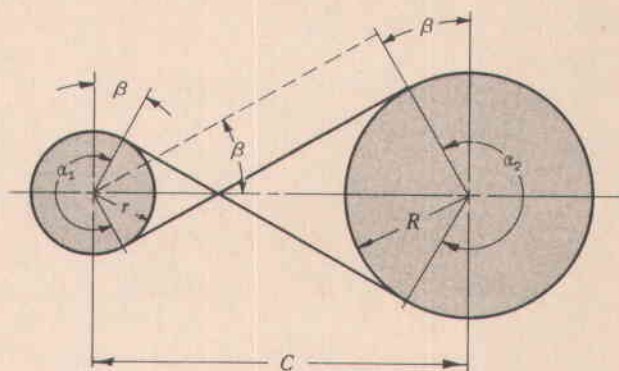


Fig. 24-2

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que $\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha}$ para una correa plana.

Solución:

- (a) Considerar un elemento diferencial de correa. Las fuerzas que actúan en el elemento diferencial son: (1) Las tensiones T y $(T + dT)$, (2) la fuerza centrífuga $(wv^2/g)d\phi$, (3) la fuerza normal dN , y (4) la fuerza de rozamiento $f dN$.

Obsérvese que no hay momento de flexión y que sobre la correa no actúa ninguna fuerza de corte. La correa es un elemento flexible que no puede sufrir corte ni flexión de magnitudes apreciables comparadas con las otras fuerzas.

- (b) Estableciendo arbitrariamente las direcciones x y y en el elemento de correa y considerando el elemento en equilibrio, puesto que se incluye la fuerza de inercia,

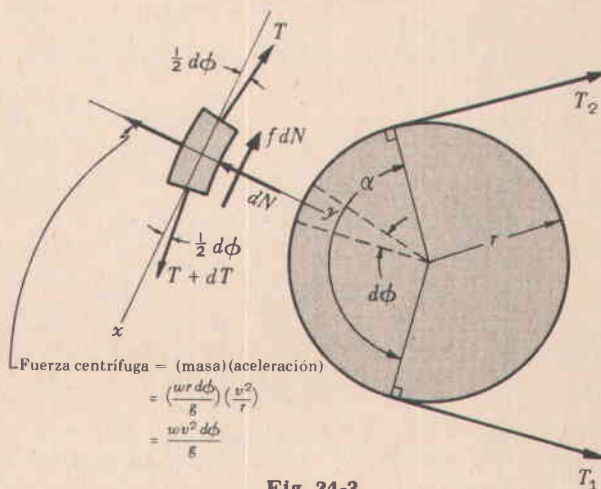


Fig. 24-3

$$\sum F_x = 0 \quad \text{o} \quad (T + dT) \cos \frac{1}{2} d\phi - f dN - T \cos \frac{1}{2} d\phi = 0$$

$$\sum F_y = 0 \quad \text{o} \quad (T + dT) \sin \frac{1}{2} d\phi + T \sin \frac{1}{2} d\phi - dN - (wv^2/g) d\phi = 0$$

- (c) Como $\cos \frac{1}{2} d\phi = 1$ y $\sin \frac{1}{2} d\phi = \frac{1}{2} d\phi$ en el límite

$$1) \quad (T + dT)(1) - f dN - T = 0 \quad \text{o} \quad dN = dT/f$$

$$2) \quad (T + dT)(\frac{1}{2} d\phi) + T(\frac{1}{2} d\phi) - dN - (wv^2/g) d\phi = 0$$

Haciendo $dN = dT/f$ en (2) y despreciando las diferenciales de segundo orden,

$$T d\phi - dT/f - (wv^2/g) d\phi = 0$$

- (d) Entonces $\frac{dT}{T - wv^2/g} = f d\phi$, $\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T - wv^2/g} = \int_0^\alpha f d\phi$, y finalmente $\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha}$.

(Véase en la página 291 las unidades adecuadas.)

2. Modificar la ecuación del problema 1 para el caso de una correa en V.

Solución:

- (a) Comparando la figura 24-4 con la 24-3, las fuerzas análogas a las que actúan sobre la correa plana son: T , $T + dT$, $(wv^2/g)d\phi$. La diferencia tiene lugar en la fuerza normal y en la fuerza de rozamiento. Se supone que las fuerzas normales que actúan sobre las dos caras de la correa en V, son iguales ($\frac{1}{2}dN$). La fuerza normal resultante en el plano x-y es $dN \sin \frac{1}{2}\theta$, donde θ es el ángulo de la correa. Obsérvese que la suma de las fuerzas de rozamiento no depende del valor del ángulo θ , sino que es $2[f(\frac{1}{2}dN)] = fdN$.

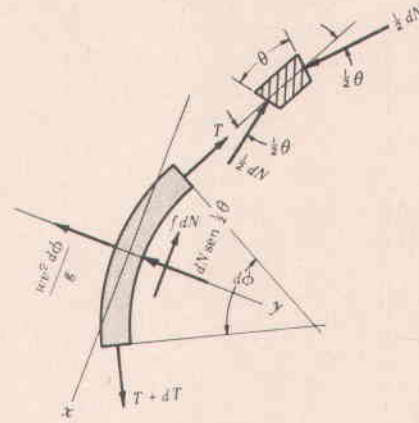


Fig. 24-4

- (b) $\sum F_x = 0$ o
 $(T + dT) \cos \frac{1}{2}d\phi - fdN - T \cos \frac{1}{2}d\phi = 0$
 $\sum F_y = 0$ o
 $(T + dT) \sin \frac{1}{2}d\phi + T \sin \frac{1}{2}d\phi - dN \sin \frac{1}{2}\theta - (wv^2/g)d\phi = 0$

- (c) Como $\cos \frac{1}{2}d\phi = 1$ y $\sin \frac{1}{2}d\phi = \frac{1}{2}d\phi$ en el límite,

$$1) (T + dT) - fdN - T = 0 \quad \text{o} \quad dN = dT/f$$

$$2) (T + dT)(\frac{1}{2}d\phi) + T(\frac{1}{2}d\phi) - dN \sin \frac{1}{2}\theta - (wv^2/g)d\phi = 0$$

Haciendo $dN = dT/f$ en (2) y despreciando las diferenciales de segundo orden,

$$T d\phi - (dT/f) \sin \frac{1}{2}\theta - (wv^2/g)d\phi = 0$$

- (d) Entonces
 $\frac{dT}{T - wv^2/g} = \frac{f}{\sin \frac{1}{2}\theta} d\phi$, $\int_{T_2}^{T_1} \frac{dT}{T - wv^2/g} = \int_0^\alpha \frac{f}{\sin \frac{1}{2}\theta} d\phi$, y finalmente $\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha/\sin \frac{1}{2}\theta}$

Obsérvese que si se toma $\theta = 180^\circ$ (para una correa plana) esta ecuación se reduce a la que se dedujo en el problema 1.

13. Un eje transmite una potencia máxima de una polea a un acoplamiento flexible. El eje gira a 900 rpm, la polea tiene 16 pul de diámetro, los ramales de la correa son horizontales, la correa es de cuero y tiene 2 pul de ancho y $\frac{1}{4}$ pul de espesor. El máximo esfuerzo en la correa es 300 psi y el coeficiente de rozamiento es 0,3. Si el eje se debe probar, con base en la resistencia, en la sección A-A, ¿qué momento de flexión y qué momento de torsión se deben utilizar? El cuero pesa 0,035 lb/pul³.

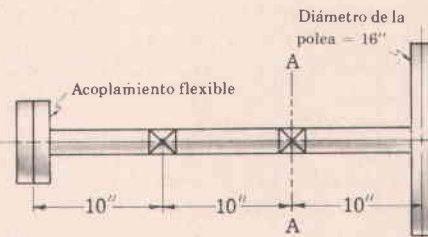


Fig. 24-5

Solución:

(a) $\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha}$, $\frac{150 - 25,7}{T_2 - 25,7} = e^{0,3\pi}$, $T_2 = 74,3 \text{ lb}$

donde $w = (12)(2)(\frac{1}{4})(0,035) = 0,210 \text{ lb/p}$

$g = 32,2 \text{ p/seg}^2$, $\alpha = \pi \text{ radianes}$

$v = \pi DN = \pi(16/12 \text{ pies})(900/60 \text{ rps}) = 62,8 \text{ p/seg}$

$T_1 = (300 \text{ lb/pul}^2)(2 \times \frac{1}{4} \text{ pul}^2) = 150 \text{ lb}$

- (b) El momento de flexión en la sección A-A es

$$(T_1 + T_2)(10) = (150 + 74,3)(10) = 2243 \text{ lb-pul}$$

- (c) El momento de torsión en la sección A-A es

$$(T_1 - T_2)(R) = (150 - 74,3)(8) = 606 \text{ lb-pul}$$

4. Un ventilador es conducido por un motor que gira a una velocidad de 880 rpm, por medio de una correa de cuero de doble capa que tiene 5/16 pul de grueso y 10 pul de ancho. Los diámetros de la polea motriz y la polea conducida son 14 pul y 54 pul, respectivamente. La distancia entre centros es 54 pul y ambas poleas están hechas de hierro fundido. El coeficiente de rozamiento del cuero contra el hierro fundido es 0,35. El esfuerzo permisible para la correa es 350 psi, que ya tiene en cuenta el factor de seguridad y el hecho que una correa de doble capa no tiene el doble de capacidad que una correa de una sola capa. (Una correa de doble capa tiene aproximadamente el 85% de la capacidad de una correa de una sola capa, que tenga el mismo espesor.) La correa pesa 0,035 lb/pul³. ¿Cuál es la capacidad de potencia de la correa?

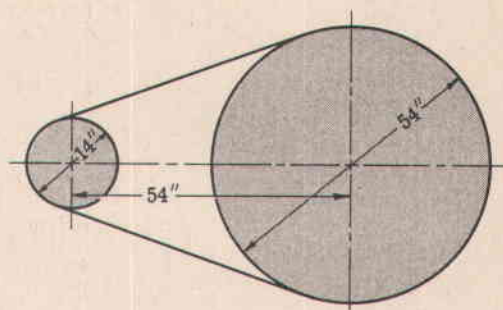


Fig. 24-6

Solución:

Los ángulos de abrazamiento de la polea menor y de la polea mayor son, respectivamente,

$$\alpha_1 = 180^\circ - 2 \sin^{-1} (R-r)/C = 180^\circ - 2 \sin^{-1} (27-7)/54 = 136,6^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ + 2 \sin^{-1} (R-r)/C = 223,4^\circ$$

La polea que regula el diseño es la que tiene el valor más pequeño de $e^{f\alpha}$. En este caso la polea menor es la que regula el diseño, es decir, que la polea menor está transmitiendo su máxima potencia cuando la correa comienza a deslizar, mientras que la polea mayor no está desarrollando su máxima capacidad en este punto.

Entonces

$$\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha_1}, \quad \frac{1094 - 117}{T_2 - 117} = e^{0,35 (136,6\pi/180)} = 2,30, \quad T_2 = 542 \text{ lb}$$

donde

$$w = 12(10)(5/16)(0,035) = 1,31 \text{ p/seg}^2$$

$$g = 32,2 \text{ p/seg}^2$$

$$v = \pi DN = \pi(14/12 \text{ p})(880/60 \text{ rps}) = 53,7 \text{ p/seg}$$

$$T_1 = (350 \text{ lb/pul}^2) \left(\frac{5}{16} \times 10 \text{ pul}^2 \right) = 1094 \text{ lb}$$

$$\text{Capacidad de potencia} = \frac{(T_1 - T_2)v}{550} = \frac{(1094 - 542)(53,7)}{550} = 53,9 \text{ HP} \approx 40,2 \text{ kW}$$

5. Un compresor es conducido por un motor que gira a 900 rpm, por medio de una correa plana que tiene $\frac{3}{8}$ " de espesor y 10" de ancho. La polea del motor tiene 12" de diámetro y la del compresor 60". La distancia entre ejes es 60" y se emplea una polea loca para hacer que el ángulo de abrazamiento de la polea menor sea 220° y el de la polea mayor 270°. El coeficiente de rozamiento entre la correa y la polea menor es 0,3 y entre la correa y la polea mayor, 0,25. El esfuerzo máximo permisible en la correa es 300 psi y la correa pesa 0,035 lb/pul³. (a) ¿Cuál es la capacidad de potencia de esta transmisión? (b) Si se cambia la polea menor por una polea para correa en V múltiple (ángulo de la garganta $\theta = 34^\circ$ y coeficiente de rozamiento = 0,25), se emplea la misma polea del compresor y se elimina la polea loca, ¿se obtiene una transmisión más efectiva con mayor capacidad de potencia? Suponer que los diámetros primitivos de la polea ranurada y de la polea mayor son los mismos que cuando se utilizaba la correa plana: 12" y 60". Suponer también que la suma de las fuerzas máximas producidas en cada correa en V es igual a la fuerza máxima producida en la correa plana (es decir que T es constante) y que el efecto de la fuerza centrífuga sobre todas las correas en V es igual al efecto producido sobre la correa plana.

Solución:

(a) Para la polea menor, $e^{f\alpha} = e^{0,3(220\pi/180)} = 3,16$; para la polea mayor, $e^{f\alpha} = e^{0,25(270\pi/180)} = 3,26$. Por tanto, la polea menor regula el diseño. Entonces

$$\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha}, \quad \frac{1125 - 108}{T_2 - 108} = 3,16, \quad T_2 = 430 \text{ lb}$$

donde

$$T_1 = (300)(10)(3/8) = 1125 \text{ lb}$$

$$w = 12(10)(3/8)(0,035) = 1,57 \text{ lb/p}$$

$$v = \pi(1)(15) = 47,1 \text{ p/seg}$$

$$\text{Capacidad de potencia} = \frac{(T_1 - T_2)v}{550} = \frac{(1125 - 430)(47,1)}{550} = 59,6 \text{ HP}$$

(b) Para un montaje con correa abierta, sin polea loca:

Angulo de abrazamiento de la polea menor = $180^\circ - 2 \sin^{-1} (30 - 6)/60 = 132,8^\circ$; ángulo de abrazamiento de la polea mayor = $227,2^\circ$. Ahora,

para la polea menor (correa en V en la garganta), $e^{f\alpha/\sin \frac{\alpha}{2}} = e^{0,25(132,8\pi/180)/\sin 17^\circ} = 7,27$

para la polea mayor (correa en V sobre una polea plana), $e^{f\alpha} = e^{0,25(227,2\pi/180)} = 2,69$

De este modo, aunque la capacidad de la polea menor se aumenta, la polea mayor será ahora la base del diseño, con $e^{f\alpha} = 2,69$. Utilizando $\frac{1125 - 108}{T_2 - 108} = 2,69$ o $T_2 = 486$ lb, la nueva capacidad de potencia (disminuida) es $\frac{(1125 - 486)(47.1)}{550} = 54,8$ HP.

6. Una transmisión por correa cruzada debe transmitir 10 HP a una velocidad de la polea menor de 1000 rpm. La polea menor tiene un diámetro de 10", la relación de velocidades es 2 y la distancia entre centros, 50". Se desea utilizar una correa plana de cuero de $\frac{1}{4}$ " de espesor y se espera que el coeficiente de rozamiento sea 0,3. Si el máximo esfuerzo permisible en la correa es 250 psi, determinar el ancho b que debe tener la correa. El cuero pesa 0,035 lb/pul³.

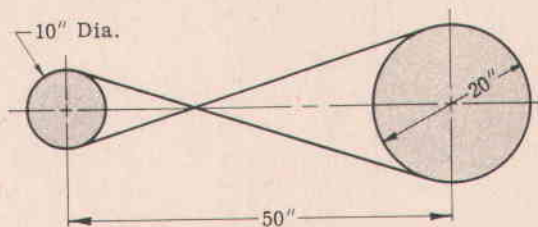


Fig. 24-7

Solución:

Las dos poleas tienen el mismo ángulo de abrazamiento y la misma capacidad de potencia.

$$\alpha = 180 + 2 \sin^{-1} (R + r)/C = 180 + 2 \sin^{-1} (10 + 5)/50 = 214,8^\circ$$

$$\frac{s_1 - w'v^2/g}{s_2 - w'v^2/g} = e^{f\alpha}, \quad \frac{250 - 24,8}{s_2 - 24,8} = e^{0,3(214,8\pi/180)}, \quad s_2 = 97,8 \text{ psi}$$

donde $w' = 12(0,035) = 0,42$ lb/p-pul², $v = \pi(10/12)(1000/60) = 43,6$ p/seg

Utilizando $(T_1 - T_2) = \frac{(\text{hp})(550)}{v} = \frac{(10)(550)}{43,6} = 126$ lb, $A = \frac{T_1 - T_2}{s_1 - s_2} = \frac{126}{250 - 97,8} = 0,83$ pul² y el ancho b de la correa = $(0,83 \text{ pul}^2)/(\frac{1}{4} \text{ pul}) = 3,32$ pul. Utilizar $b = 3\frac{1}{2}$ pul.

7. Una transmisión con correas en V debe transmitir 25 HP desde una polea acanalada que tiene un diámetro primitivo de 10 pul y funciona a 1800 rpm hasta una polea plana de 36 pul de diámetro. La distancia entre ejes es 40". El ángulo de la garganta es $\theta = 40^\circ$, el coeficiente de rozamiento entre las correas y la polea acanalada es 0,2 y entre las correas y la polea plana, 0,2. La sección de las correas tiene las siguientes dimensiones: Ancho superior, $b_2 = 1,5$ "; ancho inferior, $b_1 = 0,75$ ", altura, $d = 1,0$ ". Las correas pesan 0,04 lb/pul³ y la tensión permisible en cada correa es 200 lb. ¿Cuántas correas se necesitan? (Nota: Primero analizar para una sola correa.)

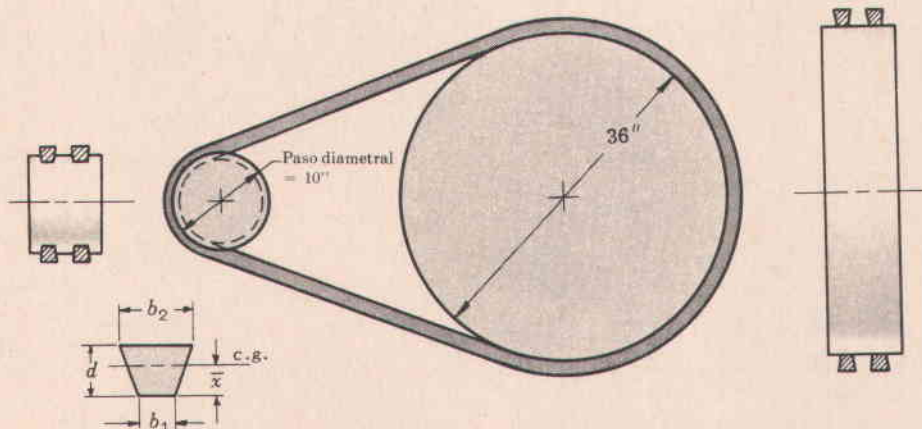


Fig. 24-8

Solución:

Mientras que el espesor de una correa plana generalmente es despreciable con respecto al diámetro de la polea, el espesor de una correa en V puede no ser despreciable. Determinar el diámetro primitivo de la correa en V sobre la polea plana, suponiendo que el diámetro primitivo se mide hasta el centroide de la sección de la correa.

La distancia desde la base hasta el centro de gravedad (C.G.) es

$$\bar{x} = \frac{d(b_1 + 2b_2)}{3(b_1 + b_2)} = \frac{1(0,75 + 2 \times 1,5)}{3(0,75 + 1,5)} = 0,56 \text{ pul}$$

Diámetro primitivo de la polea mayor = $36 + 2(0,56) = 37,1''$, o sea que radio primitivo = $18,6''$.

Para la polea menor, $\alpha = 180^\circ - 2 \sin^{-1} (18,6 - 5)/40 = 140,4^\circ$. Para la polea mayor, $\alpha = 219,6^\circ$.

Comparar la capacidad de las dos poleas, $e^{f\alpha/\sin \frac{1}{2}\theta}$,

$$\text{Polea menor: } e^{0,2(140,4\pi/180)/\sin 20^\circ} = 4,18. \quad \text{Polea mayor: } e^{0,2(219,6\pi/180)/\sin 90^\circ} = 2,15.$$

Por consiguiente, la polea mayor regula el diseño. (Obsérvese que el ángulo de la correa es ligeramente mayor de 40° , pero la correa acunará en la garganta a 40° .)

El área de la sección de una correa es $\frac{1}{2}(b_1 + b_2)(d) = \frac{1}{2}(0,75 + 1,5)(1) = 1,125 \text{ pul}^2$ y la tensión en el ramal flojo se encuentra de

$$\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha/\sin \frac{1}{2}\theta}, \quad \frac{200 - 103,5}{T_2 - 103,5} = 2,15, \quad T_2 = 148 \text{ lb}$$

$$\text{donde } w = 12(1,125)(0,04) = 0,54 \text{ lb/p} \quad v = \pi(10/12)(1800/60) = 78,5 \text{ p/seg.}$$

$$\text{Caballos de fuerza} = (T_1 - T_2)v/550 = (200 - 148)(78,5)/500 = 7,43 \text{ HP/correa.}$$

$$\text{Número necesario de correas} = (25 \text{ HP})/(7,43 \text{ HP/correa}) = 3,37. \text{ Utilizar 4 correas.}$$

8. Una polea de $9''$ está acunada a un eje y su plano central sobresale $10''$ a partir del cojinete más cercano, como se muestra en la figura 24-9. Se emplea un arreglo con correa abierta. La polea es conducida por un motor que gira a 1800 rpm , por medio de una correa plana y la relación de velocidades de las poleas es 1 a 1. La correa tiene $\frac{3}{8}''$ de grueso, $6''$ de ancho y pesa $0,035 \text{ lb/pul}^3$. El coeficiente de rozamiento entre la correa y la polea es $0,3$. La correa está trabajando con su máxima capacidad y su esfuerzo máximo permisible es 300 psi .

Se decide doblar la capacidad de potencia, y de las diferentes posibilidades que existen para lograrlo, en este problema se empleará la de aumentar el ancho de la correa. Supóngase que se aumenta el ancho de la correa y las demás condiciones permanecen iguales. (a) ¿Cuánto se debe aumentar el ancho de la correa para doblar la capacidad de potencia? (b) Suponiendo que el plano central de la polea permanece a la misma distancia del cojinete más cercano ($10''$), ¿en cuántas libras se aumentan las fuerzas producidas en los cojinetes? La distancia entre los cojinetes es $18''$. Suponer que la potencia se toma del eje por medio de un acoplamiento flexible.

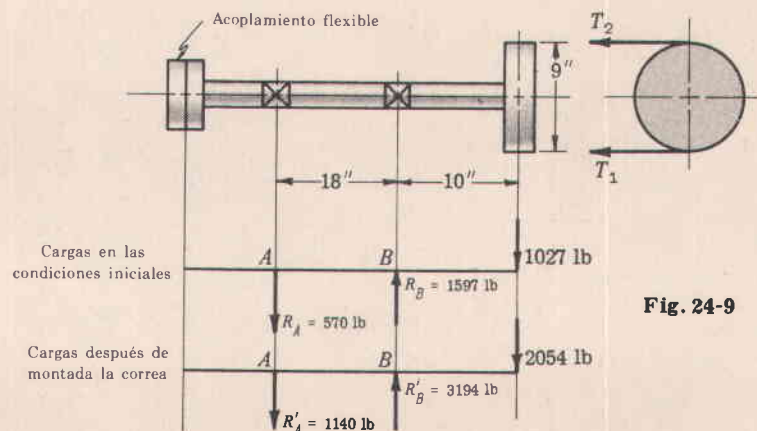


Fig. 24-9

Solución:

(a) Si se dobla el ancho de la correa, la capacidad de potencia también se dobla.

(b) Si la correa está transmitiendo su máxima potencia, la tensión en el ramal tirante es $T_1 = 300(6)(3/8) = 675$ lb. Para encontrar T_2 de las condiciones iniciales (ambas poleas tienen la misma capacidad), hacemos

$$\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha} \quad \frac{675 - 146,5}{T_2 - 146,5} = e^{0,3\pi} \quad T_2 = 352 \text{ lb}$$

donde $w = 12(6)(3/8)(0,035) = 0,94 \text{ lb/p}$ $v = \pi(9/12)(1800/60) = 70,6 \text{ p/seg}$

Fuerza resultante en la polea, que causa las reacciones en los cojinetes = $T_1 + T_2 = 675 + 352 = 1027$ lb.

La reacción del cojinete localizado en B se encuentra tomando momentos alrededor de A. La reacción del cojinete localizado en A se halla por suma de fuerzas.

$$1027(28) - R_B(18) = 0, \quad R_B = 1597 \text{ lb} \quad \text{y} \quad R_A + 1027 - 1597 = 0, \quad R_A = 570 \text{ lb}$$

Si se dobla la potencia, se doblan las reacciones de los cojinetes, es decir que $R'_A = 1140$ lb y $R'_B = 3194$ lb. Por tanto, el aumento de fuerzas en los cojinetes es: 570 lb para el cojinete izquierdo, A, y 1527 lb para el cojinete derecho, B.

9. Una transmisión con el motor pivoteado tiene varias ventajas sobre una transmisión central fija. Una de estas ventajas es que el alargamiento de la correa se corrige automáticamente, debido al peso del motor. Otra ventaja consiste en la reducción de cargas en los cojinetes, para funcionamiento con cargas parciales, según las proporciones utilizadas. Si el motor transmite a la polea A el 25% de la capacidad de carga total, ¿cuáles serán las cargas en los cojinetes localizados en C y D, expresadas como porcentajes de la capacidad de carga total de los cojinetes? Despreciar el peso de la armadura.

	<u>Polea A</u>	<u>Polea B</u>
Diámetro	6"	6"
Coefficiente de rozamiento	0,4	0,5
Angulo de abrazamiento	180°	180°

La correa tiene una velocidad de 300 p/min, 4" de ancho, $\frac{1}{8}$ " de grueso y pesa 0,04 lb/pul³. El motor pesa 150 lb.

Solución:

(a) El primer paso es analizar la capacidad de carga total. Aíslense el motor y la polea, como se muestra. Tomando momentos alrededor del centro del pasador E,

$$-150(6) + T_1(3) + T_2(9) - 37,4(6) = 0$$

o $(1) \quad T_1 + 3T_2 = 374,8$

Cuando se está trabajando con la capacidad máxima, la correa está a punto de deslizarse y se utiliza el máximo rozamiento en la polea motriz (siendo $e^{f\alpha}$ para la polea motriz menor que $e^{f\alpha}$ para la polea conducida). Entonces

$$\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{f\alpha} \quad \frac{T_1 - 18,7}{T_2 - 18,7} = e^{0,4\pi}$$

o $(2) \quad T_1 - 3,51T_2 = -47$

donde $w = 12(4)(1/8)(0,04) = 0,24 \text{ lb/p}$

$$v = 300/60 = 50 \text{ p/seg}$$

La solución simultánea de (1) y (2) es $T_1 = 180,4$ lb, $T_2 = 64,8$ lb; y $T_1 + T_2 = 245,2$ lb.

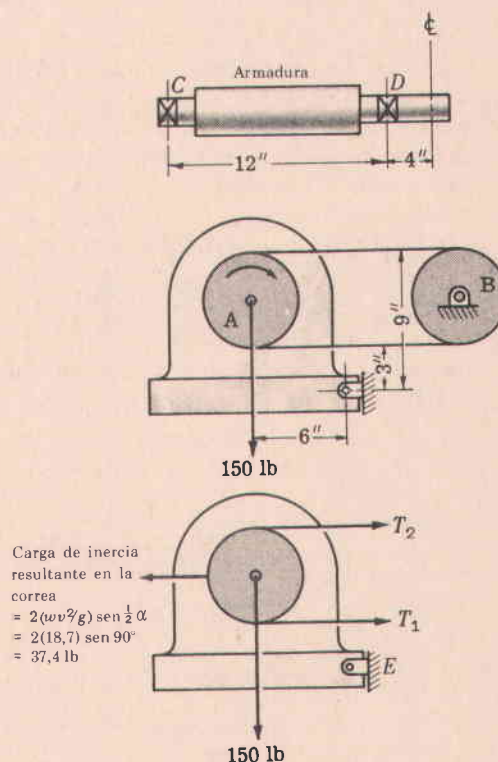


Fig. 24-10

- (b) Para una cuarta parte de carga, designamos T_1' y T_2' las fuerzas sobre la correa. Tomando momentos alrededor de E ,

$$(3) \quad -150(6) + T_1'(3) + T_2'(9) - 37,4(6) = 0$$

y como para una cuarta parte de carga, $(T_1' - T_2') = \frac{1}{4}(T_1 - T_2)$

$$(4) \quad T_1' - T_2' = \frac{1}{4}(180,4 - 64,8) = 28,9$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (3) y (4), $T_1' = 115,4$ lb y $T_2' = 86,5$ lb.

Obsérvese que $\frac{T_1 - wv^2/g}{T_2 - wv^2/g} = e^{fa}$ no se aplica para una cuarta parte de carga, puesto que no se está transmitiendo la máxima potencia, es decir que la correa no está a punto de deslizarse.

- (c) Las cargas en los cojinetes, para una cuarta parte de capacidad, expresadas como porcentajes de las cargas en los cojinetes, con capacidad total, son

$$\frac{T_1' + T_2' - 2wv^2/g}{T_1 + T_2 - 2wv^2/g} = \frac{201,9 - 37,4}{245,2 - 37,4} = 0,79 = 79\%$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

10. Un trabajador levanta una carga con la ayuda de un malacate que tiene un tambor no acanalado de hierro fundido, como se muestra en la figura 24-11. El tambor tiene 10 pul de diámetro, gira a 25 rpm y tiene enrolladas cuatro vueltas de una cuerda de 1 pul de diámetro, uno de cuyos extremos hala el trabajador con una fuerza de 75 kg. La cuerda pesa 0,20 lb/p y el coeficiente de rozamiento es 0,10. (a) ¿Qué carga se puede levantar con esta combinación? (b) ¿Cuánta potencia se requiere?

Resp. (a) 992 lb, despreciando el efecto centrífugo
(b) 1,85 HP, con base en un momento de $(992 - 75)(5,5) = 466$ lb-pul

11. Una correa de cuero debe transmitir 30 HP desde una polea motriz cubierta con fibra, de 10 pul de diámetro, que gira a 1200 rpm, hasta una polea de acero de 24 pul. El coeficiente de rozamiento entre la polea de acero y la correa es 0,30 y entre la polea motriz y la correa, 0,40. La distancia entre ejes es 72 pul. Suponer que el máximo esfuerzo de trabajo permisible en la correa es 250 psi y que la correa pesa 0,035 lb/pul³. ¿Cuál de las siguientes correas es más adecuada: Una correa de $\frac{5}{16}$ " de grueso o una correa de $\frac{1}{2}$ " de grueso? Calcular el ancho necesario de la correa.

Resp. Para obtener una vida mayor de la correa es preferible la correa de $\frac{5}{16}$ " ($\frac{d}{t} = \frac{10}{5/16} = 32$) a la correa de $\frac{1}{2}$ " ($\frac{d}{t} = \frac{10}{1/2} = 20$). El ancho de una correa de $\frac{5}{16}$ " de grueso es 7,45" (utilizar $\frac{1}{2}$ ")

12. Una correa en V funciona sobre dos poleas acanaladas que tienen diámetros primitivos de 10" y 32", respectivamente. El ángulo de la garganta de las poleas es 36° y el ángulo de contacto de la polea pequeña es 140°. La máxima carga permisible en la correa es 200 lb y la correa pesa 0,35 lb/p. La polea menor gira a 1150 rpm y se deben transmitir 35 HP. Si el coeficiente de rozamiento es 0,2, ¿cuántas correas se deben utilizar, suponiendo que cada correa toma una parte proporcional de la carga?

Resp. 2,88 correas; utilizar 3 correas

13. Un motor eléctrico acciona un compresor por medio de correas en V. Se conocen los siguientes datos:

	Polea del motor	Polea del compresor
Diámetro primitivo	9"	48"
Angulo de contacto	2 rad	4,28 rad
Coef. de rozamiento	0,3	0,3
Angulo de la garganta	34°	polea plana
Potencia transmitida	25 HP	
Velocidad	1800 rpm	

Cada correa pesa 0,20 lb/p y la máxima fuerza permisible por correa es 300 lb. Determinar: (a) $f\alpha/(\sin \frac{1}{2}\theta)$ para la polea del motor y para la polea del compresor; (b) wv^2/g para una correa; (c) la tensión en el ramal flojo de la correa; (d) la potencia transmitida por cada correa; (e) el número necesario de correas.

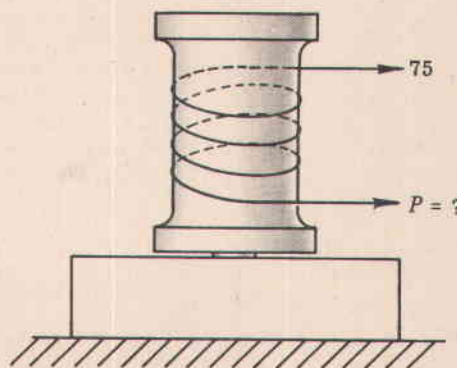


Fig. 24-11

Resp. (a) 2,06 para la polea del motor y 1,284 para la polea del compresor; la polea del compresor regula el diseño.

(b) 31,0 lb. (c) 50,2 lb. (d) 6,4 HP/correa. (e) 3,91; utilizar 4

14. Un motor eléctrico debe accionar un extractor de aire, por medio de una correa de cuero. Se conocen los siguientes datos:

	Polea del motor	Polea del ventilador
Diámetro	12"	48"
Angulo de contacto	2,5 rad	3,78 rad
Coef. de rozamiento	0,3	0,25
Velocidad	900 rpm	
Potencia transmitida	30 HP	

La correa tiene $\frac{1}{4}$ " de grueso, su máximo esfuerzo permisible es 300 psi y pesa 0,035 lb/pul³. (a) ¿Qué polea gobierna el diseño? (b) ¿Qué ancho de la correa debe emplearse?

Resp. (a) $f\alpha$ para la polea menor = 0,75, $f\alpha$ para la polea mayor = 0,945; la polea menor gobierna el diseño. (b) 9,78"; utilizar 10"

15. Un motor eléctrico acciona un compresor por medio de una correa plana de cuero. Se conocen los siguientes datos:

	Polea del motor	Polea del compresor
Diámetro	10"	60"
Angulo de abrazamiento	4 rad	3,5 rad
Coef. de rozamiento	0,25	0,3
Velocidad	1200 rpm	

(Obsérvese el empleo de una polea loca.) La correa tiene una sección de $\frac{1}{4}$ " por 8" y pesa 0,035 lb/pul³. Si la tensión máxima permisible en la correa es 600 lb, determinar la capacidad de potencia. Resp. 31,9 HP

16. Una transmisión por correa abierta comunica 20 HP cuando la polea motriz, de 12" de diámetro, gira a 1750 rpm. La correa tiene una sección de $\frac{3}{8}$ " por 6" y pesa 0,035 lb/pul³. La polea conducida tiene 48" de diámetro y su ángulo de contacto es 200°. ¿Cuál es el máximo esfuerzo producido en la correa, suponiendo que el coeficiente de rozamiento es 0,3 para ambas poleas? Resp. 203 psi

17. Una transmisión con correa en V transmite 15 HP a una velocidad de la polea menor de 900 rpm. Los diámetros primitivos de las poleas son 6,8" y 13,6". La distancia entre centros es 30". Si la máxima fuerza de trabajo permisible por correa es 126 lb, determinar el número de correas que se necesitan, si el coeficiente de rozamiento es 0,15 y el ángulo de la garganta de las poleas es 34°. La correa pesa 0,13 lb/p.

Resp. 3,23; utilizar 4 correas

18. Un volante de acero de 53" de diámetro se debe conectar con la polea de un motor, cubierta de caucho, de 16" de diámetro, por medio de una correa de cuero, de doble capa, que tiene un espesor de $\frac{5}{16}$ ". La distancia entre centros es 10 pies. El coeficiente de rozamiento entre el cuero y el acero es 0,20 y entre el cuero y el caucho, 0,40. El cuero tiene un esfuerzo permisible de 400 psi y la eficiencia de la unión es 80%. El cuero pesa 0,035 lb/pul³. Si se transmiten 60 HP con una velocidad de la correa de 4800 p/min, determinar

- (a) El esfuerzo de trabajo máximo permisible.
(b) $e^{f\alpha}$ para la polea que regula el diseño.
(c) El ancho necesario de la correa.

Los anchos normalizados de las correas son

$\frac{1}{2}$ " hasta 1", con incrementos de $\frac{1}{8}$ "
1" hasta 4", con incrementos de $\frac{1}{4}$ "

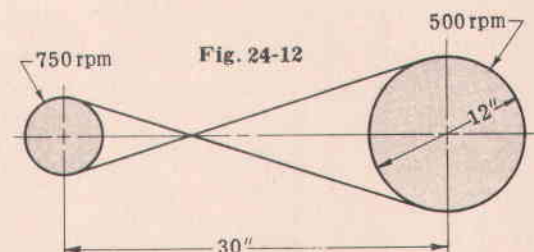
4" hasta 7", con incrementos de $\frac{1}{2}$ "
7" hasta 12", con incrementos de 1"

Resp. (a) 320 psi, (b) 1,99, (c) 11,2"; utilizar 12"

19. Diseñar una transmisión con correa plana con base en la siguiente información: Un eje de transmisión que gira a 500 rpm acciona una fresadora que requiere una potencia de 5 HP a 750 rpm. La polea motriz, localizada en el eje de transmisión, es de acero fundido y tiene 12" de diámetro. Un diseño preliminar propone utilizar una correa que tiene un grueso de $\frac{3}{16}$ " y pesa 0,035 lb/pul³. El esfuerzo permisible es 300 psi, las dos poleas giran en sentidos opuestos, la distancia entre centros es 30" y el coeficiente de rozamiento es 0,3, para ambas poleas.

Determinar: (a) El diámetro de la polea menor; (b) el esfuerzo en el ramal flojo; (c) el área requerida de la correa; (d) el ancho necesario.

Resp. (a) 8", (b) 101 psi, (c) 0,527 pul², (d) 2,82"; utilizar 3"



20. Determinar el aumento de capacidad de potencia, en porcentaje, que es posible obtener al cambiar la correa plana de una transmisión por una correa en V. El diámetro de la polea plana es igual al diámetro primitivo de la polea acanalada y las dos giran a la misma velocidad. El coeficiente de rozamiento para la polea plana y para la polea acanalada es el mismo: 0,3. El ángulo de la garganta de la polea acanalada, θ , es 60° ; las correas son del mismo material, tienen la misma área de sección y en ambos casos el ángulo de abrazamiento es 150° .

Resp. 45%. (La razón de las capacidades de potencia de la correa en V a la capacidad de potencia de la correa plana es 1,45)

21. (a) Determinar el número de correas en V que se necesitan para transmitir 40 HP, con las siguientes condiciones:

	Polea menor	Polea mayor
Velocidad	1120 rpm	280 rpm
Diámetro primitivo	9"	36"
Angulo de la garganta	34°	34°

Carga de trabajo máxima por correa = 126 lb, coeficiente de rozamiento = 0,15, distancia entre los centros de las poleas = 35", peso de las correas = 0,20 lb/p.

- (b) Para disminuir los gastos se propone que la polea mayor sea plana. Suponiendo que la longitud de la correa no cambia (ni tampoco cambian los ángulos de abrazamiento), ¿cuál es la capacidad de potencia?

Resp. (a) 6,3; utilizar 7. (b) Para 7 correas, 28,7 HP

22. En la figura 24-13 se muestra esquemáticamente una transmisión con el motor pivoteado. Las dos poleas tienen el mismo diámetro (12") y los ramales de la correa son horizontales. El motor funciona a 800 rpm y pesa 600 lb; la correa tiene un grueso de $\frac{1}{4}$ " y un ancho de 9"; el coeficiente de rozamiento es 0,2 y la correa pesa 0,035 lb/pul³. Determinar

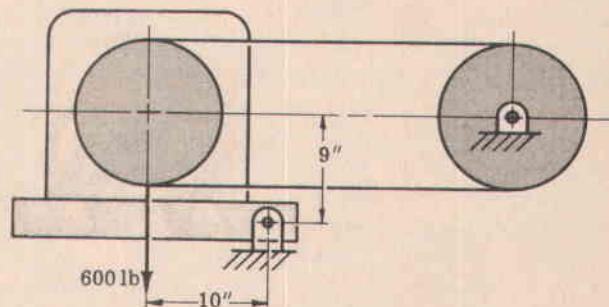


Fig. 24-13

- Las tensiones en la correa, cuando la polea del motor gira en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.
- La capacidad de potencia, cuando la polea del motor gira en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.
- El máximo esfuerzo en la correa, cuando la polea del motor gira en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.
- Las tensiones en la correa, cuando la polea del motor gira en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.
- La capacidad de potencia, cuando la polea del motor gira en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.
- El máximo esfuerzo en la correa, cuando la polea del motor gira en el sentido del movimiento de las agujas del reloj.

Resp. (a) 413 lb, 244 lb (b) 12,8 HP (c) 184 psi (d) 468 lb, 368 lb (e) 7,6 HP (f) 208 psi

23. En la figura 24-14 se muestran varias poleas que son conducidas por una misma correa. La polea 1 es la polea motriz y las poleas 2, 3 y 4 toman potencia de la correa. Suponer que el coeficiente de rozamiento entre la polea y la correa es igual para todas las poleas. La correa no se desliza sobre la polea 1, aunque todas las demás poleas estén cargadas hasta el punto de deslizamiento. Determinar el mínimo ángulo de abrazamiento necesario en la polea 1, en función de los ángulos de abrazamiento de las otras poleas.

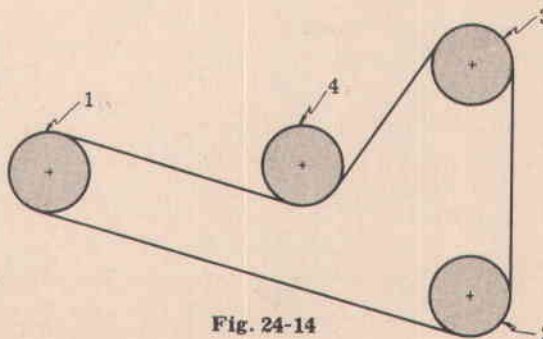


Fig. 24-14

Resp. $\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

Capítulo 25

Soldadura

INTRODUCCION. Hay muchos aspectos importantes de la soldadura que se deben considerar en el diseño de máquinas. El problema inmediato del diseñador es determinar la dimensión adecuada de la soldadura de una parte específica, lo cual implica un análisis de esfuerzos de las diferentes partes, en los puntos sometidos a cargas estáticas o fluctuantes. Se utilizarán los procedimientos recomendados por la American Welding Society (AWS) y las modificaciones hechas por la Lincoln Electric Company.

El diseñador debe utilizar los esfuerzos de diseño y los procedimientos especificados por los diferentes códigos de estructuras, puentes y recipientes a presión, donde los diseños deben ser conservadores. Por otra parte, el diseñador tiene mucha libertad en el diseño de la mayoría de máquinas. El punto de vista de este capítulo es permitir libertad y flexibilidad en el diseño.

TIPOS DE JUNTAS SOLDADAS

(1) Soldaduras a tope. Véase la figura 25-1.

De acuerdo con la Lincoln Electric Company, una soldadura a tope, cuando está hecha correctamente, tiene igual o mejor resistencia que la placa y no hay necesidad de calcular el esfuerzo en la soldadura, ni hacer ensayos para determinar su dimensión. Cuando se sueldan aceros de aleación, es necesario hacer coincidir la resistencia del electrodo con la resistencia de la placa.

Algunos códigos sugieren reducir la resistencia, con el empleo del factor llamado eficiencia de la junta. Cuando se tiene que reducir la resistencia, la ecuación de la fuerza permisible en una soldadura a tope está dada por la fórmula

$$F_{all} = s_t t L e$$

donde

F_{all} = fuerza permisible, en lb

s_t = esfuerzo permisible en la soldadura, en psi

t = espesor de la placa, en pul

L = longitud de la soldadura, en pul

e = eficiencia

(2) Soldaduras de filete.

Las soldaduras de filete se clasifican de acuerdo con la dirección de la carga: (a) Carga paralela, (b) carga trasversal. (Véase la figura 25-2.)

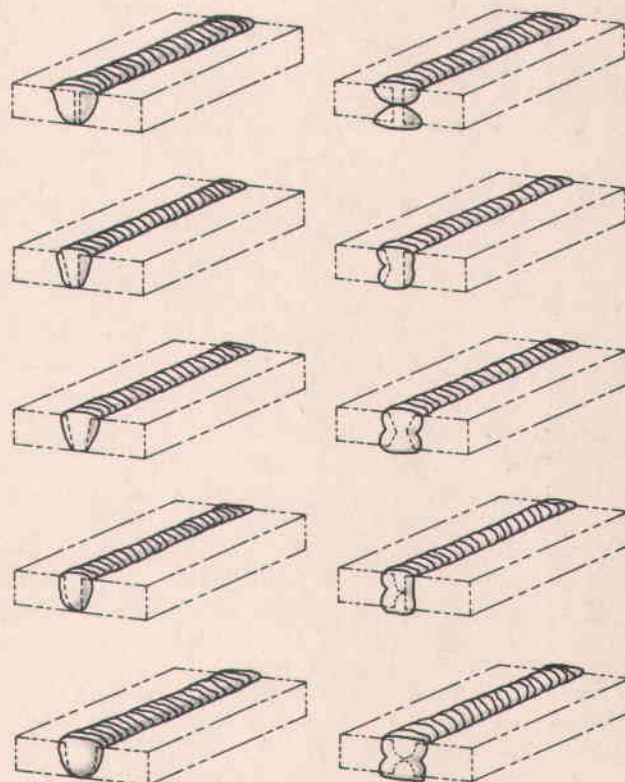


Fig. 25-1 Soldaduras a tope

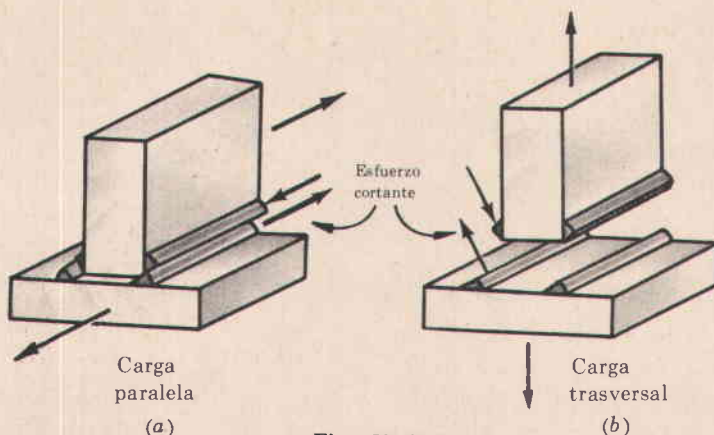


Fig. 25-2

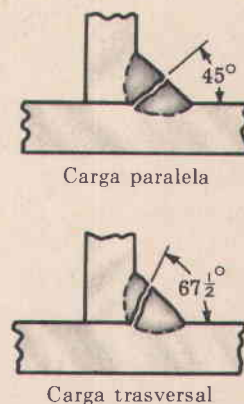


Fig. 25-3

En la soldadura de filete a 45° típica, el plano de máximo esfuerzo cortante es la sección de la garganta a 45°, cuando se somete a cargas paralelas y la garganta a 67½°, cuando se somete a carga transversal, como se muestra en la figura 25-3. En consecuencia, la resistencia a carga transversal es mayor.

En los Estados Unidos la base de la especificación de una soldadura de filete es la longitud del lado (en Europa se emplea la garganta). Se entiende por dimensión de una soldadura de filete la longitud del cateto del mayor triángulo rectángulo isósceles inscrito o las longitudes de los catetos del mayor triángulo rectángulo (no isósceles) inscrito.

La dimensión de una soldadura de filete que tiene ambos lados iguales está dada por w y las dimensiones de una soldadura de filete que tiene los dos lados diferentes, están dadas por a y b , como se muestra en la figura 25-4.

La garganta de una soldadura de filete que tiene los dos lados iguales, t , se obtiene multiplicando la dimensión de la soldadura por 0,707 es decir que $t = 0,707w$. (Véase la figura 25-5.)

La garganta real, t_a , obtenida con soldadura automática, es mayor que la garganta teórica t . (Véase la figura 25-6.) Si se produce una penetración p , la dimensión es $(w + p)$ y la garganta es $0,707(w + p)$. La AWS no tiene en cuenta la resistencia adicional debida a la penetración, pero se puede considerar este efecto, si así se desea.

El esfuerzo en una soldadura de filete se considerará como un esfuerzo cortante en la garganta, cualquiera que sea la dirección de aplicación de la carga.

La carga paralela permisible por pulgada de soldadura, en una soldadura de filete cargada estáticamente, es

$$F_{all} = s_{all} A = 13.600 (0,707w) = 9600w$$

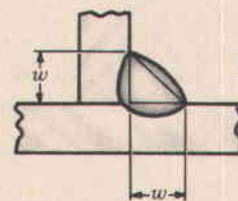
donde s_{all} = esfuerzo cortante permisible = 13.600 psi, de acuerdo con el código de la AWS

A = área de la sección de la garganta a 45° de 1" de soldadura = $0,707w$

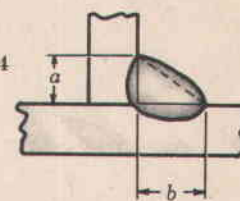
w = longitud del lado (dimensión), en pul

La carga transversal permisible por pulgada de soldadura, en una soldadura de filete cargada estáticamente, es

$$F_{all} = s_{all} A = 13.600 (0,765w) / \cos 22\frac{1}{2}^\circ = 11.300w$$



Soldadura de filete con las dimensiones iguales



Soldadura de filete con las dimensiones diferentes

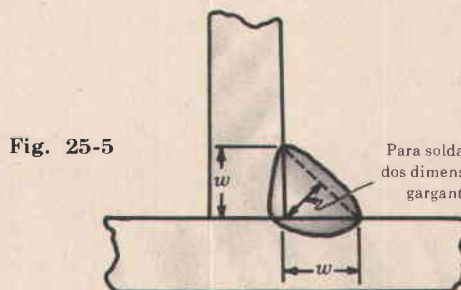
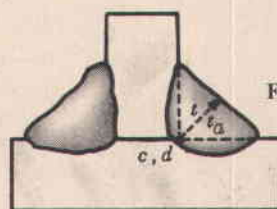


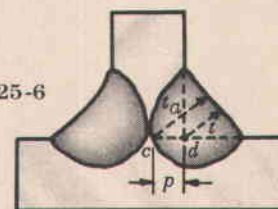
Fig. 25-5

Para soldaduras con las dos dimensiones iguales, garganta = $0,707w$



Manual

c = Fondo de la soldadura
 d = Fondo de la junta



Automática

t_a = Garganta real
 t = Garganta teórica

donde s_{all} = esfuerzo permisible = 13.600 psi (el mismo que para soldadura de filete sometida a carga paralela)

A = área de la sección de la garganta a $67\frac{1}{2}^\circ$ de 1" de soldadura = $0,765 u$

De acuerdo con la AWS, si una parte de la carga se aplica paralela y la otra se aplica trasversalmente, se debe utilizar la carga permisible paralela. Cuando ocurre flexión o torsión, el procedimiento seguido para analizar la soldadura consiste en considerar ésta como una línea que no tiene sección transversal. Se puede demostrar que el módulo de la sección de una área delgada es igual al módulo de la sección, cuando ésta se considera como una línea, multiplicado por su espesor, con un error despreciable.

Considerando flexión:

$$s = \frac{M}{Z}$$

donde M = momento de flexión, en lb-pul; Z = módulo de la sección, en pul³; s = esfuerzo, en psi.

Las unidades del módulo de la sección de una soldadura que se considera como una línea, Z_w , son pul². $(Z_w)(u)$ da el módulo de la sección de la soldadura, donde u es la dimensión de la soldadura. Así

$$s = \frac{M}{(Z_w)(u)} \quad \text{o} \quad sw = \frac{M}{Z_w}$$

El producto de s por u tiene por unidades lb/pul y se representa por el símbolo f . Así

$$f = \frac{M}{Z_w}$$

donde f es la carga por pulgada de soldadura, M (lb-pul) es el momento de flexión y Z_w (pul²) es el módulo de la sección de la soldadura considerada como una línea. El procedimiento anterior permite encontrar directamente la dimensión de la soldadura.

En la figura 25-7 se indican los módulos de la sección en flexión, Z_w , y los momentos polares de inercia, J_w , de 13 uniones soldadas típicas, en que la soldadura se considera como una línea. Los módulos de la sección de estas fórmulas son para una fuerza máxima, tanto de la porción superior como de la porción inferior de las uniones soldadas. En las uniones asimétricas que se muestran, la fuerza de flexión máxima ocurre en la parte inferior.

Si se aplica más de una fuerza a la soldadura, todas las fuerzas se hallan combinadas y deben actuar en el mismo punto de la soldadura.

El módulo de la sección y el momento polar de inercia se utilizan en las fórmulas de diseño patrones que se enumeran aquí. Las soldaduras secundarias no se consideran como una línea, pero se emplean las fórmulas de diseño patrones para encontrar la fuerza por pulgada de soldadura. Los símbolos empleados son

- b = anchura de la unión, en pul
- d = altura de la unión, en pul
- A = área del material de la pestaña soportada en corte por las soldaduras, en pul²
- I = momento de inercia de la sección completa, en pul⁴
- C = distancia a la fibra externa, en pul
- t = espesor de la placa, en pul
- J = momento polar de inercia de la sección, en pul⁴
- P = carga de tracción o de compresión, en lb
- N_x = distancia desde el eje x hasta la cara, en pul
- N_y = distancia desde el eje y hasta la cara, en pul
- V = carga vertical de corte, en lb
- M = momento de flexión, en lb-pul
- T = momento de torsión, en lb-pul
- L_w = longitud de la soldadura, en pul
- Z_w = módulo de la sección de la soldadura, en pul²
- J_w = momento polar de inercia de la soldadura, en pul³
- s = esfuerzo en la fórmula patrón de diseño, en psi
- f = fuerza por pulgada de soldadura en la fórmula patrón de diseño, cuando se considera la soldadura como una línea, en lb-pul
- n = número de soldaduras

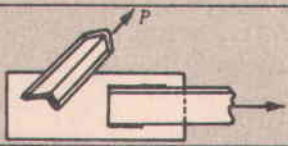
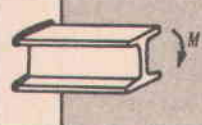
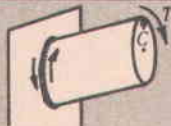
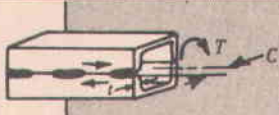
Tipo de carga	Fórmulas de diseño		
	patrones		
	Esfuerzo psi	Considerando la soldadura como una línea	
		Fuerza lb/pul	
Soldaduras primarias transmite toda la carga			
	tracción o compresión	$s = \frac{P}{A}$	$f = \frac{P}{L_w}$
	de corte vertical	$s = \frac{V}{A}$	$f = \frac{V}{L_w}$
	flexión	$s = \frac{M}{Z}$	$f = \frac{M}{Z_w}$
	torsión	$s = \frac{TC}{J}$	$f = \frac{TC}{J_w}$
Soldaduras secundarias une las dos secciones — bajo esfuerzo			
	de corte horizontal	$s = \frac{VA_y}{I_t}$	$f = \frac{VA_y}{I_n}$
	de corte torsional horizontal	$s = \frac{TC}{J}$	$f = \frac{TCt}{J}$

Fig. 25-7(b)

Cortesía de la Lincoln Electric Co.

Si se utiliza **soldadura a intervalos**, se determina la razón R de la dimensión calculada de la soldadura continua a la dimensión real que se debe emplear en la soldadura a intervalos.

$$R = \frac{\text{dimensión calculada (soldadura continua)}}{\text{dimensión real que se debe emplear (soldadura a intervalos)}}$$

La longitud de los intervalos de soldadura y la distancia entre los centros de dos intervalos consecutivos están dadas en función de R . Una representación como 3 — 4 significa que la longitud del intervalo de soldadura es 3" y la distancia entre los centros de dos intervalos consecutivos es 4".

Los siguientes valores de resistencia a la fatiga (lb por pulgada de soldadura de filete) sirven de guía para el diseño de soldaduras de filete sometidas a carga variable. Los valores se basan en un valor de seguridad más conservador que el de 8780 lb por pulgada de soldadura de filete, utilizado en el diseño de puentes, según las recomendaciones de la AWS.

- (1) Resistencia a la fatiga permisible para soldaduras de filete, para 2.000.000 de ciclos = $\frac{5090}{1 - \frac{1}{2}K}$ lb/pul (si el valor calculado es mayor que 8780 lb/pul, utilizar 8780 lb/pul).

R	dimensión empleada en		
dimensión necesaria de la soldadura continua	la soldadura a intervalos		
75%		3-4	
66			4-6
60		3-5	
57			4-7
50	2-4	3-6	4-8
44			4-9
43		3-7	
40	2-5		4-10
37		3-8	
33	2-6	3-9	4-12
30		3-10	
25	2-8	3-12	
20	2-10		
16	2-12		

(2) Resistencia a la fatiga permisible para soldaduras de filete, para 600.000 ciclos = $\frac{7070}{1 - \frac{1}{2}K}$
lb/pul (si el valor calculado es mayor que 8780 lb/pul, utilizar 8780 lb/pul).

(3) Resistencia a la fatiga permisible para soldaduras de filete, para 100.000 ciclos = $\frac{8484}{1 - \frac{1}{2}K}$
lb/pul (si el valor calculado es mayor que 8780 lb/pul, utilizar 8780 lb/pul).

(Para otros tipos de soldadura, recúrrase a la "AWS Bridge Code, Section 208, Design for Repeated Stress".

En las fórmulas anteriores, $K = \frac{\text{carga mínima}}{\text{carga máxima}} = \frac{\text{esfuerzo mínimo}}{\text{esfuerzo máximo}}$. $K = +1$ para carga cons-

tante; $K = 0$ si la carga es libre (varía en un solo sentido), $K = -1$ si la carga es completamente invertida.

Un cambio abrupto de la sección a lo largo de la trayectoria del flujo de esfuerzo, reducirá la resistencia a la fatiga. Es más importante en la reducción de la resistencia a la fatiga, el efecto de la forma y la geometría, que la presencia de la soldadura.

La resistencia a la fatiga se puede expresar en función del número de ciclos por medio de la fórmula empírica

$$F_A = F_B \left(\frac{N_B}{N_A} \right)^c$$

donde F_A = resistencia a la fatiga para N_A ciclos

F_B = resistencia a la fatiga para N_B ciclos

c = constante que varía ligeramente con el tipo de soldadura. Se ha utilizado 0,13 para soldaduras a tope y 0,18 para placas sometidas a carga axial de tracción y compresión.

La regla empleada para soldaduras no calculadas es la siguiente: Para una soldadura sometida a carga paralela y carga transversal, simultáneamente, la dimensión debe ser 3/4 del espesor de la placa, la longitud de la soldadura debe ser igual a la longitud de la placa y la placa se debe soldar a ambos lados. Para diseños en que la rigidez es el factor básico, utilizar una longitud del lado (dimensión) igual a 3/8 del espesor de la placa.

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Demostrar que el plano de máximo esfuerzo cortante está a 45° para una soldadura de filete con los dos lados iguales, sometida a carga paralela, como se muestra en la figura 25-8. Despreciar la flexión. Determinar la fuerza permisible por pulgada de soldadura, F_{aj} , si el esfuerzo de corte permisible es 13.600 psi, de acuerdo con la AWS.

Solución:

- (a) Considerar como un cuerpo libre la placa vertical con las dos soldaduras cortadas simétricamente.
- (b) Llamar t' la garganta de la sección arbitraria. El área de la soldadura en la sección cortada es $A = t'L$, donde $t' = w/(\sin \theta + \cos \theta)$.

- (c) El esfuerzo de corte es

$$s_s = \frac{F}{A} = \frac{F}{t'L} = \frac{F(\sin \theta + \cos \theta)}{wL}$$

- (d) Derivar s_s con respecto a θ , e igualar la derivada a cero para hallar el máximo:

$$\frac{ds_s}{d\theta} = \frac{F}{wL} (\cos \theta - \sin \theta) = 0$$

que se satisface cuando $\cos \theta = \sin \theta$, o sea que $\theta = 45^\circ$.

- (e) Remplazando θ por 45° en (c), $s_{s(\max)} = \frac{\sqrt{2}F}{wL} = \frac{F}{tL}$ donde t es la garganta a 45° .

- (f) La carga permisible por pulgada de soldadura es $F_{\text{all}} = s_{s(\text{all})}wL/\sqrt{2} = 13.600w(1)/\sqrt{2} = 9600w$, donde w es la dimensión.

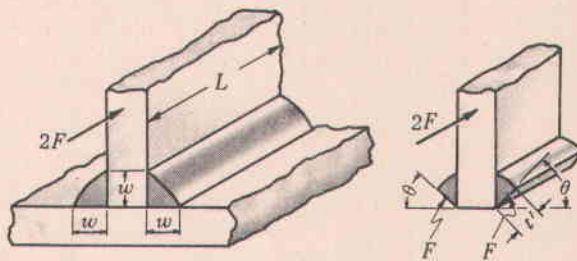


Fig. 25-8

2. Demostrar que el plano de máximo esfuerzo cortante está a $67\frac{1}{2}^\circ$ para una soldadura de filete con los lados iguales, sometida a carga transversal. Despreciar la flexión. Determinar la fuerza permisible por pulgada de soldadura, si el esfuerzo de corte permisible es 13.600 psi, de acuerdo con la AWS.

Solución:

- (a) En la figura 25-9 se muestra el cuerpo libre. Suponer que la carga se reparte por igual entre las dos soldaduras. La fuerza de corte es F_s y la fuerza normal, F_n . Sumando las componentes verticales,

$$+ 2F - 2F_s \sin \theta - 2F_n \cos \theta = 0$$

- (b) Si se supone que la resultante de F_s y F_n es vertical, entonces las componentes horizontales son iguales y opuestas: $F_s \cos \theta = F_n \sin \theta$. Remplazando F_n por $(F_s \cos \theta)/(\sin \theta)$ en (a),

$$+ 2F - 2F_s \sin \theta - \frac{2F_s \cos \theta}{\sin \theta} (\cos \theta) = 0 \quad \text{o} \quad F_s = F \sin \theta$$

- (c) La garganta en la sección tomada es $t' = w/(\cos \theta + \sin \theta)$.

- (d) El esfuerzo de corte es $s_s = \frac{F_s}{A} = \frac{F_s}{t'L} = \frac{(F \sin \theta)(\cos \theta + \sin \theta)}{wL}$.

- (e) Para obtener s_s máximo, se encuentra el ángulo θ que define el esfuerzo de corte máximo, haciendo $ds_s/d\theta = 0$.

$$\frac{ds_s}{d\theta} = \frac{F}{wL} [(\sin \theta)(-\sin \theta + \cos \theta) + (\cos \theta + \sin \theta)(\cos \theta)] = 0$$

Utilizando las identidades trigonométricas $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$ y $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$, obtenemos: $\sin 2\theta = -\cos 2\theta$, $\tan 2\theta = -1$, $2\theta = 135^\circ$ y finalmente, $\theta = 67\frac{1}{2}^\circ$.

- (f) El esfuerzo de corte máximo se encuentra remplazando θ por $67\frac{1}{2}^\circ$ en (d):

$$s_{s(\max)} = \frac{(F \sin 67\frac{1}{2}^\circ)(\cos 67\frac{1}{2}^\circ + \sin 67\frac{1}{2}^\circ)}{wL} = \frac{1,21F}{wL} = \frac{0,924F}{tL} \quad \text{donde } t \text{ es la garganta a } 67\frac{1}{2}^\circ.$$

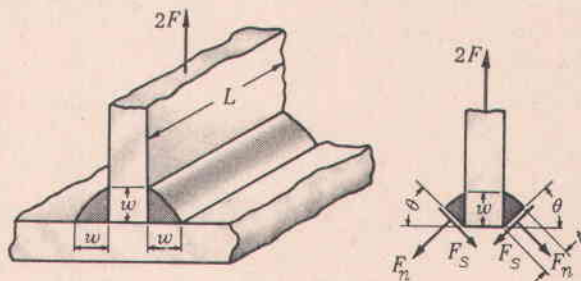


Fig. 25-9

(g) La fuerza permisible por pulgada de soldadura es $F = \frac{s_s(\text{all})wL}{1.21} = \frac{13.600w(1)}{1.21} = 11.300w$, donde w es la dimensión de la soldadura.

3. ¿Cómo es la distribución de carga en soldaduras sometidas a carga paralela, si las soldaduras son relativamente largas?

Solución:

Si las soldaduras son largas, la distribución de carga no es uniforme. La carga máxima por pulgada de soldadura depende de la longitud de la misma. Los valores de la carga permisible por pulgada de soldadura se reducirán aproximadamente al 90% de dicho valor para soldaduras cortas.

4. Considerando la soldadura como una línea, determinar el módulo de la sección en flexión, Z_w , de una soldadura de d pulgadas de altura. Referirse a la figura 25-10.

Solución:

$$\text{Momento de inercia } I = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} y^2 dy = \frac{d^3}{12}, \quad y \quad Z_w = \frac{I}{d/2} = \frac{d^2}{6}.$$

5. Considerando la soldadura como una línea, determinar su momento de inercia alrededor del centro, J_w .

Solución:

$$\text{Con referencia a la figura 25-10, } J_w = \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} y^2 dy = \frac{d^3}{12}.$$

6. Considerando la soldadura como una línea, determinar el módulo de la sección, Z_w , alrededor del eje $x-x$. Referirse a la figura 25-11.

Solución:

Del problema 4, el momento de inercia de las líneas verticales alrededor del eje $x-x$ es $I_1 = 2(d^3/12) = d^3/6$.

El momento de inercia de las líneas horizontales es

$$I_2 = 2[b(d/2)^2] = bd^2/2.$$

El momento total de inercia alrededor del eje $x-x$ es

$$I = I_1 + I_2 = (d^3/6) + (bd^2/2).$$

$$\text{Módulo de la sección, } Z_w = \frac{I}{c} = \frac{(d^3/6) + (bd^2/2)}{d/2} = \frac{d^2}{3} + bd.$$

7. Considerando la soldadura como una línea, determinar su momento de inercia alrededor del centro de gravedad, J_w . Referirse a la figura 25-12.

Solución:

Considerando cada línea por separado, determinar el efecto de cada una y sumar todas las partes.

Considérese un elemento diferencial de la línea superior, dx . La integral del producto de la longitud del elemento por el cuadrado de la distancia variable al centro de gravedad, es

$$\begin{aligned} J_{w_1} &= \int r^2 dx = 2 \int_0^{\frac{b}{2}} [(d/2)^2 + x^2] dx \\ &= 2 \left(\frac{d}{2} \right)^2 \left(\frac{b}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{b}{2} \right)^3 = \frac{d^2 b}{4} + \frac{b^3}{12} \end{aligned}$$

$$\text{La contribución de la línea inferior es igual: } J_{w_2} = \frac{d^2 b}{4} + \frac{b^3}{12}.$$

$$\text{Por analogía, el momento polar de inercia de cada línea vertical es } J_{w_3} = J_{w_4} = \frac{db^2}{4} + \frac{d^3}{12}.$$

$$\text{El momento polar de inercia total es } J_w = J_{w_1} + J_{w_2} + J_{w_3} + J_{w_4} = \frac{b^3 + 3b^2d + 3bd^2 + d^3}{6} = \frac{(b+d)^3}{6}.$$

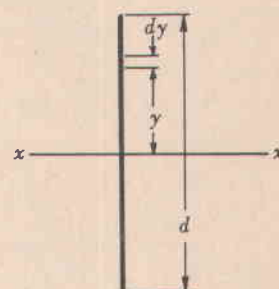


Fig. 25-10

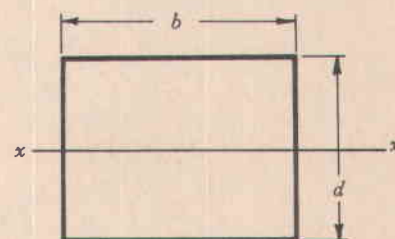


Fig. 25-11

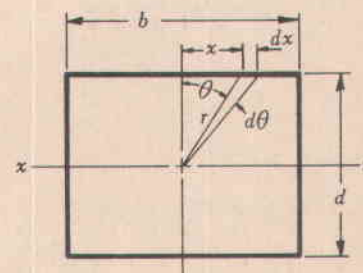


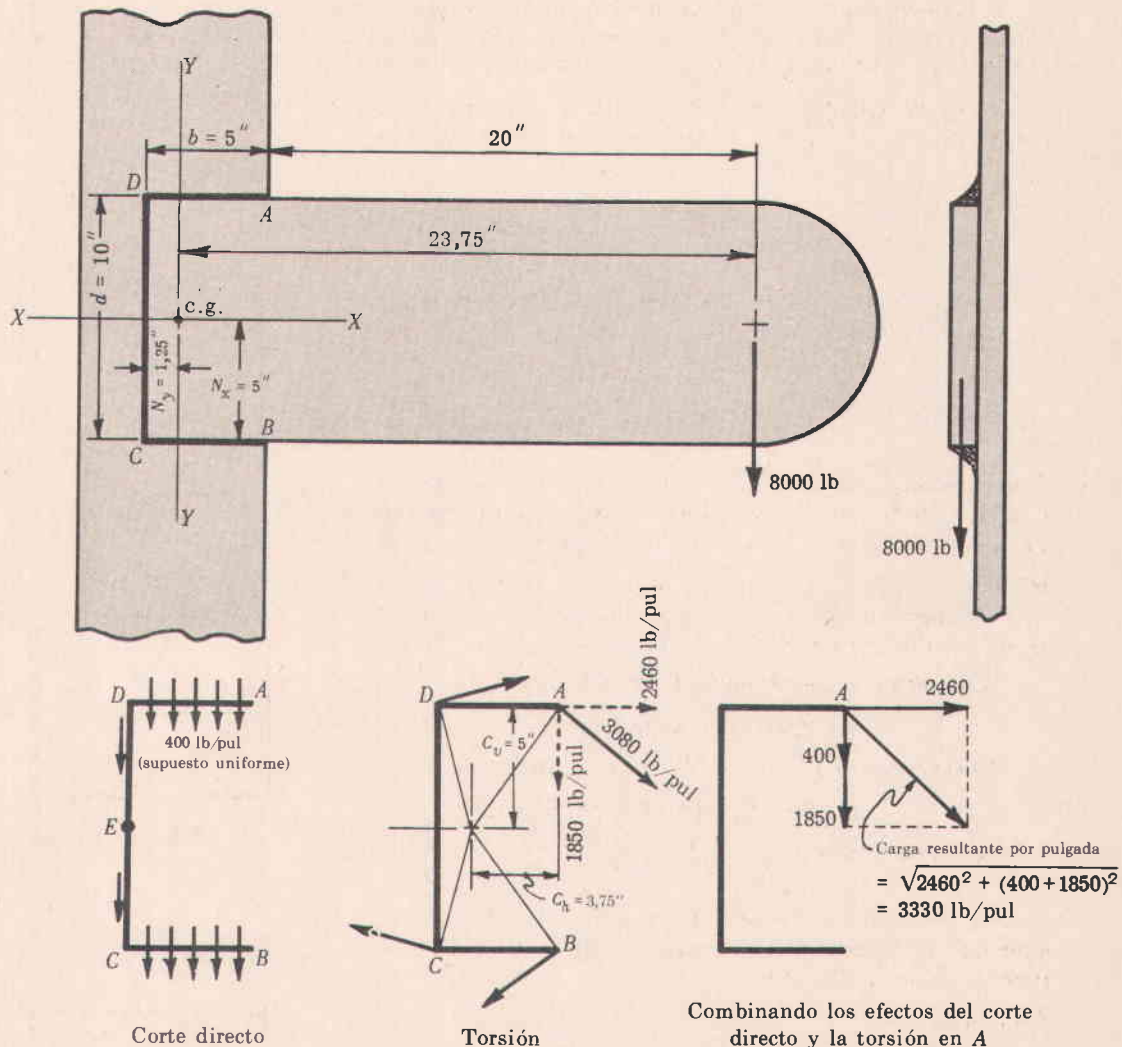
Fig. 25-12

8. Determinar la dimensión de la soldadura de filete que se necesita aplicar a la ménsula que se muestra en la figura 25-13.

Solución:

- (a) Determinar el centro de gravedad de la soldadura, considerando ésta como una línea, sin espesor. (Véase la figura 25-7(a).)

Por simetría, $N_x = 5''$. $N_y = \frac{b^2}{2b + d} = \frac{5^2}{2(5) + 10} = 1,25''$



- (b) Remplazar la fuerza original de 8000 lb por una fuerza de 8000 lb actuando en el centro de gravedad y un par igual a $8000(23,75) = 190.000$ lb-pul (que produce torsión).
- (c) Se supone que la fuerza vertical de 8000 lb está uniformemente distribuida sobre la soldadura y produce una carga de $(8000)/(5 + 10 + 5) = 400$ lb por pulgada de soldadura.
- (d) Ahora se determina el efecto del par de torsión. El momento polar de inercia de la soldadura (que se considera como una línea) es

$$J_w = \frac{(2b + d)^3}{12} - \frac{b^2(b + d)^2}{2b + d} = \frac{(10 + 10)^3}{12} - \frac{5^2(5 + 10)^2}{2(5) + 10} = 385,4 \text{ p}^3$$

- (e) En los puntos A y B, la máxima carga de torsión, f , es

$$f = \frac{TC}{J_w} = \frac{(190.000) \sqrt{5^2 + 3,75^2}}{385,4} = 3080 \text{ lb/pul}$$

donde C = distancia desde el centro de gravedad hasta el punto que se está analizando.

Componente vertical $f_v = \frac{3,75}{\sqrt{5^2 + 3,75^2}}(3080) = 1850 \text{ lb/pul}$

Componente horizontal $f_h = \frac{5}{\sqrt{5^2 + 3,75^2}}(3080) = 2460 \text{ lb/pul}$

Obsérvese que f_v y f_h se pueden obtener directamente, utilizando la distancia horizontal $C_h = 3,75''$ y la distancia vertical $C_v = 5''$, en la fórmula $f = TC/J_w$.

- (f) Combinando las componentes horizontal y vertical en el punto A, la carga por pulgada es

$$F = \sqrt{(2460)^2 + (400 + 1850)^2} = 3330 \text{ lb/pul}$$

- (g) Para cargas constantes la longitud de la soldadura es $w = \frac{f_{\text{real}}}{f_{\text{permisible}}} = \frac{3330}{9600} = 0,347''$. Usar una soldadura de $\frac{3}{8}''$.

Obsérvese que la carga permisible es 9600 lb por cada pulgada de soldadura, o sea que se utiliza la carga permisible para carga paralela cuando hay una combinación de cargas trasversal y paralela.

- (h) Un análisis diferente, que se justifica con base en la distribución de fuerza de corte trasversal que se hace en el análisis de vigas, consiste en considerar que las soldaduras superior e inferior no soportan fuerza de corte trasversal. El máximo esfuerzo de corte trasversal en una sección rectangular es $3V/2A$ en el eje neutro. Así, el esfuerzo de corte directo en el punto A es cero y en el punto E la máxima fuerza de corte por pulgada es

$$f_s = \frac{3}{2} \left(\frac{V}{L_w} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{8000}{10} \right) = 1200 \text{ lb/pul}$$

En el punto A la fuerza resultante por pulgada de soldadura, debida únicamente a la torsión, es 3080 lb/pul, como se determinó en la parte (e).

La dimensión de la soldadura es crítica en el punto A (y en el punto B) y es

$$w = \frac{f_{\text{real}}}{f_{\text{permisible}}} = \frac{3080}{9600} = 0,321'' \text{ Utilizar una soldadura de } \frac{5}{16}'' \text{ ó } \frac{3}{8}''$$

9. Una barra circular está soldada a una placa de acero. El diámetro de la barra, d , es 2 pul. Determinar la dimensión de la soldadura requerida.

Solución:

Momento de flexión = $(2000)(8) = 16.000 \text{ lb-pul}$. Fuerza de corte = 2000 lb. El módulo de la sección de la soldadura considerada como una línea, es (véase la figura 25-7(a))

$$Z_w = \frac{1}{4} \pi d^2 = \frac{1}{4} \pi (2)^2 = 3,14 \text{ pul}^2$$

La fuerza por pulgada de soldadura, en la parte superior y en la inferior, es

$$f_B = M/Z_w = 16.000/3,14 = 5100 \text{ lb/pul}$$

Suponiendo que la fuerza de corte está uniformemente distribuida, el esfuerzo de corte vertical es

$$f_s = V/L_w = 2000/2\pi = 318 \text{ lb/pul}$$

$$\text{Carga resultante, } f = \sqrt{5100^2 + 318^2} = 5110 \text{ lb/pul}$$

$$\text{Dimensión de la soldadura, } w = \frac{f_{\text{real}}}{f_{\text{permisible}}} = \frac{5110}{9600} = 0,53'' \text{ Una soldadura de } \frac{1}{2}'' \text{ será satisfactoria.}$$

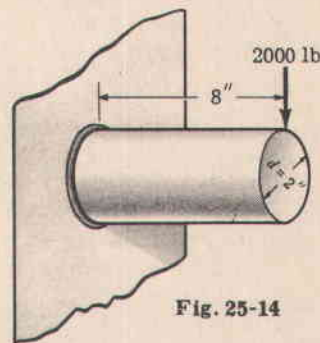


Fig. 25-14

10. En la figura 25-15 se muestra una viga de alma llena, soldada. ¿Qué dimensión debe tener la soldadura de filete empleada para unir las pestañas con el alma, si la sección considerada debe soportar una carga trasversal (fuerza de corte) de 150.000 lb?

Solución:

La soldadura empleada en la unión del alma con la pestaña se considera como una soldadura secundaria, por cuanto se requiere para mantener juntas las partes. La deformación de la viga no se afecta significativamente, aun cuando se omita la soldadura.

La carga por pulgada de soldadura, en la unión del alma y la pestaña, es

$$f = \frac{VAY}{I_n} = \frac{(150.000)(20)(21)}{(20.020)(2)} = 1575 \text{ lb/pul}$$

donde V = fuerza de corte = 150.000 psi

A = área de la sección que está encima de la soldadura = $10(2) = 20 \text{ pul}^2$

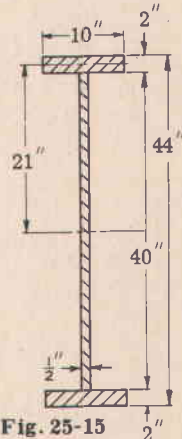


Fig. 25-15

- Y = distancia desde el área que está encima de la soldadura hasta el centro de gravedad (= 21 pul)
 I = momento de inercia de toda la sección alrededor del eje que pasa por el centro de gravedad de la viga (= 20.020 pul⁴)
 n = número de soldaduras (= 2)

La dimensión de la soldadura es $w = 1575/9600 = 0,164''$ (dimensión para soldadura continua).

Aunque sobre algunas soldaduras se produce muy poco o ningún esfuerzo, por razones prácticas es mejor no poner soldaduras demasiado pequeñas en una placa gruesa. La siguiente tabla, dada por la American Welding Society, se puede utilizar como guía. Así, la dimensión mínima calculada de la soldadura es 0,164'', para una soldadura continua. Sin embargo, según la tabla, para una placa de 2'' la mínima dimensión de la soldadura es $\frac{3}{8}''$. Obsérvese que la dimensión de la soldadura de filete no debe exceder el espesor de la placa más delgada.

Como la soldadura de $\frac{3}{8}''$ tiene una gran resistencia, se puede utilizar soldadura a intervalos. Así mismo, la Lincoln Electric Co. recomienda que la dimensión de la soldadura, empleada para los cálculos de diseño o para la determinación de la longitud, no debe exceder $\frac{2}{3}$ del espesor del alma, o sea $\frac{2}{3}(\frac{1}{2}) = 0,333''$. Esta recomendación se basa en que el esfuerzo de corte en la placa más delgada se limita a 13.000 psi (según la AWS Bridge Code). Así, aunque se deba utilizar una soldadura de $\frac{3}{8}''$, los cálculos se basan en una soldadura de 0,333''.

$$R = \frac{\text{dimensión necesaria de la soldadura continua}}{\text{dimensión empleada en la soldadura a intervalos}} = \frac{0,164}{0,333} = 49\%$$

Espesor de la placa más gruesa	Dimensión mínima de la soldadura
hasta $\frac{1}{2}''$	3/16 pul
desde $\frac{1}{2}''$ hasta $\frac{3}{4}''$	1/4 pul
desde $\frac{3}{4}''$ hasta $1\frac{1}{4}''$	5/16 pul
desde $1\frac{1}{4}''$ hasta 2''	3/8 pul
desde 2'' hasta 6''	1/2 pul
más de 6''	5/8 pul

Utilizando un valor R de 50% en la tabla de porcentajes de soldadura continua, las longitudes del intervalo de soldadura y del espacio pueden ser: 2-4, 3-6 ó 4-8.

Entonces, la recomendación final es utilizar una soldadura de $\frac{3}{8}''$ (dimensión), con intervalos de 2 pul de longitud y distancia entre centros de 4 pulgadas.

11. Se debe soldar una viga rectangular a una placa. La máxima carga de 3000 lb se aplica repetidamente. Determinar la dimensión de la soldadura necesaria para resistir 10.000.000 de ciclos. Suponer que la carga de corte está distribuida uniformemente sobre toda la soldadura. Referirse a la figura 25-16.

Solución:

Considerar las soldaduras horizontales, donde el esfuerzo de flexión es máximo (las soldaduras superior e inferior están igualmente esforzadas).

El momento de flexión varía desde un máximo de $3000(6) = 18.000$ lb-pul, en un sentido, hasta un máximo de $3000(6) = 18.000$ lb-pul en el sentido opuesto. La fuerza de corte varía desde 3000 lb hacia arriba hasta 3000 lb hacia abajo.

El módulo de la sección de la soldadura es $Z_w = bd + d^2/3 = (2)(3) + 3^2/3 = 9$ pul²

La carga (en lb/pul) debida a la flexión es $f = M/Z_w = 18.000/9 = 2000$ lb/pul

$$\text{Fuerza de corte media} = \frac{V}{L_w} = \frac{3000}{2+3+2+3} = 300 \text{ lb/pul}$$

$$\text{Fuerza máxima/pul} = \sqrt{2000^2 + 300^2} = 2020 \text{ lb/pul}$$

La fuerza máxima varía desde 2020 lb/pul en un sentido, hasta 2020 lb/pul en el sentido opuesto. Esto es así, tanto para la soldadura superior, como para la inferior.

La fuerza permisible por pulgada, para resistir 2.000.000 de ciclos, es

$$f_{2.000.000} = \frac{5090}{1 - \frac{1}{2}K} = \frac{5090}{1 - \frac{1}{2}(-1)} = 3390 \text{ lb/pul}$$

donde $K = \frac{\text{esfuerzo mínimo}}{\text{esfuerzo máximo}} = -1$, puesto que la carga se invierte completamente.

La fuerza permisible por pulgada de soldadura, para 10.000.000 de ciclos, es

$$f_{10.000.000} = (3390) \left(\frac{2.000.000}{10.000.000} \right)^{0,13} = 2750 \text{ lb/pul}$$

La dimensión de la soldadura es $w = 2020/2750 = 0,734''$. Utilizar $w = \frac{3}{4}''$.

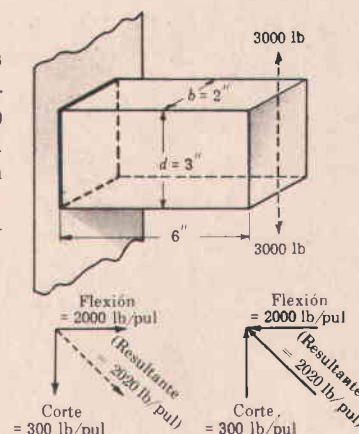


Fig. 25-16

12. Determinar la capacidad de carga de la soldadura de tapón que se muestra en la figura 25-17. Utilizar una capacidad de esfuerzo cortante permisible de 13.600 psi. La carga es constante.

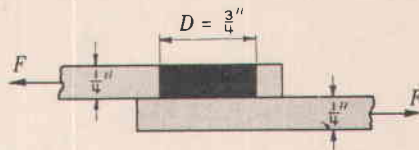


Fig. 25-17

Solución:

$$\text{Área de corte} = \frac{1}{4}\pi D^2 = \frac{1}{4}\pi \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0,441 \text{ pul}^2$$

$$\text{Fuerza permisible } F = (13.600)(0,441) = 6000 \text{ pul}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

13. Una barra de sección $1'' \times \frac{1}{2}''$ está soldada a un cilindro de 4 pul de diámetro. Determinar la dimensión de una soldadura de filete a 45°. Suponer que el esfuerzo de corte trasversal está distribuido uniformemente en la soldadura. Utilizar una carga permisible de 9600 lb por pulgada de soldadura.

Resp. Para un momento de flexión de 1800 lb-pul, el módulo de la sección de la soldadura es $Z_w = bd + d^2/3 = \frac{1}{2}(1) + 1^2/3 = 0,83 \text{ pul}^2$ y la carga resultante por pulgada de soldadura es $\sqrt{2160^2 + 50^2} = 2160 \text{ lb}$ y la dimensión de la soldadura es $2160/9600 = 0,225''$; utilizar $\frac{1}{4}''$. Como la carga es esencialmente transversal a la soldadura, se puede emplear una soldadura pequeña, con base en una carga permisible de 11.300 lb por pulgada de soldadura. Sin embargo, es satisfactoria una dimensión $w = \frac{1}{4}''$

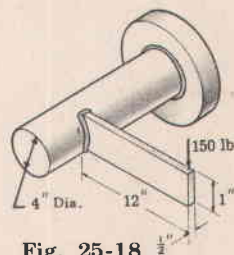


Fig. 25-18

14. Determinar la dimensión de la soldadura de filete que se debe emplear para unir las placas planas que se muestran en la figura 25-19.

Resp. $w = 0,368''$; utilizar $w = \frac{3}{8}''$ para una carga permisible de 9600 lb/pul

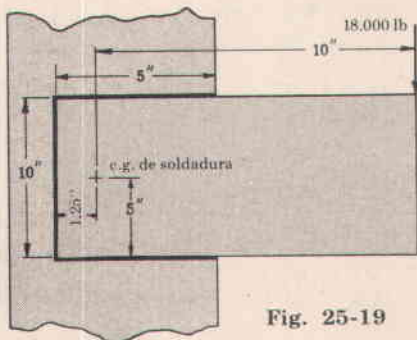


Fig. 25-19

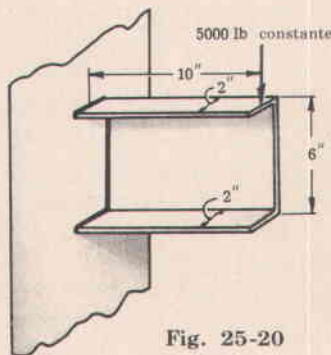


Fig. 25-20

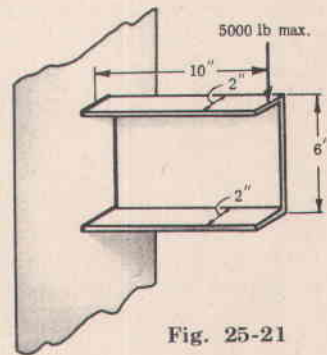


Fig. 25-21

15. En la figura 25-20 se muestra una canal soldada a un soporte. Para una carga constante de 5000 lb, determinar la dimensión de la soldadura requerida. Suponer que la carga vertical se distribuye uniformemente sobre la soldadura.

Resp. $Z_w = 18 \text{ pul}^2$, 2780 lb/pul debidas a la flexión; 500 lb-pul debidas al esfuerzo cortante, resultante = 2830 lb/pul y $w = 0,294''$ para una carga permisible de 9600 lb por pulgada de soldadura; utilizar $w = \frac{5}{16}$

16. Una canal está soldada a un soporte, como se muestra en la figura 25-21. La carga se aplica de una forma tal que varía desde cero hasta un máximo de 5000 lb. Suponer que la carga vertical se distribuye uniformemente sobre la soldadura. Determinar: (a) La carga resultante máxima sobre la soldadura, (b) la carga mínima sobre la soldadura, (c) la carga permisible por pulgada de soldadura, para 2.000.000 de ciclos, y (d) la dimensión de la soldadura.

Resp. (a) 2830 lb por pulgada (igual que en el problema 15). (b) Cero. (c) Para $K = 0$, la carga permisible por pulgada de soldadura es 5090 lb/pul. (d) $w = 0,556''$; utilizar $w = \frac{5}{8}''$

17. Se ha calculado que la dimensión de una soldadura debe ser 0,180''. Si se utiliza una soldadura de filete de $\frac{3}{8}''$, a intervalos, determinar el espaciamiento.

Resp. Utilizar una soldadura de $\frac{3}{8}''$ con intervalos de 3 pul de longitud y espaciamientos de 6 pul

18. En una placa de 1 pul de espesor se utiliza una soldadura de tapón de $1\frac{1}{2}''$ de diámetro. ¿Cuál es la carga de diseño para un esfuerzo de corte permisible de 13.600 psi?

Resp. 24.000 lb

Capítulo 26

Volantes

VOLANTES. Los volantes y los reguladores son dispositivos empleados para controlar la variación de velocidad de una máquina; la diferencia entre unos y otros es que los volantes distribuyen la energía dentro de un ciclo para controlar la velocidad, mientras que los reguladores controlan la cantidad de combustible que llega a una máquina, para igualar los requerimientos de carga y mantener una velocidad específica. Si imaginamos que un regulador funciona en una posición fija, entonces la función del volante es limitar la variación de velocidad.

Si los requerimientos exteriores de carga son constantes y la potencia de entrada también es constante, no se necesita volante. Si la potencia de entrada es variable y los requerimientos exteriores de carga son constantes, se puede utilizar un volante para aumentar la uniformidad del funcionamiento; de igual forma, si la potencia de entrada es constante y los requerimientos exteriores de carga son variables, se puede utilizar un volante para aumentar la uniformidad del funcionamiento.

Como ejemplos de máquinas en que se emplean eficazmente los volantes, están las prensas punzonadoras y los motores de combustión interna. En las prensas punzonadoras la energía de entrada puede considerarse como constante y la potencia de salida variable; en los motores de combustión interna la energía de entrada es variable y la carga de salida puede ser constante o variable.

VOLANTE DE LLANTA. El peso de la llanta de un volante de llanta puede determinarse por una de las siguientes formas equivalentes:

$$W_r = \frac{KgE}{V^2 \delta} = \frac{2KgE}{V_1^2 - V_2^2} = \frac{2KgE}{r^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

donde W_r = peso de la llanta (únicamente), en lb

K = número empírico para tener en cuenta los efectos del cubo, los rayos, el eje, etc., que se puede tomar igual a 0,9, a menos que se haga otra especificación.

g = 32,2 p/seg²

E = energía que debe entregar el volante o que se debe almacenar en él. También se puede considerar como la máxima desviación de la energía, a partir de los requerimientos medios de energía, en lb-p

V_1 = velocidad máxima de un punto situado en el radio medio de la llanta, r , en p/seg

V_2 = velocidad mínima de un punto situado en el radio medio de la llanta, r , en p/seg

$V = \frac{1}{2}(V_1 + V_2)$ = velocidad media de un punto situado en el radio medio de la llanta, en p/seg

δ = coeficiente de fluctuación de la velocidad = $(V_1 - V_2)/V = (\omega_1 - \omega_2)/\omega$

ω_1 = velocidad angular máxima del volante, en rad/seg

ω_2 = velocidad angular mínima del volante, en rad/seg

ω = velocidad angular media del volante = $\frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)$, rad/seg

VOLANTE DE DISCO SOLIDO

$$W = \frac{2gE}{V_m^2 \delta} = \frac{4gE}{V_{10}^2 - V_{20}^2} = \frac{4gE}{r_o^2(\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

donde W = peso del volante, en lb

$g = 32,2$ p/seg²

E = energía que se debe suministrar al volante, en lb-p

V_m = velocidad media de un punto situado en el radio exterior del volante

δ = coeficiente de fluctuación de velocidad = $(V_{10} - V_{20})/V_m = (\omega_1 - \omega_2)/\omega$

V_{10} = velocidad máxima de un punto situado en el radio exterior del volante, en p/seg

V_{20} = velocidad mínima de un punto situado en el radio exterior del volante, en p/seg

r_o = radio exterior del volante

ω_1 = velocidad angular máxima del volante, en rad/seg

ω_2 = velocidad angular mínima del volante, en rad/seg

ω = velocidad angular media del volante, en rad/seg

PROBLEMAS RESUELTOS

1. Deducir la ecuación del peso que debe tener la llanta de un volante de llanta: $W_r = \frac{KgE}{V^2\delta}$.

Solución:

La energía cinética E entregada por un volante, en lb-p, es

$$E = \frac{1}{2}I_O(\omega_1^2 - \omega_2^2) = \frac{I_O}{2r^2}(r^2\omega_1^2 - r^2\omega_2^2)$$

donde I_O = momento de inercia del volante y del eje sobre el cual se monta el volante, en lb-p-seg²

ω_1, ω_2 = velocidades angulares máxima y mínima del volante, respectivamente, en rad/seg

r = radio arbitrario. Si r se toma específicamente como el radio medio de la llanta, la ecuación se puede escribir

$$E = \frac{I_O}{2r^2}(V_1^2 - V_2^2) = \frac{I_O}{2r^2}(V_1 + V_2)(V_1 - V_2) = \frac{I_O}{2r^2}(2V)(\delta V) = \frac{I_O}{r^2}V^2\delta$$

donde V_1, V_2 = velocidades máxima y mínima, respectivamente, de un punto situado en el radio medio de la llanta

V = velocidad media de un punto situado en el radio medio = $\frac{1}{2}(V_1 + V_2)$

δ = coeficiente de fluctuación de velocidad = $(V_1 - V_2)/V$.

Considerar que el momento de inercia del volante se compone de dos partes:

$$I_O = \frac{W_r k_r^2}{g} + \frac{W_s k_s^2}{g} \quad (1)$$

donde W_r = peso de la llanta, en lb

k_r = radio de giro de la llanta, en p

W_s = peso del cubo, los rayos, el eje y otras masas que giran con el eje, en lb

k_s = radio de giro del cubo, los rayos, el eje y otras masas que giran con el eje, en p

$g = 32,2$ p/seg²

Si el espesor de la llanta es pequeño comparado con el radio medio, k_r es casi igual al radio medio $r: k \approx r$.

Dividiendo la ecuación (1) por r^2 y haciendo $k_r^2 = r^2$, obtenemos

$$\frac{I_O}{r^2} = \frac{W_r}{g} + \frac{W_s k_s^2}{gr^2}$$

que remplazando en $E = (I_O/r^2)V^2\delta$ da

$$E = \left(\frac{W_r}{g} + \frac{W_s k_s^2}{gr^2}\right)V^2\delta \quad \text{o} \quad \frac{W_r}{g} = \frac{E}{V^2\delta} - \frac{W_s k_s^2}{gr^2}$$

$$\text{Haciendo } K = 1 - \frac{W_s k_s^2 V^2 \delta}{gr^2 E},$$

$$W_r = \frac{gE}{V^2\delta} \left(1 - \frac{W_s k_s^2}{gr^2} \cdot \frac{V^2\delta}{E}\right) = \frac{KgE}{V^2\delta}$$

El valor de K está generalmente alrededor de 0,90 y a menos que se especifique otra cosa, se puede tomar este valor. En otras palabras, el efecto del cubo, los rayos y el eje debe aportar aproximadamente el 10% del momento de inercia requerido.

En general, el peso total del volante puede tomarse alrededor de 1,15 W_r en un análisis preliminar, antes de que se establezcan las dimensiones finales.

2. Un volante de llanta de hierro fundido tiene un radio medio de 24", un espesor de 6" y un ancho de 8". Comparar el momento de inercia exacto con el valor aproximado Wr^2/g , en que r es el radio medio. El hierro fundido pesa 0,255 lb/pul³.

Solución:

- (a) Considerando la diferencia de los momentos de inercia de dos cilindros, el momento de inercia exacto de la llanta es

$$I = \frac{1}{2} \cdot \frac{W_o}{g} r_o^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{W_i}{g} r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{4670 (2,25)^2}{32,2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{2825 (1,75)^2}{32,2} \right) = 233 \text{ lb-p-seg}^2$$

donde W_o = peso del cilindro de radio $r_o = \pi r_o^2 b \rho = \pi (27)^2 (8) (0,255) = 4670 \text{ lb}$

W_i = peso del cilindro de radio $r_i = \pi r_i^2 b \rho = \pi (21)^2 (8) (0,255) = 2825 \text{ lb}$

r_o = radio externo = 27" = 2,25', r_i = radio interior = 21" = 1,75'

b = ancho de la llanta = 8"

ρ = peso específico = 0,255 lb/pul³

- (b) Considerando la llanta como un anillo delgado, el momento de inercia aproximado es

$$I_{\text{aprox}} = \frac{W}{g} r^2 = \frac{1845}{32,2} (2)^2 = 229 \text{ lb-p-seg}^2$$

$$\text{Porcentaje de error} = \frac{233 - 229}{233} (100) = 1,7\%$$

3. Deducir la ecuación del peso que debe tener una placa circular empleada como volante:

$$W = \frac{4gE}{r_o^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

Solución:

La energía cinética E entregada por el volante, en lb-p, es

$$E = \frac{1}{2} I (\omega_1^2 - \omega_2^2)$$

donde I = momento de inercia del volante, en lb-p-seg²

ω_1 = velocidad angular máxima del volante, en rad/seg

ω_2 = velocidad angular mínima del volante, en rad/seg

El momento de inercia de un volante hecho de una placa plana de peso W y radio exterior r_o es $I = \frac{1}{2} (W/g) r_o^2$. Entonces

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{W}{g} r_o^2 \right) (\omega_1^2 - \omega_2^2) \quad \text{o} \quad W = \frac{4gE}{r_o^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)}$$

4. El volante de una prensa punzonadora debe suministrar una energía de 2000 lb-p durante el $\frac{1}{4}$ de revolución en que se está efectuando el punzonado. La velocidad máxima del volante es 200 rpm y disminuye un 10% durante el tiempo de corte. El radio medio de la llanta es 36 pul. (a) Calcular el peso aproximado de la llanta del volante, suponiendo que ésta aporta el 90% de la energía requerida ($K = 0,90$). (b) Determinar el peso total aproximado del volante, suponiendo que el peso de éste es 1,15 veces el de la llanta. (c) ¿Cuál es el coeficiente de fluctuación de velocidad?

Solución:

$$(a) \quad W_r = \frac{2KgE}{r_o^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2)} = \frac{2(0,90)(32,2)(2000)}{(36/12)^2 [(2\pi \times 200/60)^2 - (2\pi \times 180/60)^2]} = 155 \text{ lb}$$

$$(b) \text{ Peso total aproximado} = 1,15(155) = 178 \text{ lb.}$$

$$(c) \text{ Coeficiente de fluctuación de velocidad } \delta = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega} = \frac{200 - 180}{1,90} = 0,105.$$

5. Un motor de dos cilindros que tiene las manivelas en ángulo recto desarrolla 100 HP a una velocidad media de 400 rpm. El coeficiente de fluctuación de velocidad no debe ser mayor que 0,03 y el diámetro medio del volante es 4 pies. En un análisis dinámico de las fuerzas reales en el motor se encontró que la máxima variación de energía por revolución es el 20% de la energía media. Si los brazos y el cubo contribuyen en un 5% al efecto del volante ($K = 0,95$), determinar las dimensiones necesarias de la sección cuadrada de una llanta de hierro fundido que pesa 0,250 lb/pul³.

Solución:

$$\text{Energía que sale por ciclo, } M_t \theta = \left[\frac{100 (63.000)}{400 \times 12} \text{ lb-p} \right] \left[2\pi \text{ rad} \right] = 8230 \text{ lb-p}$$

Variación máxima de la energía por ciclo, $E = 0,20(8230) = 1650 \text{ lb-p}$

Velocidad media, $V = r\omega = 2[2\pi(400/60)] = 83,8 \text{ p/seg}$

$$\text{Peso de la llanta, } W_r = \frac{KgE}{V^2\delta} = \pi D_m t b \rho$$

$$\frac{0,95(32,2)(1650)}{(83,8)^2(0,03)} = \pi(48)t b(0,250)$$

donde D_m = diámetro medio, en pul; t = espesor de la llanta, en pul; b = ancho de la llanta, en pul; ρ = peso específico, en lb/pul³; resolviendo hallamos $t = b = 2,47''$; utilizar $2\frac{1}{2}''$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

6. Una máquina de gas desarrolla una potencia indicada de 80 HP a una velocidad media de 1800 rpm. La variación máxima de energía por revolución es el 27% de la energía media y el coeficiente permisible de fluctuación de velocidad es 0,02. Suponer que la llanta proporciona el 95% del efecto del volante ($K = 0,95$). La velocidad media de la llanta del volante está limitada a 8460 p/min. Determinar el diámetro medio y el peso de la llanta. Resp. 18 pul; 30,7 lb
7. Una máquina de gas desarrolla una potencia indicada de 80 HP a una velocidad media de 1800 rpm. Si la variación máxima de energía por revolución es el 27% de la energía media y el coeficiente permisible de fluctuación de velocidad es 0,02, determinar el peso que debe tener el volante. Suponer que todo el efecto del volante viene de él. El volante debe ser una placa circular de 18" de diámetro exterior, montada sobre el eje. Resp. Peso de la placa = 64,6 lb
8. El eje motor de una trituradora gira a una velocidad máxima de 60 rpm y requiere una potencia de entrada media de 10 HP. Si la variación máxima de energía por ciclo es igual a la energía media del ciclo y si la velocidad no disminuye más de un 10% durante la operación de trituración, determinar el peso requerido de una llanta que tenga un diámetro medio de 80 pul. La operación de trituración ocurre en cada revolución del eje motor. Suponer $K = 0,95$. Resp. 4040 lb
9. Un volante de acero fundido que gira a una velocidad máxima de 40 rpm, debe suministrar una energía de 75.000 lb-pul a una punzonadora durante $\frac{1}{4}$ de revolución, con una reducción de velocidad de 10%. La velocidad máxima en el radio medio de la llanta no debe exceder 3000 p/min. ¿Qué área debe tener la sección de la llanta, si el 95% del efecto del volante lo debe producir ésta? El hierro fundido pesa 0,255 lb/pul³. Resp. 41,8 pul²
10. Un motor de acción simple de dos cilindros desarrolla 250 HP a una velocidad media de 100 rpm. La variación máxima de energía por revolución es de un 10% de la energía media y la variación de velocidad está limitada a un 2% de la velocidad media. El diámetro medio de la llanta es 8 pies. Suponiendo que el cubo, los rayos y el eje aportan un 5% del efecto del volante ($K = 0,95$) y que el hierro fundido pesa 0,255 lb/pul³, determinar, (a) el coeficiente de fluctuación de velocidad, (b) el peso de la llanta, (c) el área de la sección de la llanta. Resp. 0,04, 3600 lb, 46,8 pul²

ESFUERZOS EN LOS VOLANTES. Los esfuerzos producidos en la llanta de un volante se pueden aproximar a los esfuerzos producidos en un anillo que gira libremente. El efecto de los rayos se desprecia y únicamente se considera el esfuerzo debido a la carga de inercia.

- (a) Considérese medio anillo aislado, como se muestra en la figura 26-1. La masa diferencial dM es

$$dM = \frac{r(d\theta)tb\rho}{g}$$

donde r = radio medio, en pul

$d\theta$ = ángulo diferencial subtendido por la masa diferencial, en rad

t = espesor de la llanta, en pul; b = ancho de la llanta, en pul

ρ = peso específico, en lb/pul³; $g = 386 \text{ pul/seg}^2$

- (b) Carga diferencial de inercia $f = (\text{masa})(\text{aceleración}) = \left(\frac{r(d\theta)tb\rho}{g}\right)(r\omega^2)$, donde ω = velocidad angular en rad/seg.

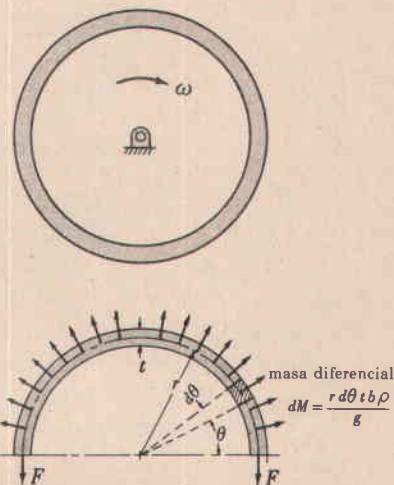


Fig. 26-1

- (c) La componente vertical de la carga diferencial de inercia es $df_v = \left[\frac{r(d\theta)tb\rho}{g} (r\omega^2) \right] \sin \theta$. Obsérvese que las componentes horizontales se equilibran.
- (d) La componente vertical de la carga de inercia se equilibra con las fuerzas de tensión en las secciones cortadas:

$$2F = \int_0^\pi \frac{r(d\theta)tb\rho}{g} (r\omega^2) \sin \theta = \frac{r^2tb\rho\omega^2}{g} [-\cos \theta]_0^\pi = \frac{r^2tb\rho\omega^2}{g} \quad (2)$$

- (e) Suponiendo que el esfuerzo de tensión s_t (psi) está uniformemente distribuido a través de toda la sección,

$$2F = 2(s_t tb) = \frac{r^2tb\rho\omega^2}{g} \quad (2)$$

$$\text{o} \quad s_t = \frac{r^2\rho\omega^2}{g} = \frac{\rho v^2}{g}$$

donde $v = r\omega$ es la velocidad (pul/seg) en el radio medio.

PROBLEMA RESUELTO

11. Determinar la velocidad máxima permisible v de la llanta de un volante de hierro fundido, si el esfuerzo máximo de tensión permisible, s_t , para el hierro fundido es 4000 psi. El hierro fundido pesa 0,255 lb/pul³.

Solución:

$$s_t = \frac{\rho v^2}{g}, \quad 4000 = \frac{0,255 v^2}{386}, \quad v = 2460 \text{ pul/seg} = 205 \text{ p/seg}$$

Obsérvese que se ha despreciado la flexión en la llanta.

PROBLEMAS PROPUESTOS

12. Determinar la velocidad máxima permisible de la llanta de un volante de acero, si el acero pesa 0,283 lb/pul³ y el esfuerzo permisible es 20.000 psi. Resp. 435 p/seg
13. Considerando que la llanta de un volante de hierro fundido se comporta como un anillo delgado que gira libremente, determinar el esfuerzo máximo de tensión debido a la rotación. La llanta tiene un ancho de 6 pul, un espesor de 4 pul y un diámetro medio de 30 pul. El volante gira a 2000 rpm y el hierro fundido pesa 450 lb/p³. Resp. 6660 psi

El cálculo del **ESFUERZO MAXIMO DE TENSION** producido en la llanta de un volante es un poco más complicado, cuando se considera la flexión y el esfuerzo normal debido a la inercia. Timoshenko dedujo sobre bases racionales una ecuación que tiene en cuenta la fuerza axial en los rayos, la flexión y el esfuerzo normal; la cual obtuvo considerando la llanta como un anillo delgado, despreciando la curvatura de la llanta y utilizando el signo que dé el mayor valor de $\frac{P}{A} \pm \frac{Mc}{I}$,

$$s_t = \frac{qv^2}{btg} \left[1 - \frac{\cos \phi}{3C \sin \alpha} \pm \frac{2r}{Ct} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \phi}{\sin \alpha} \right) \right]$$

donde s_t = esfuerzo de tensión, en psi

q = peso de la llanta por pulgada de longitud = bt , en lb/pul

v = velocidad en el radio medio, en pul/seg

b = ancho de la llanta, en pul

t = espesor de la llanta, en pul

g = 386 pul/seg²

ϕ = ángulo subtendido desde la línea media entre los rayos hasta la sección donde se encuentra el esfuerzo

2α = ángulo entre dos rayos

r = radio medio de la llanta, en pul

C = constante que depende del área de la sección transversal de la llanta, del área de la sección transversal de un rayo, de las proporciones de la llanta y del ángulo entre rayos. C está dada por

$$C = \frac{12r^2}{t^2} \left[\frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha} \right] + \frac{1}{2 \sin^2 \alpha} \left(\frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} \right) + \frac{A}{A_1}$$

donde A = área de la sección transversal de la llanta = bt

A_1 = área de la sección transversal de un rayo

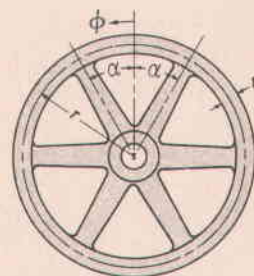


Fig. 26-2

Los valores numéricos de C para diferentes números de rayos (para simplificar la aritmética) son

$$\begin{aligned} 4 \text{ rayos } (2\alpha = 90^\circ): \quad C &= \frac{12r^2}{t^2} (0,00608) + 0,643 + \frac{A}{A_1} \\ 6 \text{ rayos } (2\alpha = 60^\circ): \quad C &= \frac{12r^2}{t^2} (0,00169) + 0,957 + \frac{A}{A_1} \\ 8 \text{ rayos } (2\alpha = 45^\circ): \quad C &= \frac{12r^2}{t^2} (0,00076) + 1,274 + \frac{A}{A_1} \end{aligned}$$

La fuerza axial en cada rayo es $F = \frac{2qv^2}{3gC}$ lb.

PROBLEMA RESUELTO

14. (a) Determinar el esfuerzo máximo de fracción en la llanta de un volante de acero que gira a 600 rpm (20π rad/seg). El radio medio de la llanta es 60" ($r = 60''$). La llanta tiene 8" de espesor ($t = 8''$) y 12" de ancho ($b = 12''$). El área de la sección transversal de la llanta es $A = bt = 96 \text{ pul}^2$. La llanta tiene 6 rayos, los cuales tienen una sección transversal constante cuya área es $A_1 = 16 \text{ pul}^2$. (Encontrar el máximo esfuerzo de tracción en la llanta, en dos secciones, $\phi = 30^\circ$ y $\phi = 0^\circ$.)
- (b) Comparar el esfuerzo determinado con el de un anillo que gira libremente.
- (c) Calcular el esfuerzo axial en cada rayo.

Solución:

(a) Para 6 rayos, $C = \frac{12r^2}{t^2} (0,00169) + 0,957 + \frac{A}{A_1} = \frac{12(60)^2}{8^2} (0,00169) + 0,957 + \frac{96}{16} = 8,10$.

En la sección de la llanta donde está localizado el rayo, $\phi = 30^\circ$. El esfuerzo en esta sección es

$$\begin{aligned} s_t &= \frac{qv^2}{btg} \left[1 - \frac{\cos \phi}{3C \sin \alpha} \pm \frac{2r}{Ct} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{\cos \phi}{\sin \alpha} \right) \right] \\ &= \frac{27,2(3770)^2}{12(8)(386)} \left[1 - \frac{\cos 30^\circ}{3(8,10) \sin 30^\circ} \pm \frac{2(60)}{8,10(8)} \left(\frac{1}{\pi/6} - \frac{\cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \right) \right] \\ &= 10.400 [1 - 0,0714 \pm 1,85(1,91 - 1,74)] \\ &= 12.900 \text{ psi (utilizando el signo + para obtener el máximo)} \end{aligned}$$

donde $q = bt\rho = 12(8)(0,283) = 27,2 \text{ lb/pul}$, $v = r\omega = 3770 \text{ pul/seg}$, $2\alpha = 60^\circ$ para 6 rayos.

En una sección de la llanta tomada en el punto medio entre dos rayos, $\phi = 0^\circ$. El esfuerzo en esta sección es

$$\begin{aligned} s_t &= \frac{27,2(3770)^2}{12(8)(386)} \left[1 - \frac{1}{3(8,10) \sin 30^\circ} \pm \frac{2(60)}{8,10(8)} \left(\frac{1}{\pi/6} - \frac{1}{\sin 30^\circ} \right) \right] \\ &= 10.400 [1 - 0,0824 \pm 1,85(1,91 - 2)] \\ &= 11.300 \text{ psi (utilizando el signo - para obtener el máximo)} \end{aligned}$$

El esfuerzo máximo de tracción en la llanta ocurre en la sección donde se localiza el rayo y es igual a 12.900 psi.

(b) Esfuerzo en un anillo que gira libremente $= \frac{\rho v^2}{g} = \frac{0,283(3770)^2}{386} = 10.400 \text{ psi}$.

Tomando en cuenta la flexión, el esfuerzo máximo es 12.000 psi, que aumenta en $\frac{12.900 - 10.400}{10.400} (100) = 24\%$ el valor obtenido en el caso simple de un anillo que gira libremente, para los datos particulares dados.

(c) La fuerza axial en cada rayo es $F = \frac{2qv^2}{3gC} = \frac{2(27,2)(3770)^2}{3(386)(8,10)} = 82.500 \text{ lb}$.

El esfuerzo en cada rayo es $F/A_1 = 82.500/16 = 5160 \text{ psi}$.

PROBLEMAS PROPUESTOS

15. Con los mismos datos del problema 14, excepto que se utiliza hierro fundido en vez de acero, determinar el esfuerzo máximo en la llanta. El hierro fundido pesa 0,255 lb/pul³. Resp. 11.700 psi

16. La llanta de un volante de hierro fundido tiene 4" de espesor, 8" de anchura y 36" de radio medio. El esfuerzo máximo de tracción en la llanta está limitado a 8000 psi. El área de la sección transversal de cada uno de los cuatro rayos de la llanta es 10 pul². El hierro fundido pesa 0,255 lb/pul³.

(a) Determinar la velocidad máxima que puede tener la llanta, sin que se exceda el esfuerzo permisible, en los siguientes casos:

(1) Considerando la llanta como un anillo que gira libremente.

(2) Analizando la sección de la llanta donde se localiza el rayo ($\phi = 45^\circ$).

(3) Analizando la sección de la llanta situada en el punto medio, entre dos rayos ($\phi = 0^\circ$).

(b) Determinar el esfuerzo máximo en un rayo, con base en la máxima velocidad determinada.

Resp. (a) 3480 pul/seg, 2870 pul/seg, 3150 pul/seg. La máxima velocidad que se puede alcanzar sin exceder los 8000 psi es 2870 pul/seg, restringida por la sección más cargada, que es la sección donde se localiza el rayo.

(b) 1190 psi (para $v = 2870$ pul/seg)

LOS ESFUERZOS APROXIMADOS EN LLANTAS DE VOLANTES de construcción ordinaria están dados por la ecuación de Lanza:

$$s = V^2 \left(0,075 + \frac{0,25d}{tn^2} \right)$$

donde s = esfuerzo de tracción, en psi

d = diámetro medio de la llanta, en pul

t = espesor de la llanta, en pul

V = velocidad en el radio medio, p/seg

n = número de rayos

donde se tienen en cuenta los efectos de carga de inercia y flexión por medio de los dos términos. Aproximadamente 3/4 del esfuerzo se deben al esfuerzo de tracción producido en la llanta por la carga de inercia y el otro 1/4 se debe a la flexión en la llanta, considerando ésta como una viga fija en los extremos (en los rayos) y cargada entre los rayos con la carga de inercia.

PROBLEMAS RESUELTOS

17. Suponiendo que el esfuerzo máximo producido en la llanta de un volante se puede aproximar en la forma sugerida por Lanza calculando 3/4 del esfuerzo considerando la llanta como un anillo que gira libremente y 1/4 del esfuerzo considerando la llanta como una viga recta fija en ambos extremos de longitud igual al arco comprendido entre brazos y cargada uniformemente con las fuerzas de inercia, deducir la ecuación del esfuerzo máximo s . Tomar el peso específico como 0,270 lb/pul³.

Solución:

(a) El esfuerzo s_1 (psi) producido en un anillo que gira libremente es

$$s_1 = \frac{\rho v^2}{g} = \frac{0,270(12V)^2}{386} = 0,10V^2$$

donde v = velocidad en pul/seg, V = velocidad en p/seg, $g = 386$ pul/seg².

(b) En seguida se halla el esfuerzo de flexión s_2 , considerando la llanta como una viga recta con ambos extremos fijos y siendo su longitud igual al arco comprendido entre rayos.

$$s_2 = \frac{Mc}{I} = \frac{6M}{bt^2} \text{ para una viga de sección rectangular}$$

El momento de flexión M producido en los extremos de una viga rigidamente apoyada en ambos extremos y uniformemente cargada, es

$$M = \frac{1}{12}WL = \frac{1}{12} \left[\frac{\pi dbt\rho}{ng} \left(\frac{1}{2}d\omega^2 \right) \right] \frac{\pi d}{n} = \frac{0,000287 d^3 b t \omega^2}{n^2}$$

donde W = carga de inercia = (masa)(aceleración) = $\frac{(\pi d)(bt)\rho}{ng} \left(\frac{1}{2}d\omega^2 \right)$, lb

d = diámetro medio de la llanta, en pul ; b = ancho, en pul ; t = espesor, en pul

ω = velocidad angular, en rad/seg ; n = número de rayos ; $L = d/n$, en pul

Remplazando el valor de M en la ecuación de s_2 se obtiene

$$s_2 = \frac{6M}{bt^2} = \frac{0,00172d^3\omega^2}{tn^2} = \frac{0,990dV^2}{tn^2}$$

donde $d\omega = 24V$, puesto que $v = 12V = \frac{1}{2}d\omega$.

$$(c) \text{ Entonces } s = 0,75s_1 + 0,25s_2 = 0,75(0,10V^2) + 0,25\left(\frac{0,990dV^2}{tn^2}\right) \\ = V^2\left(0,075 + \frac{0,25d}{tn^2}\right), \text{ la ecuación de Lanza.}$$

18. Utilizar la ecuación de Lanza para determinar el esfuerzo máximo de tracción producido en la llanta de un volante de hierro fundido que gira a 600 rpm. La llanta tiene un radio medio de 60", un espesor de 8" y un ancho de 12". Se utilizan 6 rayos. Obsérvese que los datos son iguales a los del problema 15.

Solución:

$$V = r\omega = \left(\frac{60}{12}p\right)\left(\frac{2\pi(600)}{60} \text{ rad/seg}\right) = 314 \text{ p/seg (alta para hierro fundido)}$$

$$s = V^2\left(0,075 + \frac{0,25d}{tn^2}\right) = (314)^2\left(0,075 + \frac{0,25(120)}{8(6)^2}\right) = 17.600 \text{ psi}$$

Comparando el resultado anterior aproximado con el esfuerzo de 11.700 psi, hallado utilizando la ecuación deducida racionalmente en la sección precedente, en el problema 15, se observa que la ecuación aproximada da un valor del esfuerzo muy grande, que corresponde a un diseño conservador.

Obsérvese también que, con el procedimiento empleado, el esfuerzo máximo puede reducirse considerablemente aumentando el número de rayos.

LOS ESFUERZOS PRODUCIDOS EN DISCOS ROTATORIOS DE ANCHURA UNIFORME, tales como placas sólidas empleadas como volantes, están dados por las siguientes ecuaciones:

Discos con agujero:

Esfuerzo radial en un radio cualquiera r :

$$s_r = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8}\right) \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2 - \left(\frac{r}{b}\right)^2 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]$$

Esfuerzo tangencial en un radio cualquiera r :

$$s_t = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8}\right) \left[1 + \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2 - \left(\frac{3\mu+1}{\mu+3}\right)\left(\frac{r}{r_o}\right)^2 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]$$

El máximo esfuerzo radial ocurre en $r = \sqrt{r_i r_o}$ y es

$$s_{r \max} = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8}\right) \left(1 - \frac{r_i}{r_o}\right)^2$$

El máximo esfuerzo tangencial ocurre en $r = r_i$ y es

$$s_{t \max} = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{4}\right) \left[1 + \frac{1-\mu}{\mu+3} \left(\frac{r_i}{r_o}\right)^2\right]$$

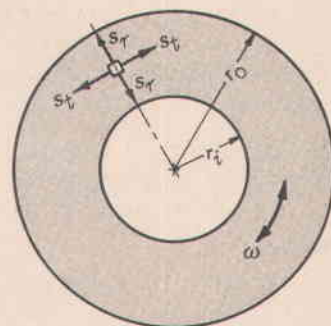


Fig. 26-3

donde $s_{r \max}$ = esfuerzo radial máximo, en psi
 $s_{t \max}$ = esfuerzo tangencial máximo, en psi
 ρ = peso específico, en lb/pul³
 g = 386 pul/seg²
 μ = razón de Poisson (0,30 para el acero y 0,27 para el hierro fundido)
 $v = r_o \omega$, velocidad periférica, en pul/seg
 r_i = radio interior de la placa, en pul
 r_o = radio exterior de la placa, en pul
 r = radio variable, en pul

Discos sólidos:

Las ecuaciones generales de los esfuerzos radial y tangencial producidos en discos rotatorios sólidos son un poco diferentes de los de los discos con agujero.

Esfuerzo radial en un radio cualquiera r :

$$s_r = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8} \right) \left[1 - \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right]$$

Esfuerzo tangencial en un radio cualquiera r :

$$s_t = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8} \right) \left[1 - \frac{3\mu+1}{\mu+3} \left(\frac{r}{r_o} \right)^2 \right]$$

El esfuerzo radial máximo y el esfuerzo tangencial máximo son iguales y tienen lugar en $r = 0$:

$$s_{r \max} = s_{t \max} = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8} \right)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

19. Determinar el esfuerzo radial máximo y el esfuerzo tangencial máximo producidos en una placa de acero (razón de Poisson, $\mu = 0,3$) que gira a 3000 rpm. El radio del agujero de la placa es $r_i = 4''$ y el radio exterior de la placa es $r_o = 12''$. ¿Dónde ocurre el máximo esfuerzo? El acero pesa 0,280 lb/pul³.

Solución:

- (a) Para $v = r_o \omega = 12(2\pi \times 3000/60) = 3770$ pul/seg, el máximo esfuerzo radial es

$$s_{r \max} = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8} \right) \left(1 - \frac{r_i^2}{r_o^2} \right) = \frac{0,280(3770)^2}{386} \left(\frac{0,3+3}{8} \right) \left(1 - \frac{4}{12} \right) = 1890 \text{ psi}$$

Este esfuerzo se localiza en $r = \sqrt{r_i r_o} = \sqrt{4(12)} = 6.93$ pul

- (b) El máximo esfuerzo tangencial es

$$\begin{aligned} s_{t \max} &= \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8} \right) \left[1 + \frac{1-\mu}{\mu+3} \left(\frac{r_i}{r_o} \right)^2 \right] \\ &= \frac{0,280(3770)^2}{386} \left(\frac{0,3+3}{8} \right) \left[1 + \frac{1-0,3}{0,3+3} \left(\frac{4}{12} \right)^2 \right] = 8700 \text{ psi} \end{aligned}$$

Este esfuerzo ocurre en $r = r_i = 4$ pul.

20. Un rotor sólido de acero de 3 pies de longitud y 12 pulgadas de diámetro gira a 3000 rpm. ¿Cuál es el máximo esfuerzo radial y el máximo esfuerzo tangencial y dónde ocurren? El acero pesa 0,280 lb/pul³ y la razón de Poisson es $\mu = 0,3$.

Solución:

Aquí $v = r_o \omega = 6(2\pi \times 3000/60) = 1884$ pul/seg.

$$s_{r \max} = s_{t \max} = \frac{\rho v^2}{g} \left(\frac{\mu+3}{8} \right) = \frac{0,280(1884)^2}{386} \left(\frac{0,3+3}{8} \right) = 1060 \text{ psi}$$

Los esfuerzos máximos ocurren en el centro del rotor.

PROBLEMA RESUELTO

21. Una pieza de acero forjado tiene un diámetro de 24'' y gira a 600 rpm. El centro de la pieza es defectuoso y se propone hacer a la pieza un agujero central de 8'' de diámetro. Determinar los esfuerzos máximos producidos en la pieza sólida y en la pieza hueca. El acero pesa 0,280 lb/pul³. La relación de Poisson es 0,3.

Resp. Pieza sólida: $s_{r \max} = 17.000$ psi, $s_{t \max} = 17.000$ psi

Pieza hueca: $s_{r \max} = 7560$ psi, $s_{t \max} = 34.900$ psi

Obsérvese que la pieza hueca tiene un esfuerzo tangencial más alto.

Capítulo 27

Proyectos

Con el fin de practicar los principios de los anteriores capítulos en situaciones más comprensivas, se sugieren los siguientes proyectos que incluyen, en diferentes grados, combinaciones de análisis, síntesis, ingeniosidad, dimensionamiento de las partes, empleo de códigos, dibujos y esquemas, selección de materiales, consideraciones de seguridad, factores de economía, duración probable y otras ideas relacionadas.

1. Diseño de una prensa de tornillo manual — una tonelada de capacidad

Se debe diseñar una prensa de tornillo manual para uso general, de una tonelada de capacidad. Las especificaciones preliminares se han establecido como se indica en la figura 27-1. Mientras que un diseño completo requeriría dibujos detallados, este proyecto incluirá únicamente el análisis de las diferentes partes, junto con un dibujo, del conjunto hecho en un papel de 18" × 24". Además de los cálculos se necesita un esquema a escala de cada parte, para hacer el análisis. Con los esquemas se debe dar una información suficiente que permita al dibujante hacer los dibujos detallados.

El dibujo debe mostrar dos vistas: Una, como la que se muestra en la figura y la otra, de lado.

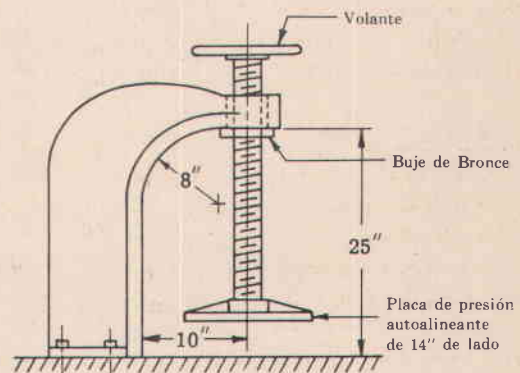


Fig. 27-1

Materiales sugeridos

1. Bastidor - hierro fundido
2. Placa de presión - hierro fundido
3. Tornillo - acero SAE 1025
4. Buje - bronce Mn.
5. Pernos - acero

Las siguientes preguntas indican algunos de los factores que se deben considerar en el diseño.

A. Diseño del tornillo

- (1) ¿Qué tipo de rosca se debe utilizar? ¿Rosca Acme? ¿Rosca cuadrada? ¿Rosca American Standard o Unified National, ordinaria o fina?
- (2) ¿Este tornillo se puede considerar como un elemento corto sometido a presión? ¿Como una columna?
- (3) Si se considera como una columna, ¿cuál es la longitud no apoyada? ¿Cuál es el extremo que permanece fijo?
- (4) ¿Hay carga axial? ¿Carga de flexión? ¿Carga de torsión? ¿Carga excéntrica? ¿Alguna otra carga?
- (5) ¿El tipo de carga es el mismo en ambos lados de la tuerca?
- (6) ¿Qué combinación de cargas producirán el máximo esfuerzo y en qué punto (o puntos) ocurrirá?
- (7) ¿Cuál debe ser la eficiencia del tornillo? ¿Es conveniente sobrecargarlo?
- (8) ¿Qué medidas (si hay que tomar alguna) se deben tomar para la lubricación?
- (9) ¿Qué factor de seguridad se requiere? ¿Sobre qué propiedades físicas del material se debe basar este factor? ¿Sobre la resistencia al fallar? ¿Sobre el límite de fatiga? ¿Sobre el límite de fluencia? ¿Cuál es el peligro de la sobrecarga? ¿Hay peligro para la prensa o para el operario? ¿El diseño se debe basar en la rigidez o

en la resistencia? ¿Se diseña para carga variable o constante? ¿Se considera que hay choque o concentración de esfuerzos?

- (10) ¿Cuál es el límite probable del coeficiente de rozamiento para el tornillo y la tuerca? ¿Para el collar? ¿Qué efecto tiene el coeficiente de rozamiento sobre la carga? ¿El diseño es seguro si se utiliza el máximo coeficiente de rozamiento posible? ¿Qué efecto produce la elección de los materiales sobre los valores de los coeficientes que se deben emplear? ¿Qué empuje se debe transmitir del tornillo a la placa de presión? ¿Qué efecto tiene esto sobre el momento requerido?
- (11) ¿Qué dimensión debe tener el volante?

B. Diseño del buje

- (1) ¿Qué longitud debe tener la tuerca? ¿Qué efecto se logra sobre la distribución de carga en los filetes, aumentando la relación de la longitud al diámetro?
- (2) ¿La tuerca debe ser enteriza con el bastidor? Si no, ¿cómo se debe fijar?
- (3) ¿Cómo se transmite el empuje del tornillo al bastidor?
- (4) Bajo una sobrecarga, ¿debe fallar primero el buje o el bastidor?
- (5) ¿Cómo es la distribución de esfuerzos en el buje? ¿Qué espesor debe tener la pared?

C. Diseño de la placa de presión

- (1) ¿Cómo es la distribución de presión en la placa?
- (2) ¿La carga resultante es excéntrica?
- (3) ¿Cuál es el esfuerzo en la placa? ¿Se necesitan hacer aproximaciones?
- (4) ¿Cómo se debe fijar el tornillo a la placa, para permitir el autoalineamiento?

D. Diseño del bastidor

- (1) ¿Cuáles son las cargas: en la sección vertical, en la sección horizontal, y en la sección curva?
- (2) Como una primera aproximación, suponer una sección rectangular en que el ancho es igual a cinco octavos de la altura.
- (3) Cambiar esta sección por una sección T y hacer una verificación. Hacer cualquier cambio que sea indicado.
- (4) ¿Cuál debe ser el ancho de la sección T? ¿Existe una sección mínima debido a las otras partes, tales como el cubo alrededor del buje? ¿Qué ancho debe tener la base para fijar los pernos de anclaje?
- (5) ¿La sección curva se puede analizar como una viga recta?
- (6) ¿La rigidez del bastidor es importante?

E. Diseño de los pernos de anclaje

- (1) ¿Qué cargas deben resistir los pernos?
- (2) ¿Cómo es la distribución de las cargas en los pernos?
- (3) ¿Todos los pernos tienen las mismas dimensiones? ¿Por qué?
- (4) ¿Qué sobreespesor debe dejarse para la cabeza?
- (5) ¿Qué tamaño de pernos debe emplearse?

2. Análisis del vástago de una válvula

Una leva de perfil circular actúa contra la cara plana, de 3 pul de diámetro, de un seguidor, como se muestra en la figura 27-2. Se debe hacer un análisis para 90° de rotación de la leva en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj.

Para la posición mostrada, la fuerza del resorte es 70 lb y la fuerza P , 100 lb. Como el seguidor está saliendo, la fuerza del resorte aumenta linealmente hasta 120 lb y la fuerza aplicada P disminuye linealmente hasta 40 lb.

Se debe determinar el peso del seguidor, el cual está hecho de acero ($0,28 \text{ lb/pul}^3$). Se puede suponer que el peso del resorte es aproximadamente 6 lb.

La leva gira a una velocidad uniforme de 1800 rpm, en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. El coeficiente de fricción de deslizamiento es 0,25.

Encontrar:

- El esfuerzo máximo producido en el vástago de la válvula, en la posición mostrada.
- El esfuerzo máximo producido en el vástago de la válvula durante una rotación de 90° en el sentido contrario al del movimiento de las agujas del reloj. (Analizar para 0° , 30° , 60° y 90° . Expresar gráficamente los resultados. Analizar para cualquier otra posición si es necesario.) En el análisis de inercia suponer que la masa equivalente del resorte es $1/3$ de la masa del resorte.
- El máximo esfuerzo de contacto entre la leva y el seguidor durante 90° de rotación.
- Diseñar un resorte para las especificaciones dadas. El máximo esfuerzo cortante de diseño para el resorte está limitado a 75.000 psi.

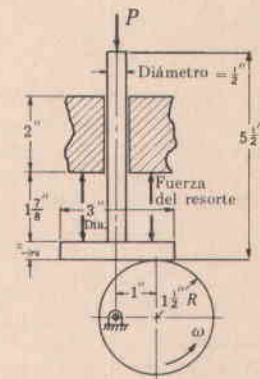


Fig. 27-2

3. Reductor de velocidad de una etapa

Se debe diseñar un reductor de velocidad de una etapa, en ángulo recto, tan compacto como sea posible, para utilizarlo en una máquina mezcladora de masa de pan. Desde el eje de alta velocidad se deben transmitir cinco caballos de fuerza a 1150 rpm, con una reducción de velocidad de 3 a 1. La potencia se debe aplicar por medio de una transmisión de correa en V y se toma del eje de salida por medio de un acoplamiento flexible. La razón de las velocidades de las poleas es 1 a 1.

Basar la selección de los cojinetes en un funcionamiento satisfactorio por dos años, trabajando 10 horas al día y 6 días a la semana. Limitar el diámetro primitivo de las poleas a 6", como mínimo.

Como la máquina debe funcionar en una atmósfera empolvada, la propiedad de sellado es muy importante. Se requiere un dibujo detallado del montaje, en dos vistas, con una lista de materiales.

4. Reductor de velocidad

El reductor de velocidad de engranajes rectos planetarios que se muestra en la figura 27-3 suministra 4 HP al eje de entrada por medio de un acoplamiento flexible. El eje gira a 1200 rpm. La potencia se transmite sin choque, 24 horas al día.

Hay tres engranajes planetarios, igualmente espaciados. El engranaje interno se mantiene fijo. Los engranajes se deben hacer de acero SAE 1030.

- Determinar las dimensiones que deben tener los ejes, para transmitir la potencia. La potencia se toma del eje por medio de un acoplamiento.
- Determinar el menor diámetro que pueden tener los engranajes, si la razón de velocidades es 8:1. Ningún engranaje debe tener menos de 15 dientes. Emplear dientes "stub" a 20° . Verificar las cargas dinámicas y de desgaste.
- Determinar la longitud de los dientes de los engranajes.
- Determinar el tamaño del pasador sobre el cual gira, en el brazo, un engranaje planetario. El pasador es de acero SAE 1030.
- Determinar las cargas en los cojinetes. Los cojinetes de cada eje están separados 6 pulgadas.
- Describir la transmisión del momento en la unidad. ¿Qué momento se debe aplicar en la base? ¿Este momento depende del sentido de rotación del eje de entrada?
- Especificar el tamaño de los pernos que se deben utilizar en la base.
- Determinar las dimensiones de la cuña que se debe emplear para fijar el engranaje al eje de entrada. La cuña es de acero SAE 1020.

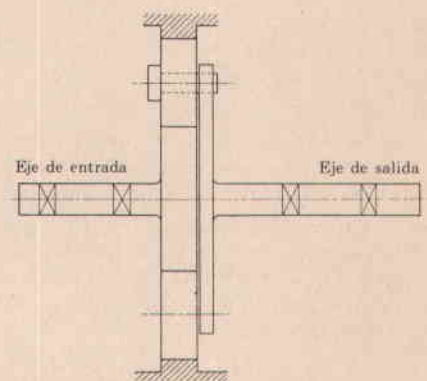


Fig. 27-3

5. Reductor de velocidad "turbo-prop"

Una máquina aérea de turbo-hélice de 800 HP gira a 13.500 rpm y la velocidad de la hélice se reduce, por medio de engranajes, hasta 900 rpm. A la hélice se transmiten 600 HP y el resto de potencia se utiliza en el empuje del chorro. La NACA ha prescrito detalladamente los requerimientos de diseño de los accesorios aéreos, teniendo en cuenta las ráfagas de viento, las fuerzas giroscópicas, la maniobrabilidad y el aterrizaje. Este proyecto se simplificará suponiendo que las cargas son constantes. Una de las pruebas que debe pasar el reductor es 1000 horas en el banco de prueba. La carga en el banco de prueba es exigente y rigurosa: La máquina estará sometida 250 horas a una carga de 200% y 750 horas a una carga de 100%.

Un requerimiento especial es que el peso sea mínimo.

La reducción de 13.500 rpm a 900 rpm es excesiva para una sola etapa. Se propone utilizar la reducción de una etapa junto con el arreglo de engranajes planetarios, como se muestra en la figura 27-4.

El diámetro del engranaje 2 puede tomarse como 6". El diámetro del engranaje 7 debe ser tres veces el del engranaje 8.

Se debe hacer un dibujo detallado, a escala, de todas las partes, incluyendo el montaje de los cojinetes.

La caja del reductor es, por sí misma, un proyecto, pero no se analizará. Diseñar los engranajes y los ejes y seleccionar los cojinetes y las dimensiones de la caja acorde con la disposición de los engranajes, los ejes y los cojinetes.

El número de engranajes planetarios que se deba utilizar afecta las dimensiones. Utilizar, arbitrariamente, tres engranajes planetarios.

Consideraciones finales:

1. Materiales: Utilizar acero de alta resistencia o aleaciones.
2. Para el montaje de los engranajes se deben satisfacer dos condiciones:

$$(a) N_2 + N_6 = \text{número par} \quad (b) (N_2 + N_6)/n = \text{entero}$$

donde N_2 = número de dientes del engranaje 2, N_6 = número de dientes del engranaje 6, n = número de engranajes planetarios.

3. Utilizar la velocidad de engranaje de los dientes (y no la velocidad absoluta) para encontrar las cargas dinámicas de los engranajes.
4. Utilizar la carga media cúbica para calcular las cargas sobre los cojinetes, ejes y engranajes.
5. El mínimo margen de seguridad para los engranajes debe ser 0,2.
6. Considerar la posibilidad que los ejes sean huecos.
7. Observar que las cargas sobre los dientes de los engranajes planetarios se invierten completamente.
8. El avión tiene una velocidad de diseño de 300 mph. La eficiencia de la hélice puede tomarse como 85%. Despreciar las pérdidas por rozamiento en el reductor.

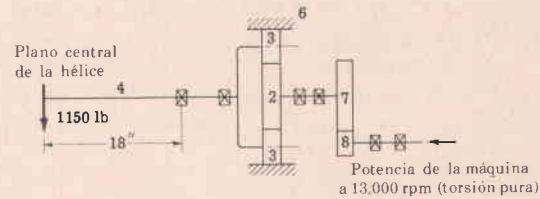


Fig. 27-4

6. Cilindro de aire

Se debe diseñar un cilindro de aire para operar a 80 psi. La máxima presión de aire disponible en la planta, cuando se utiliza el cilindro, es 150 psi. Por tanto, el tamaño del cilindro se debe basar en una presión de 80 psi, pero el análisis de esfuerzos se basará en una presión de 150 psi.

La fuerza aplicada que se requiere durante la carrera de "salida" del pistón es 1200 lb. Aunque la resistencia de rozamiento en un cilindro bien diseñado es aproximadamente el 5% de la fuerza teórica del cilindro, se aconseja determinar el tamaño del cilindro para que pueda ejercer aproximadamente $1\frac{1}{2}$ veces la fuerza que se considera suficiente para el trabajo. Así, el tamaño del cilindro se basará en una presión de 80 psi y en una fuerza requerida de $(1\frac{1}{2})(1200) = 1800$ lb.

La fuerza requerida en la carrera de "entrada" del pistón es 150 lb. Por tanto, con base en el factor $1\frac{1}{2}$ dado anteriormente, se requiere una fuerza de 225 lb para el diseño del cilindro, en la carrera de regreso o "entrada".

La carrera del cilindro debe ser 60 pulgadas.

El cilindro debe ser de doble acción y debe tener 1" de acolchonamiento en cada extremo. Se deben utilizar válvulas de aguja para controlar el flujo de aire del área acolchonada. Deben tomarse medidas para permitir un arranque rápido del pistón.

Los materiales que se deben utilizar en las diferentes partes son:

Vástago del piston	SAE 1020
Cilindro	Tubería de acero sin costura
Tapas del cilindro	Hierro fundido de buena calidad
Pistón	Hierro fundido de buena calidad o acero SAE 1020

El cilindro se debe montar, por medio de orejas apropiadas, sobre una superficie paralela al vástago del pistón. Se deben utilizar cuatro pernos para el montaje. Para hacer mínimos los esfuerzos en los pernos y mantener el alineamiento, se pueden colocar bloques de presión en los bordes interiores de las superficies de montaje.

El extremo del vástago del pistón se debe diseñar con una conexión de pasador.

Los siguientes son algunos de los puntos que se deben considerar en el diseño:

- (1) Prevenir la oxidación del interior del cilindro, producida por la condensación de la humedad del aire comprimido.
- (2) Casquillos de prensaestopas y empaquetaduras adecuadas para prevenir fugas de aire.
- (3) Facilidad de graduación de las empaquetaduras.
- (4) Utilizar roscas finas en lugar de roscas ordinarias.

Se pide: 1. Una lista completa de los cálculos.

2. Esquemas de todas las partes.

3. Una vista de corte, con todas las piezas detalladas, en una hoja de papel de 18" × 24".

7. Extractor de cojinetes

Se dispone de varios métodos para quitar elementos de máquinas que están ajustados con interferencia. Un método es el empleo de una prensa de husillo; otro es el empleo de un tornillo de banco con un ensanchador y otro consiste en emplear un extractor (conocido como extractor de ruedas).

En este proyecto se desea diseñar un extractor para una aplicación específica: La remoción de cojinetes de bolas montados con interferencia entre el anillo interior y el eje.

El extractor debe poderse graduar de tal forma que se pueda utilizar para extraer cojinetes radiales de una hilera de bolas que tengan diámetros exteriores comprendidos entre 3,1496" y 5,1181". Los diámetros internos están entre 1,5748" y 2,1654".

La máxima interferencia entre el eje y el agujero del cojinete más grande es 0,0015", para el ajuste más forzado. Para este ajuste, la presión radial máxima entre el anillo interior del cojinete y el eje es aproximadamente 3000 psi.

El extractor debe funcionar por presión contra el anillo interior, para no dañar el cojinete.

El ancho máximo de un cojinete es 1,30". La línea central del cojinete está a una distancia máxima de 8" del extremo del eje.

Se pide: 1. Un dibujo del montaje, hecho en una hoja de 18" × 24".

2. Una lista completa de los cálculos.

3. Esquemas de todas las partes.

8. Movimiento de Ginebra

Un transportador de banda se mueve intermitentemente por medio de un engranaje de Ginebra. El transportador es accionado por una rueda montada en el mismo eje que la cruz de Malta. Para esta aplicación particular, los datos de diseño son:

Velocidad angular de la manivela impulsora = 12 rpm (constante)

Radio de la manivela impulsora = 6 pulgadas
 Distancia entre pivotes = $6\sqrt{2}$ pul
 Diámetro de la rueda = 7,6 pul
 Fuerza necesaria para mover la banda y la carga = 2500 lb
 Rozamiento de agarre de la banda = 170 lb (constante)
 Diámetro del rodillo = $\frac{3}{4}$ "

1. Para determinar si el diseño es satisfactorio, se requiere un análisis de las aceleraciones, las fuerzas y los esfuerzos. Se debe determinar lo siguiente:

- (a) La aceleración angular máxima de la rueda de Malta.
- (b) La fuerza máxima en el rodillo
- (c) El momento máximo ejercido en el eje conducido
- (d) Los mínimos esfuerzos de contacto en el rodillo
- (e) El máximo esfuerzo en la sección A-A
- (f) El diámetro del eje conductor
- (g) El diámetro del eje conducido
- (h) Determinar la dureza que debe tener el acero del rodillo
- (i) El diámetro que debe tener el rodillo si su anchura se reduce a $\frac{1}{2}$ " y el esfuerzo de contacto se limita a 100.000 psi.

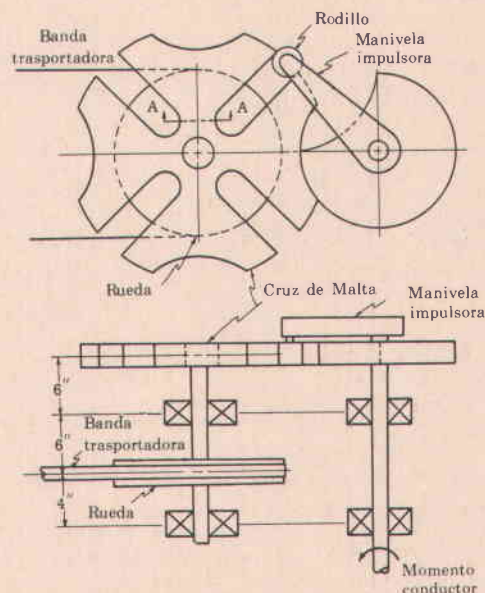


Fig. 27-5

2. El momento polar de inercia total equivalente de la masa de las partes que giran (con respecto al eje de la polea) es 112 lb-pul-seg². Teniendo esto en cuenta, determinar la información que se pide en la parte 1.
3. La banda del transportador descansa sobre 200 rodillos de 2 pul de diámetro, que tienen un momento polar de inercia de 0,02 lb-pul-seg². El momento polar de inercia de cada rueda (una en cada extremo del transportador) es 7 lb-pul-seg². Para este caso determinar un momento masa polar de inercia equivalente, con respecto al eje de la rueda. Hallar la información solicitada en la parte 1.

9. Control automático

La secuencia de funcionamiento de un mecanismo controlado eléctricamente la debe iniciar un operario que oprime un botón de contacto. Deben ocurrir los siguientes eventos:

- (1) Oprimiendo un botón se pone en acción el motor de una bomba de aceite y una válvula eléctrica de solenoide de cuatro vías, que controla un cilindro hidráulico, con tal que una pieza de accionamiento no esté en su puesto. Una luz verde se apaga y una luz roja permanece encendida para informar al operario que la máquina está cargada.
- (2) El vástago del pistón se mueve hasta su posición exterior extrema, localizando la pieza de accionamiento en su puesto. El vástago del pistón retrocede automáticamente hasta su posición inicial.
- (3) La válvula de solenoide de cuatro vías de una abrazadera hidráulica se mueve para mantener la pieza de accionamiento en su puesto.
- (4) Cuando se aplica la abrazadera hidráulica se abre un agujero; el agujero se retira y la abrazadera se suelta.
- (5) La válvula de solenoide de cuatro vías, que controla un segundo cilindro hidráulico, se mueve para empujar la pieza de accionamiento hasta su siguiente posición, siendo la carrera perpendicular al cilindro que alimenta la máquina.
- (6) Cuando el vástago del pistón llega hasta el extremo de su carrera, regresa hasta su posición inicial y se enciende una luz verde para informar al operario que el ciclo se puede repetir. La luz roja se apaga.

Una vez proporcionados todos los entrecierres, todas las protecciones necesarias y una operación manual para el caso de un atascamiento, diseñar un circuito de control para ejecutar las operaciones requeridas. Se dispone de un suministro de potencia trifásico de 220 V.

10. Control automático del nivel del agua

Se debe mantener el nivel del agua de un tanque vertical de $10'' \times 10''$, como se muestra en la figura 27-6. El agua está fluyendo por un orificio situado en el fondo del tanque a razón de $CA_0\sqrt{2gh}$, donde C es la constante del orificio, A_0 es el área del orificio y h es la altura total hasta el nivel del agua. Los valores de C y A_0 son tales que el flujo es $\sqrt{h}$ pul³/seg, con h en pulgadas. Un flotador, cuya área de la sección transversal es A pul², está unido a una válvula reguladora, como se muestra.

En condiciones de equilibrio la fuerza del fluido, que tiende a cerrar la válvula, está balanceada por la fuerza del resorte. Las condiciones de equilibrio existen cuando el flujo que entra al tanque es igual al flujo que sale por el orificio y el nivel está en una posición horizontal. Para una desviación en la posición del nivel hay un cambio en la fuerza hidráulica que tiende a cerrar la válvula, igual a $10 m$ lb, donde m es el desplazamiento vertical del disco de la válvula, en pulgadas. El cambio del flujo que pasa por la válvula, a partir de la posición de equilibrio, está dado por $100 m$ pul³/seg. El cambio en el nivel del agua o desviación, se denota por c . El momento de inercia del montaje, incluyendo el flotador, la varilla del flotador y la válvula, con respecto al fulcro de la palanca se puede tomar igual a $0,05$ lb-pul-seg².

Determinar el área del flotador, A , y la constante de elasticidad k , más convenientes, si el área del flotador está limitada entre $0,1$ y 1 pul² y la constante elástica entre $1,0$ y 100 lb/pul. Determinar también si se necesita amortiguamiento para que haya estabilidad.

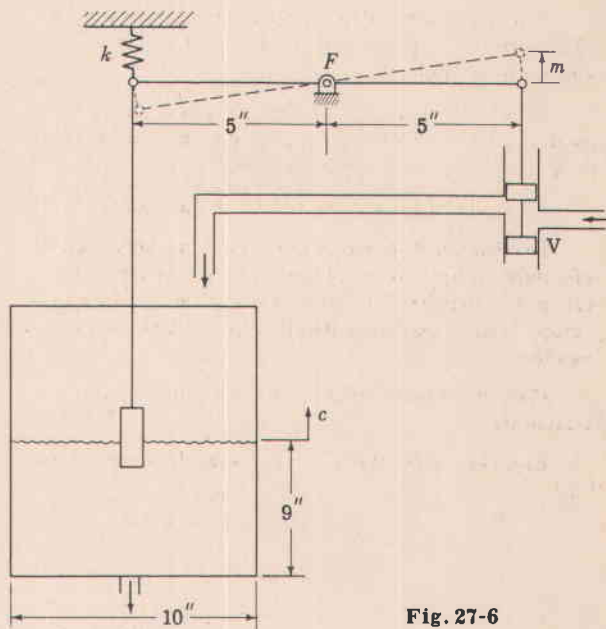


Fig. 27-6

11. Diseño de un tanque

El fin de este proyecto es familiarizar al estudiante con el procedimiento general de diseño recomendado por el código de la ASME.

Problema: Se necesita almacenar aproximadamente 10.000 galones de propano líquido para utilizarlo como combustible gaseoso. El propano tiene una presión de vapor de 120 psi a 70°F y 210 psi a 105°F. El tanque de almacenaje se debe diseñar para una presión de trabajo de 250 psi, de acuerdo con el código de la ASME, para recipientes a presión no sometidos a calor.

12. Cortabarras

Se requiere un dispositivo portátil, liviano, seguro, operado a mano, para cortar barras de acero de bajo carbono de $\frac{1}{2}''$ de diámetro. Se desea que la distorsión en las superficies cortadas sea mínima. La unidad debe ser compacta y fácil de transportar, y además debe ser hidráulica.

Referencia: U.S. Patents 2236833 y 2384130.

Se pide: 1. Una lista completa de los cálculos y esquemas de cada pieza.

2. Un dibujo del montaje, por lo menos con dos vistas, en una hoja de $18'' \times 24''$.

13. Alternador de libros

Los libros vienen de la operación de encuadernación, pasan por una máquina de envolver y siguen hacia la sección de empaque.

Antes de empacar los libros para despacharlos, éstos deben rotar 180°. En la figura 27-7 se muestran los libros antes y después de la rotación.

La producción es de 60 libros por minuto.

Diseñar un dispositivo para rotar los libros. El diseño debe indicar lo suficiente para que la administración pueda decidir si la idea es digna de consideración y luego se hace un diseño detallado y por último la construcción.

Considerar que se dispone de suficiente espacio para el montaje.

Espacio entre libros = $1\frac{1}{2}$ veces la longitud del libro.

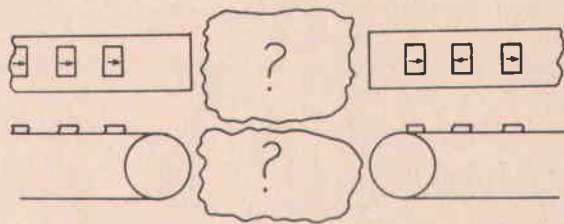


Fig. 27-7

14. Ascensor para una persona

Propósito:

El propósito de este proyecto es establecer un diseño preliminar y hacer recomendaciones para la instalación de un ascensor para una persona, que ha sido solicitado por un cliente. Este diseño preliminar atañe sólo a la funcionalidad y a los aspectos de ingeniería de la instalación.

Problema:

Una residencia tiene una escalera convencional desde el primero hasta el sótano, pero no hay forma de ir del primer piso al sótano, como no sea por una escalera de mano o por la puerta principal. Se propone instalar un ascensor para una sola persona, que funcione entre el primer piso y el sótano. La figura 27-8 muestra la altura permisible del pozo y los espacios libres. Observar que en el primer piso se debe entrar al ascensor por la derecha mientras que en el sótano se entra por la izquierda.

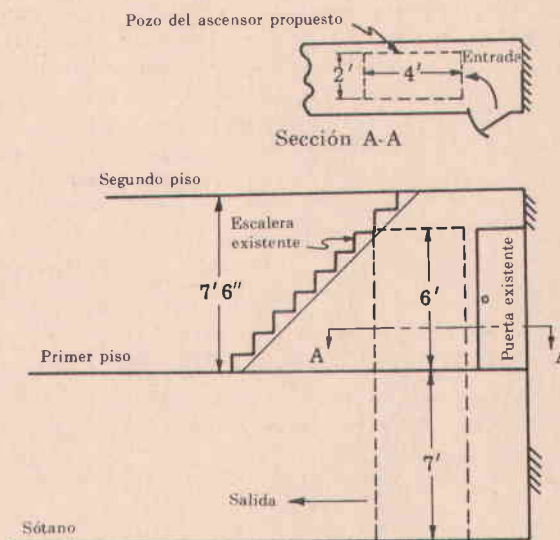


Fig. 27-8

Exigencias del diseño preliminar:

- (1) Como este es un estudio preliminar, deben estudiarse varios arreglos diferentes de la instalación propuesta.
- (2) Después de escoger un arreglo factible, preparar un dibujo preliminar, a escala, que muestre las vistas de elevación, planta y auxiliares que sean necesarias.
- (3) Hacer un cálculo preliminar del costo del equipo y la instalación.
- (4) Escribir una carta al cliente en forma de propuesta.

15. Segadora de hierba

Un fabricante ha decidido construir y vender segadoras de césped. Debido al reciente número de accidentes graves, él está interesado en llevar al mercado un producto que sea más seguro que las segadoras disponibles actualmente. En efecto, la demanda de una segadora que no ofrezca peligro es tan grande, que se puede vender un gran número de ellas. Un estudio de las segadoras actuales demuestra que sólo hay tres tipos básicos:

(1) De carrete convencional.

(2) Rotatoria.

(3) Barra de hoz (el tipo utilizado en las segadoras agrícolas y en las que se emplean en las vías públicas).

Todos estos tipos son peligrosos, aunque tienen colocadas guardas de protección.

Como ingeniero de diseño de la compañía, usted tiene la siguiente tarea: Diseñar una máquina que corte toda la hierba a un nivel adecuado y sea más segura que los tipos convencionales.

16. Elevador de tambores

Una compañía fabricante tiene el siguiente problema:

Una gran parte del negocio consiste en la fabricación de piezas pequeñas, las cuales deben ser sometidas a varias operaciones. La naturaleza de estas operaciones es tal que no resulta práctico ejecutarlas en una línea de producción. Como resultado, las piezas son enviadas de un departamento a otro en tambores de acero. Aunque normalmente los tambores no se llenan sino hasta las tres cuartas partes de su capacidad, algunos tambores pesan hasta 500 libras. Los tambores se transportan entre departamentos en carros motorizados y son colocados a 6 pies de la tolva de la máquina que debe efectuar la siguiente operación. El operario de la máquina debe vaciar el contenido del tambor en la tolva que está al lado de la máquina. El borde superior de la tolva está a 5 pies del piso.

Diseñar un dispositivo que permita al operario llenar la tolva, cuando sea necesario. Exponer claramente las suposiciones necesarias y el diseño, teniendo en cuenta lo siguiente: Seguridad, costo inicial, facilidad de operación, requerimientos de potencia y de espacio y versatilidad.

Las dimensiones de los tambores se muestran en la figura 27-9.

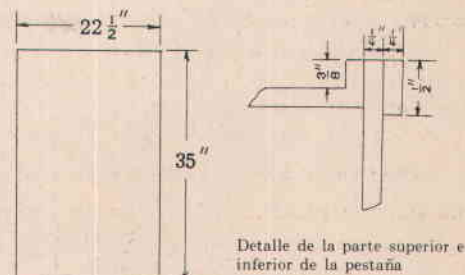


Fig. 27-9

17. Diseño de una válvula esférica

Se debe diseñar una válvula esférica para utilizarla con agua salada a 200°F. Se deben satisfacer las siguientes especificaciones:

- La válvula debe ser adecuada para funcionar a una presión de 400 psi.
- Se debe utilizar metal monel, excepto para el volante que debe ser de hierro maleable. (Se puede emplear un sustituto satisfactorio del metal monel.)
- El disco de asiento de la válvula no debe ser metálico.
- Se deben utilizar sellos adecuados para evitar los escapes.
- Deben proporcionarse áreas de flujo amplias.
- El espesor mínimo de las piezas fundidas de monel debe ser 1/8".
- Se debe utilizar un disco de asiento "no giratorio" para la válvula.
- El carácter del diseño exige que el vástago de la válvula no sea vertical.
- El vástago de la válvula debe formar un ángulo de 45° con el eje del tubo.

Se pide: (1) Un dibujo detallado del corte del montaje, junto con la lista de materiales. Las dimensiones sólo se deben indicar en el dibujo.

- Un dibujo detallado del vástago de la válvula, indicando las dimensiones necesarias y las superficies maquinadas.

18. Ajustes estadísticos

El control de calidad estadístico hace uso de las leyes naturales de la distribución estadística de las dimensiones de las piezas que se maquinan y se montan. La amplitud de dimensiones que resulta de un proceso de maquinado sigue aproximadamente la distribución patrón de frecuencias de la curva estadística normal o curva de probabilidades. La amplitud natural de un proceso de maquinado se toma, usualmente, como $\pm 3\sigma$, ya que el 99,73% del área bajo la curva normal cae dentro de estos límites. Cada máquina tiene su propia amplitud natural, que se puede determinar midiendo un gran número de piezas y preparando un histograma de frecuencias, o también, se puede calcular la desviación estándar por la fórmula

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

donde n = número total de piezas medidas

x = dimensión de una pieza individual

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

La desviación estándar, σ , determinada como se indicó antes, se multiplica por 6 para obtener la amplitud natural del proceso, con base en una amplitud de $\pm 3\sigma$.

Cuando se aplica lo anterior al ajuste de piezas que deben acoplar, tales como un eje y un cojinete, las desviaciones estándar de los dos procesos, σ_s y σ_b , se relacionan con la desviación de diferencia estándar, σ_d , por

$$\sigma_d = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_b^2}$$

donde σ_s = desviación estándar en el maquinado del eje

σ_b = desviación estándar en el proceso de rectificar el agujero del cojinete

σ_d = desviación estándar de la diferencia de dimensiones del eje y del cojinete

Si las dimensiones obtenidas en todos los procesos permanecen agrupadas alrededor de una dimensión media, podemos esperar que el 99,73% de todas las piezas de acople tengan un ajuste comprendido entre $-3\sigma_d$ y $+3\sigma_d$.

El experimento que se pide en este proyecto es intentar demostrar la aplicación del control de calidad estadístico al ajuste de piezas de acople, si suponemos que el número de puntos obtenidos en cada lanzada de los dados corresponde a la medida de una dimensión. El experimento demostrará que, estadísticamente, el límite de huelgo es considerablemente menor que el que podría predecirse suponiendo la peor combinación de ajustes posible.

Dimensionando las partes de una máquina se obtiene una ventaja sobre la distribución estadística casual que ocurre en la práctica. Considerar un eje dimensionado como $3,00105^{+0,00075}_{-0,00075}$, ó $\frac{3,0018}{3,0003}$ y un cojinete dimensionado como $3,0021^{+0,0015}_{-0,0015}$, ó $\frac{3,0036}{3,0006}$. Estas dimensiones se han seleccionado de tal manera que correspondan a los números obtenidos en el lanzamiento de los dados; tres dados para el eje y seis dados para el cojinete. La analogía puede considerarse como sigue: Si se lanzan tres dados, la máxima suma de los puntos es 18 y la mínima, 3. Entonces el límite de la suma de los puntos corresponde al límite dimensional en décimas de mil. (3 a 18 $\equiv$ 0,0003'' a 0,0018''). Si se considera de nuevo la analogía, una lanzada de los dados de 3 puntos correspondería a un tamaño de eje de 3,0003 y una lanzada de 18 puntos correspondería a un tamaño de eje de 3,0018. Ya que la medición de los ejes reales traería consigo un error o variación necesaria, podemos pensar de los números de los dados como correspondientes a las dimensiones del eje real en mediciones que podrían ser hechas en el depósito.

De una forma similar, las dimensiones del agujero corresponden a los valores que podrían hallarse del lanzamiento de 6 dados con un valor mínimo de 6 puntos (o agujero mínimo de 3,0006), y un valor máximo de 36 (o agujero máximo de 3,0036).

A. Determinar lo siguiente:

- (1) El valor medio del diámetro del eje.
- (2) El valor medio del diámetro del hueco.
- (3) El máximo huelgo posible.
- (4) La máxima interferencia posible.
- (5) Suponiendo que la amplitud natural de las operaciones de maquinado corresponde a la tolerancia, encontrar la amplitud del eje, 6σ .
- (6) Suponiendo que la amplitud natural de las operaciones de maquinado corresponde a la tolerancia, encontrar la amplitud del agujero, 6σ .
- (7) Encontrar las desviaciones de los montajes, 6σ .
- (8) Encontrar la desviación media.
- (9) Determinar el huelgo máximo y el huelgo mínimo probables del 99,73% de las piezas.

B. Utilizando 9 dados, determinar y tabular la interferencia o huelgo obtenido por el lanzamiento de 6 dados correspondiendo a las dimensiones del agujero y 3 dados correspondiendo a las dimensiones del eje. Como el proceso es demasiado largo, ejecutar la operación 100 veces. Hacer la gráfica de lo siguiente:

- (1) Una curva de distribución de frecuencia o histograma de las dimensiones del eje.
- (2) Una curva de distribución de frecuencia o histograma de las dimensiones del agujero.
- (3) Una curva de distribución de frecuencia o histograma de la diferencia entre las dimensiones del agujero y del eje.
- (4) Calcular el valor medio de los huelgos, $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$
donde x = una medida del huelgo, n = número total de mediciones.
- (5) Calcular la desviación estándar, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$.

C. Resumir los resultados.

19. Alimentador de tarjetas

Tarjetas de diferentes colores se agrupan en pilas de a 2000. Las dimensiones de las tarjetas son $5'' \times 3'' \times 0,006''$. Las tarjetas deben alimentar una máquina, la cual, por un medio fotoeléctrico, agrupará las tarjetas en pilas separadas de diferente color. La rata de alimentación no debe ser inferior a 1000 tarjetas por minuto.

Hay dos problemas:

- (1) El medio por el cual se introducen las tarjetas (una a una) en la máquina.
- (2) El medio por el cual las tarjetas, una vez identificadas por su color, se separan en diferentes pilas.

Se desean las soluciones, con sus esquemas, de uno o ambos problemas.

20. Proyecto para camiones embalados

Ocasionalmente los camiones tienen fallas de frenos en carreteras planas o pendientes. A usted, como diseñador, se le pide hacer una propuesta para llevar un camión embalado, al reposo en caso de emergencia. Se debe hacer el diseño para un camión de semirremolque, cargado a plena capacidad.

Los requerimientos de este proyecto son los siguientes:

- (1) Estudiar el medio de llevar al reposo un camión embalado y estudiar la factibilidad de la idea.
- (2) Especificar los requerimientos de un diseño satisfactorio, tales como capacidad, forma de operación, seguridad, costo y otras especificaciones convenientes.
- (3) Proponer tantos métodos como le sean posibles.
- (4) Seleccionar el método que usted crea mejor y hacer un dibujo del diseño, a escala. Hacer todas las vistas que sean necesarias (si es preciso, vistas de corte) para lograr una descripción del diseño más clara. Las dimensiones no necesitan indicarse en el dibujo. Los cálculos de las dimensiones de las partes deben acompañar al dibujo.
- (5) Calcular el costo por unidad. Si se emplea el diseño, se calcula que se harán 10.000 unidades.
- (6) Remitir un informe a la administración, con el diseño propuesto, resumiendo brevemente las ventajas y desventajas, las características sobresalientes del diseño, el costo y su recomendación sobre la conveniencia de continuar el proyecto.

21. Prensa de preformado de control automático

En las páginas 10 y 11 del *Design News*, volumen 16, No. 2, se describe el funcionamiento mecánico de una prensa de preformado automática. En resumen el funcionamiento es el siguiente:

- (1) Un bloque deslizante, con una cavidad apropiada para medir el volumen adecuado de resina de fenol, trasporta el polvo hasta la cámara de la matriz y expelle un disco preformado acabado. Un cilindro neumático hace funcionar el bloque deslizante.
- (2) La cámara de la matriz se forma al retroceder el pistón inferior. Después de caer el polvo en la cámara, el bloque deslizante se mueve hacia atrás (hasta su posición inicial) debajo de la tolva.
- (3) Entonces el pistón superior se mueve hacia abajo, comprimiendo el polvo dentro del molde, con una presión aproximada de 6000 psi. El pistón superior permanece sometido a carga por un intervalo de varios segundos, después de subir.
- (4) En seguida el pistón inferior eleva el disco preformado hasta la mesa superior y lo coloca en su puesto, hasta que el bloque deslizante se mueva hacia adelante, en el ciclo siguiente.
- (5) Cuando el bloque deslizante se mueve hacia adelante, su borde de ataque empuja el disco preformado encima de la mesa, a la banda de un transportador. Entonces el pistón inferior descende para formar la cavidad para el polvo del preformado.

La acción completa está controlada por interruptores limitadores que energizan los circuitos hidráulico y neumático por medio de válvulas de solenoide. El tiempo es graduable, con el fin de permitir al pistón superior un intervalo variable. El pistón inferior tiene carrera variable, la cual se gradúa con un tornillo de corrección.

Proporcionar todos los entrecierres y protecciones necesarias; diseñar un circuito de control para ejecutar las operaciones requeridas. El cilindro de aire utiliza la presión de aire de la planta (90 psi). Para los cilindros hidráulicos se requiere un motor eléctrico y una bomba adicionales.

Se debe proporcionar una operación manual para el caso de un atascamiento.

Se dispone de un suministro de potencia trifásico de 220 V.

22. Acelerador de automóvil de control automático

Como la construcción de supercarreteras se ha extendido y aumentará aún más en el futuro, se están haciendo viajes en automóvil cada vez más largos.

El empleo del acelerador de pie actual produce considerable fatiga a muchos conductores, durante viajes largos. Un fabricante de piezas para automóviles le ha pedido a usted (como miembro que es de su personal de diseño) que estudie la factibilidad de instalar un acelerador manual que se desacople automáticamente, para aliviar la fatiga producida por el empleo del acelerador de pie.

Remitir un informe de su estudio de factibilidad, incluyendo los siguientes párrafos:

- (1) Hacer un esquema preliminar de un diseño práctico que se pueda utilizar. En este diseño se deben incluir las características de seguridad.
- (2) Preparar un cálculo aproximado del costo de fabricación de su diseño, para producirlo a razón de 10.000 unidades por mes.
- (3) Preparar un manual de instrucciones para los compradores, que explique paso por paso el procedimiento para instalar la unidad en una marca específica de carros.

Los siguientes proyectos (23 a 36) fueron utilizados en la Universidad de Purdue, en un curso de diseño experimental, dictado por P. G. Reynolds de la E. I. duPont de Nemours and Company, Inc.

23. Sistema de inyección de un catalizador

Un proceso continuo de fabricación de un plástico requiere la inyección de un catalizador en una tubería, a una razón constante de 10 cm^3 por hora, con una presión de operación de 10.000 psi. Utilizando técnicas manuales, se debe emplear continuamente un operador para hacer el trabajo. Por esta razón, el superintendente de operación le ha pedido a usted diseñar un sistema para hacer este trabajo automáticamente. Normalmente una tanda dura por cerca de 30 días antes de tener que parar la unidad para un cambio de catalizador.

Los cambios deben estar justificados sobre una base económica. Los costos de funcionamiento son de US\$6000 por año-hombre y el funcionamiento continuo exige cuatro hombres por cada semana de 40 horas. Con la inversión se espera ganar un 20%, debido al riesgo de que caiga en desuso rápidamente. Esta ganancia, basada en la inversión, deberá fundamentarse en una depreciación de 6% y una rata de impuestos de 52% de las utilidades.

Nota: La información del párrafo anterior puede emplearse para los problemas 23 a 36 en donde su aplicación ahorre trabajo.

24. Dispositivo de seguridad en un transportador de pólvora

Una correa de 6" de ancho está transportando pólvora negra entre dos edificios separados 25 pies. El segundo edificio es una unidad de almacenamiento con capacidad para 4000 lb de pólvora, la cual puede explotar si se produce una chispa. Se necesita diseñar un mecanismo que desmonte la correa, rocíe el área con agua y selle la entrada, si el fuego llega a ser visible en la correa.

El personal de operación señala que en este tipo de instalación no se pueden gastar más de US\$25.000. Por otra parte, se puede justificar un sistema de transporte intermitente.

25. Máquinas para fabricar placas para rayos X

Desarrollar el diseño de una máquina para fabricar placas dentales para rayos X, a razón de 30 por minuto. La máquina debe cortar la película de un rollo, cubrirla con los materiales apropiados, inspeccionarla y recoger los productos acabados en cajas de a 100.

La máquina debe hacer el trabajo de 10 hombres que empleen métodos manuales y debe justificarse sobre esta base. Determinar la ganancia en la inversión de la máquina.

(El estudiante debe obtener muestras de placas para rayos X, para ver lo que implica la operación.)

26. Máquina empacadora de bolsas

La dinamita, que tiene las características generales de la panela, se empaqueta manualmente en bolsas de 12 lb. Para manipular 40.000 lb del material por turno, se necesita un grupo de operación de 5 hombres, además de un camionero para traer el material y llevárselo ya empacado. Dos operarios raspan el material, lo colocan dentro de una bolsa y lo pesan a razón de 5 bolsas por minuto, por cada operario. Luego, dos hombres adicionales doblan las bolsas, las cierran y sellan el extremo cerrado. Finalmente un hombre toma las bolsas, las coloca dentro de una caja y cierra ésta.

Nos han pedido diseñar una máquina para hacer este trabajo con un solo operario, fuera del camionero. Proporcionar la unidad para hacer este trabajo, en función de la confiabilidad y del costo.

Estudiar además cuál es la solución más económica al problema: Mecanización completa o una combinación de mecanización y trabajo manual.

27. Máquina de armar cartuchos de calibre 22

Un fabricante de municiones decide que deberá modernizar su sistema de producción, para producir cartuchos de calibre 22. Se fabrican alrededor de 20.000.000 de cartuchos por año, de los cuales aproximadamente el 50% son para rifles largos, el 25% cortos y el 25% largos.

A usted, como ingeniero, se le ha solicitado desarrollar un diseño preliminar de una máquina para armar los cartuchos y reunirlos en grupos de 50, para empacado. La máquina deberá tener una capacidad 50% mayor que la demanda anual, para cubrir las variaciones de mercado por estaciones. Se ha calculado que se pueden invertir US\$350.000 en la máquina, siempre que no se necesiten más de 3 operarios por turno. A la máquina se le suministrarán las cápsulas, los proyectiles, la pólvora y los fulminantes.

28. Máquina para montaje automático de llantas

En una línea de montaje se están ensamblando automóviles a razón de 40 por hora. Utilizando técnicas manuales se necesita una cuadrilla de 12 hombres para la instalación de las llantas en los rines. Diseñar una máquina que monte las llantas sobre los rines, semiautomáticamente, con no más de 2 operarios. ¿Económicamente se puede justificar el costo de la máquina?

29. Probador de aditamentos para tuberías

El funcionamiento hidráulico de los equipos y de los servocontroles exige el uso de un gran número de aditamentos hidráulicos. A menudo estos aditamentos sufren escapes y causan dificultades, aun cuando estén herméticos. Se nos ha solicitado un tipo cualquiera de máquina probadora que pueda tomar toda clase de aditamentos hidráulicos y probarlos para determinar cuál es el más adecuado para una instalación.

Se ha decidido que se puede gastar un máximo de US\$25.000 para la construcción de dicha unidad.

30. Unidad de refrigeración

Durante el verano una planta de refrigeración tiene una carga de 750 toneladas/día, satisfecha por la evaporación de amoníaco a una presión de 25 psig. Comúnmente se utiliza este vapor en un proceso, pero se desea cambiar la operación, ya que ésta no se puede efectuar por largo tiempo. Debido a la disminución de carga de calor durante el verano hay un excedente de 15 psig de vapor aprovechable en el proceso. Determinar el sistema más conveniente de manejar la carga de refrigeración, en función de la economía de la operación, y desarrollar el diseño y el sistema de control. Determinar el costo.

31. Bomba circulante

Una unidad de síntesis de amoníaco se diseña para producir amoníaco a una presión de 6000 psi. Esto requiere una unidad circulante para procesar aproximadamente $200 \text{ p}^3/\text{min}$ de gas aproximadamente de 75% de N_2 y 25% de H_2 a las condiciones de operación. La caída de presión a través de la unidad de bombeo es 450 psi. A usted se le ha solicitado evaluar las posibilidades y proponer un diseño que cueste menos de US\$75.000 y tenga un costo mínimo de operación y mantenimiento.

32. Máquina para devanar alambre

En la actualidad una planta tiene un equipo de devanar alambre sobre carretes con tres operadores por turno. El alambre es doble, de cobre, calibre 22 y tiene un revestimiento plástico de 0,020 pul. Las longitudes devanadas en los carretes varían desde 50 pies hasta 350 pies, en intervalos de 50 pies. El 40% del alambre tiene 100 pies de longitud; el 30%, 150 pies de longitud; el 10%, 50 pies y del 20% sobrante, 5% para cada una de las longitudes restantes. Nos han pedido diseñar una máquina que produzca 22 carretes por minuto y los transporte a otra máquina de producción, empleando un solo hombre. Esta máquina normalmente necesitaría operar únicamente durante un turno. Debemos desarrollar el diseño de la máquina que haga el trabajo y se pueda justificar sobre bases monetarias.

33. Protección del operador

Un hombre está operando una prensa que produce 20 a 25 piezas por minuto. El operador tiene que colocar la pieza nueva y retirar la pieza acabada. Los controles de ejecución y sistemas de protección deben eliminar cualquier riesgo de que el operador o su asistente sufran lesiones. Los controles inadecuados de seguridad obstaculizan la máquina hasta un punto tal que sólo se puede obtener el 75% de su capacidad. ¿Podemos justificar la instalación del equipo de seguridad?

34. Removedor de pinturas

Un nuevo producto en pinturas, que será lanzado al mercado, tiene una gran duración cuando se aplica sobre madera desnuda. Para vender el producto se necesita un dispositivo o técnica que quite rápidamente la pintura vieja. Este dispositivo debe funcionar por lo menos 10 veces más rápido que cualquiera de los dispositivos disponibles actualmente y se debe poder vender a no más de US\$50. Proporcionar una solución para esta necesidad.

35. Máquina para forrar cajas

Nos enfrentamos con el problema de forrar cajas con papel encerado, a razón de 6 por minuto. Las cajas se presentan en anchos de 12" a 18", de 1" en 1" y longitudes de 16" a 24", de 1" en 1". Utilizando técnicas manuales se requieren tres operadores por turno para forrar las cajas a la razón indicada. Los forros interiores de la caja deben proporcionar un recinto impermeable y sus bordes deben extenderse 3" más allá del borde de la caja. Desarrollar una máquina que ejecute esta operación eficientemente y determinar si se justifica.

36. Motor de 100.000 rpm

A una fuente natural de energía debemos proporcionar una potencia mínima de salida de $\frac{1}{2}$ HP a 100.000 rpm. Es posible gastar US\$10.000 en la fabricación de una unidad que satisfaga esta necesidad. Un motor de $1\frac{1}{2}$ HP sería conveniente para uso general y sería bastante utilizado si se pudiera construir a un precio de US\$1000. ¿Qué se podría proporcionar?

INDICE

A

Acción de columna,
 en ejes, 114
 en resortes helicoidales, 194
 Aceites,
 gráfica de la densidad contra la temperatura,
 277
 número de viscosidad Saybolt, 277
 Acoplamientos,
 de ejes colineales, 131
 de ejes paralelos, 131
 de ejes que se intersectan, 131
 diseño basado en el número de pernos, 132
 diseño basado en el rozamiento, 132
 flexibles, 131
 problemas propuestos, 137
 problemas resueltos, 132-136
 rígidos, 131-134
 tipo Falk, 134
 unión universal, 131, 135-136
 AFBMA (Anti-Friction Bearing Manufacturer's
 Association), 256
 AGMA,
 capacidad de carga máxima de engranajes
 cónicos, 243, 247
 capacidad de potencia de engranajes de
 tornillo sin fin, 251, 252
 desgaste, 250
 Ajuste,
 estrecho, 18
 holgado, 18
 Ajustes, 18-20
 Ajustes de interferencia,
 ecuación de Birnie, 21
 ecuación de Lamé, 20
 esfuerzos debidos a los, 20
 esfuerzo tangencial, 20-21, 23
 fuerzas y momentos, 21
 presión, 20, 23
 American Standards Association, 18
 Amortiguamiento,
 crítico, 90
 equivalente, 89
 relación de frecuencias, 90
 Amplitud de una vibración, 90
 Análisis de fuerzas para engranajes helicoidales,
 234
 Angulo,
 de avance de los engranajes de tornillo sin
 fin, 249
 de fase, 91
 de paso en engranajes cónicos, 241
 Angulo de hélice,
 de las roscas, 145-146
 de los engranajes helicoidales, 234

Angulo de presión,
 en engranajes helicoidales, 234
 en engranajes rectos, 222
 Avance de los engranajes de tornillo sin fin,
 249

B

Barra curva, energía de deformación,
 desarrollo de la ecuación, 48
 Buckingham,
 cargas dinámicas en el diente, 225, 236
 ecuación para engranajes helicoidales, 236
 ecuación para engranajes rectos, 225

C

Calor disipado,
 en cojinetes, 284
 en frenos, 182
 Calor generado,
 en cojinetes, 278
 en frenos, 182
 Capacidad dinámica de cojinetes de
 rodamientos, 258
 Carga,
 axial, 8
 biaxial, 10
 cortante trasversal máxima, 8
 crítica en columnas, 46
 Carga de desgaste,
 para engranajes cónicos, 243, 244, 245, 246
 para engranajes de tornillo sin fin, fórmula
 de la, 250
 para engranajes helicoidales, 236
 para engranajes helicoidales, problemas
 resueltos, 238
 para engranajes rectos, 227
 Carga de desgaste permisible,
 para engranajes cónicos, 243
 para engranajes de tornillo sin fin, 250
 para engranajes helicoidales, 236
 para engranajes rectos, 227
 Carga de fatiga,
 para engranajes cónicos, 243, 244
 para engranajes de tornillo sin fin, fórmula
 de la, 250
 para engranajes helicoidales, 236
 para engranajes rectos, 226
 Carga dinámica,
 para engranajes cónicos, 243, 245-246
 para engranajes de tornillo sin fin, fórmula,
 249
 para engranajes helicoidales, 236, 238
 para engranajes rectos, 225

- Carga estática equivalente de los cojinetes de rodamientos, 257
- Cargas variables, 72
- problemas propuestos, 86-88
- problemas resueltos, 76-86
- Ciencias que sirven de fundamento al diseño de máquinas, 2
- Clasificación de los engranajes cónicos, 241
- Código ASME para ejes, 113-120
- Coefficiente,
- de influencia, 103
- de fluctuación de velocidades en volantes, 313
- Coefficiente de rozamiento,
- en cojinetes, 281, 284, 285, 288
- en cojinetes de rodamientos, 255
- en collares, 146
- en embragues de discos, 165
- en frenos, 102
- en las ecuaciones de transmisión por correas, 290, 291, 292
- en roscas, 146
- Cojinetes,
- aplicaciones prácticas, 279
- aumento de temperatura del lubricante, 283
- calor disipado, 284
- calor generado, 278, 286, 288
- carga permisible, problemas resueltos, 287
- coeficiente de rozamiento, 281, 285, 288
- curvas de diseño de Raimondi y Boyd, 280
- ecuación de Petroff, 280
- espesor de película mínimo, 280, 281, 282
- excentricidad, 280
- flujo de aceite, 282, 288
- lubricación imperfecta, 278
- lubricación perfecta, 278
- número de Sommerfeld, 280
- parámetro adimensional, 278, 279, 280
- película delgada de lubricación, 278
- película gruesa de lubricación, 278
- pérdida de potencia, problema resuelto, 287
- pérdidas laterales, 282, 288
- presión de película, 278
- presión sobre el cojinete, 278
- razón de excentricidad, 280
- selección del aceite, problemas resueltos, 286, 288
- temperatura de la superficie, problema resuelto, 286
- Cojinetes antifricción (véase Cojinetes de rodamientos)
- Cojinetes de bolas (véase Cojinetes de rodamientos)
- Cojinetes de rodamientos,
- cálculo de la duración, problema resuelto, 269
- capacidad básica de carga, 259, 260
- capacidad de base estática, 257
- capacidad dinámica, 258
- capacidad dinámica específica, 258, 269
- capacidad estática, 256, 268
- capacidad estática AFBMA, problema resuelto, 268
- carga equivalente, 259, 260, 264
- carga estática, 257
- carga estática equivalente, 257
- carga estática radial equivalente, problema resuelto, 268
- cierres, 266
- coeficiente de rozamiento, 255, 256
- consideraciones sobre su aplicación, 255
- conversión de la duración, 264
- deformación permanente, 257
- duración, 258, 259
- duración nominal, 259, 260
- ecuación de Stribeck, 256, 267
- factor axial, 257, 258
- factor radial, 257, 258
- instalación, 265
- momento de rozamiento, 256
- montaje del eje, 265
- montajes en los alojamientos, 266
- normas de la AFBMA, 256
- pantallas, 266
- pérdida de potencia por rozamiento, problema propuesto, 267
- problemas propuestos, 275
- problemas resueltos, 267-274
- recomendaciones de la AFBMA, 259
- rozamiento, 255, 256
- selección, 255
- temperatura, 266
- ventajas y desventajas, 255
- Columnas,
- carga segura, 47
- cargas críticas, 46
- condiciones de los extremos, 46
- ecuación de Euler, 46
- esfuerzo equivalente, 47
- factor de seguridad, 47
- fórmulas de J. B. Johnson, 46
- problemas propuestos, 71
- problemas resueltos, 66, 68
- razón de esbeltez, 47
- Conexiones con estrías, 140, 142
- problemas resueltos, 142
- Constante,
- de amortiguamiento equivalente, 89
- elástica equivalente, 89
- Coronas dentadas, definición de, 241
- Correas en V (véase transmisión por correas)
- Cuñas,
- capacidad de momento en compresión, 139
- capacidad de momento en corte, 139
- cuña con cabeza, 138
- cuña de Kennedy, 138
- cuñas cuadradas, 138, 141
- cuña tipo Woodruff, 138, 142, 144
- diseño de cuñas cuadradas y planas, 138-139, 141
- problemas propuestos, 143-144
- problemas resueltos, 141-142
- Curvas de diseño de cojinetes de Raimondi y Boyd, 280

D

- Deformación,
 - angular de ejes, 116, 119
 - axial, 37
 - debida al corte, 41-42
 - de resortes Belleville, 197
 - de resortes de múltiples hojas, 191
 - de resortes helicoidales, 192
 - desarrollo de la ecuación para cargas cortantes, 56-57
 - de una viga conjugada, 39
 - de un eje ahusado, 65
 - diseño de un eje, 121
 - efecto de los ensanchamientos y ranuras, 65
 - funciones escalón, 90
 - integración gráfica, 43-45
 - lateral, 38
 - método del momento de las áreas, 38
 - problemas propuestos, 69-71
 - problemas resueltos, 48-65
 - teorema de Castigliano, 42
 - torsional, 37
 - axial, 37
 - de cojinetes de rodamientos, 257
- Deformación y pandeo de elementos de máquinas, 37
- Desgaste uniforme en embragues de discos, 165, 169
- Diagrama de Goodman, 74
- Diagramas de momentos de flexión, 11
- Diámetro primitivo de los engranajes cónicos, 241
- Dientes de engranajes, número formativo, 235
- Dimensiones,
 - básicas, 18
 - normales de los ejes, 115
- Discrepancias y tolerancias, 18, 19
- Diseño,
 - de ingeniería, 1, 2
 - de máquinas, definición, 6
 - por máximo esfuerzo, 6
- Diseño por resistencia,
 - para engranajes cónicos, fórmula, 242, 245, 246
 - para engranajes de tornillo sin fin, fórmula de Lewis, 249
 - para engranajes helicoidales, problema resuelto, 237
 - para engranajes rectos, 224
- Durabilidad, normas AGMA para engranajes cónicos, 243, 247

E

- Ecuación,
 - de Birnie, 21
 - de Dunkerley, 102, 109
 - de Euler, 46, 47
 - de frecuencia, 103, 108
 - de Petroff para cojinetes, 280
 - de Rayleigh-Ritz, 102, 104

- Ecuación de J. B. Johnson, 46
 - carga segura, 47
- Ecuación de Lamé, 20
- Ecuación de Lewis,
 - engranajes cónicos, 242
 - engranajes de tornillo sin fin, 249, 250
 - engranajes helicoidales, 235, 236
 - engranajes rectos, 224
- Ecuación de Stribeck, deducción, 267
 - ecuaciones para cojinetes de rodamientos, 256
- Eficiencia,
 - de un engranaje con tornillo sin fin, fórmula, 251
 - de un mecanismo de tornillo, 146
- Eje,
 - ahusado, deformación en un, 65
 - centroidal, 26-28
 - neutro, en vigas curvas, 26-28
- Ejes,
 - código ASME, 113-120
 - deformación angular, 116, 119
 - de transmisión, 115
 - dimensiones normales, 115
 - diseño basado en la deformación lateral, 121
 - diseño basado en la velocidad crítica, 121
 - ecuaciones de diseño, 113
 - esfuerzos permisibles, 114
 - factor de acción de columna, 114
 - factores de choque y fatiga, 113-114
 - momentos de flexión, 115
 - momentos torsionales, 115
 - para maquinaria, 115
 - problemas propuestos, 128-130
 - problemas resueltos, 116-127
 - rigidez lateral, 115
 - rigidez torsional, 115
 - sólidos y huecos, 113, 120-121
 - teoría del esfuerzo cortante máximo, 113
 - velocidades críticas, 101
- Embrague cónico,
 - capacidad de momento, 166, 173-174
 - capacidad de potencia, 107, 175
 - fuerzas axiales, 167
 - radios de rozamiento, 166, 169
- Embrague de discos,
 - capacidad de momento, 165
 - desgaste uniforme, 165, 169
 - fuerza axial, 165-166
 - número de superficies de contacto, 165
 - presión uniforme, 165, 169
 - radios de rozamiento, 165, 169
- Embragues,
 - capacidad de momento, 165-166
 - coeficiente de rozamiento, 165
 - cónicos, 166
 - definición, 165
 - de múltiples discos, 165
 - problemas propuestos, 176-177
 - problemas resueltos, 168-176
- Energía,
 - en resortes, 92
 - en volantes, 313, 314

- Energía de deformación,
 - barra curva, 48
 - carga axial, 42
 - corte, 42
 - desarrollo de la ecuación de flexión, 48
 - flexión, 42
 - fuerza transversal en vigas curvas, 42
 - torsión, 42
 - viga curva, 42
- Energía cinética,
 - en vibraciones, 92
 - en volantes, 313, 314
- Energía potencial en una vibración, 92
- Engranajes cónicos,
 - ángulo primitivo, 241
 - carga de desgaste, 243-246
 - carga de fatiga, 243, 244
 - carga dinámica, 243
 - problemas resueltos, 245, 246
 - clasificación, 241
 - cono complementario, 241, 242
 - coronas dentadas, 241
 - diámetro primitivo, 241
 - diente espiral, 208
 - diente recto, 207
 - diseño por resistencia, fórmulas, 242
 - ecuación de Lewis, 242
 - esfuerzos permisibles, 242
 - externos, 241
 - factor de velocidad, 242
 - factores del material, 244, 247
 - fuerza transmitida, 242
 - fuerzas componentes, 207-208
 - internos, 241
 - longitud de los dientes, 242
 - normas de la AGMA para carga máxima, 243, 247
 - normas de la AGMA para desgaste, 243, 247
 - normas de la AGMA para durabilidad, problemas resueltos, 247
 - número formativo o virtual de dientes, 243
 - problemas propuestos, 248
 - problemas resueltos, 244-247
 - resistencia con base en las normas de la AGMA, problemas resueltos, 247
- Engranajes de tornillo sin fin,
 - ángulo de avance, 249, 252
 - avance, 249
 - capacidad de potencia y calor de disipación AGMA, 250-252
 - carga de desgaste, fórmula, 250
 - descripción, 249
 - diseño basado en la resistencia, fórmula de Lewis, 249
 - diseño de, problema resuelto, 252, 253
 - disipación de calor, problema resuelto, 252
 - ecuación de Lewis, 249, 250
 - esfuerzo permisible, 249
 - factor de material, 250
 - factor de velocidad, 249
 - fórmula de la carga de fatiga, 250
 - fórmula de la carga dinámica, 249
 - fórmula de la eficiencia, 251
 - fuerzas componentes, 210
 - paso axial, 249
 - paso circular, 249
 - presión constante, 250
 - problemas propuestos, 254
 - problemas resueltos, 252-254
 - proporciones aproximadas dadas por la AGMA, problema resuelto, 252
 - proporciones recomendadas por la AGMA, 251
- Engranajes helicoidales,
 - ángulo de la hélice, 234
 - ángulo de presión, 234
 - carga de desgaste, 236, 238
 - carga de fatiga límite, 236
 - carga dinámica, 236, 238
 - diseño por resistencia, problema resuelto, 237
 - ecuación de Buckingham, 236
 - ecuación de resistencia, 235
 - ecuación de Lewis, 235, 236
 - esfuerzo permisible, 235
 - factor de forma, 235
 - factor de velocidad, 235
 - fuerzas componentes, 205-206, 234
 - longitud del diente, 234
 - número virtual o formativo de dientes, 235, 237
 - paso circular, 234
 - paso circular circunferencial, 234
 - paso circular normal, 234
 - paso diametral, 234
 - potencia máxima, problemas resueltos, 239
 - problemas propuestos, 240
 - problemas resueltos, 237-239
- Engranajes rectos,
 - BHN, 227-228
 - carga de desgaste, 227
 - carga dinámica, 225
 - definiciones, 223
 - ecuación de Buckingham, 225
 - ecuación de Lewis, 224
 - error permisible en el diente, 226
 - esfuerzo producido en el diente, 224
 - esfuerzos permisibles, 225
 - factor de forma, 227
 - factores de deformación, 228
 - fuerzas componentes, 205
 - gráfica del paso contra el error en el diente, 226
 - interferencia, 223
 - ley fundamental del engranaje, 223
 - límite de fatiga superficial, 227-228
 - pasos normalizados, 224
 - problemas propuestos, 233
 - problemas resueltos, 229-232
 - proporciones de los dientes, 223
 - resistencia a la fatiga en el diente, 225
 - resistencia del diente, 224
 - terminología, 222
- Esfuerzo,
 - cortante, 6
 - cortante máximo, 6
 - de flexión, 7

ecuación de Lanza para volantes, 319
 en volantes de disco, 320, 321
 en volantes de llanta, aproximadamente, 319
 en volantes de llanta delgada, 316
 en volantes de llanta gruesa, 317
 normal máximo, 6
 normal mínimo, 6
 principal, 6
 torsional, 6

Esfuerzo cortante,
 en cuñas, 139
 equivalente, 75, 76
 general, 7

Esfuerzo,
 cortante máximo equivalente, 75, 76
 cortante trasversal, 7
 cortante trasversal máximo, 8

Esfuerzo de flexión, 7, 8
 en vigas curvas, 26

Esfuerzo,
 equivalente de columna, 47
 normal equivalente, 75, 76

Esfuerzo tangencial en ajustes de interferencia,
 20-21, 23

Esfuerzos,
 alternados, 73
 debidos a los ajustes de interferencia, 20
 combinados, problemas resueltos, 8, 15
 concentración de, 72
 de flexión, 8
 de flexión, carga axial y torsión, 10
 de flexión y carga axial, 9
 de flexión y torsión, 9
 de torsión y carga axial, 9
 en elementos de máquinas sencillos,
 problemas resueltos, 8-15
 en los dientes de engranajes rectos, 224
 en pernos, 157
 en pernos sometidos a tracción, 157
 en resortes Belleville, 197
 en resortes de múltiples hojas, 191-192
 en resortes helicoidales, 192
 en roscas, 146
 en vigas curvas, 26
 factor de concentración de, 72, 74, 158
 permisibles en ejes, 114
 fluctuantes, 73
 invertidos, 73

Esfuerzos permisibles,
 en ejes, 114
 en engranajes cónicos, 242
 en engranajes de tornillo sin fin, 249
 en engranajes helicoidales, 235
 en los dientes de engranajes rectos, 225
 en materiales para correas, 291
 en resortes helicoidales, 195, 196

Esfuerzos principales, 6

Esfuerzos repetidos, 73

Esfuerzos variables, 73
 esfuerzo cortante equivalente, 75-76
 esfuerzo normal equivalente, 75-76
 factor de corrección por superficie, 75
 factor de seguridad, 74, 75

fluctuantes, 73
 invertidos, 73
 repetidos, 73
 vida finita, 86
 Examen de repaso de mecánica, 2-5

F

Factor,
 de amplificación, 91
 de concentración de esfuerzos, 72
 de empuje en cojinetes de rodamientos, 257,
 258, 260, 261

Factor de forma,
 en engranajes helicoidales, 235
 en engranajes rectos, 227

Factor de seguridad,
 en columnas, 47
 para esfuerzos variables, 74, 75

Factor de velocidad,
 para engranajes cónicos, 242
 para engranajes de tornillo sin fin, 249
 para engranajes helicoidales, 235

Factor geométrico, 72

Factor radial de los cojinetes de rodamientos,
 257, 258, 260, 261

Factores de material,
 para engranajes cónicos, 244, 247
 para engranajes de tornillo sin fin, 250

Fatiga,
 en juntas soldadas, 306
 en elementos de máquinas, 73, 74
 en engranajes rectos, 228
 en los dientes de engranajes rectos, 225
 en resortes helicoidales, 195-196
 en un perno cargado, 158

Flexión, carga axial y torsión, 9, 10

Frecuencia,
 fundamental de vibración, 92
 natural, 101

Freno de banda diferencial, 181
 autocerrante, 181
 simple, 180-181
 simple de doble acción, 181

Frenos,
 autoactuantes, 178
 autocerrantes, 178
 calor disipado, 182
 calor generado, 182
 coeficiente de rozamiento, 182
 de banda, 180-182
 de bloque sencillo, 178
 de doble zapata, 179
 definición, 178
 desgaste uniforme, 179
 de zapata externa o de bloque, 178
 de zapata interna, 180
 de zapata pivoteada larga, 179
 de zapata rígida, 178
 problemas propuestos, 188-189
 problemas resueltos, 183-187
 Fuerza transmitida, vibraciones, 91

Fuerzas en engranajes,
 componentes, 205
 engranajes cónicos, fuerzas componentes,
 207-208
 engranajes de tornillo sin fin, fuerzas
 componentes, 210
 engranajes helicoidales, fuerzas componentes,
 205, 206
 engranajes rectos, fuerzas componentes, 205
 pérdidas por rozamiento, 205
 problemas propuestos, 217-221
 problemas resueltos, 212-216
 trenes de engranajes planetarios, 211
 Funciones escalón,
 deformación, 40
 integración, 41
 Función excitadora, 90, 91

G

Gráfica de la viscosidad universal Saybolt
 contra la viscosidad cinemática, 277

H

Holgura, 18

I

Integración gráfica, deformación por flexión,
 43-45
 Instalación de cojinetes de rodamientos, 265
 Interferencia, 18, 19

J

Juntas soldadas,
 diseño basado en la fatiga, problema, 311
 distribución de carga, 308
 esfuerzo cortante máximo, 307, 308
 fórmulas de diseño, 305
 módulo de sección, 303, 304
 momentos de inercia, 308, 309
 momentos polares de inercia, 303, 304
 problema del diseño de una ménsula, 309,
 310
 problema del diseño de una viga de alma
 llena, 311
 problemas propuestos, 312
 problemas resueltos, 307-312
 resistencia a la fatiga,
 soldadura a intervalos, 305, 306
 soldaduras a tope, ecuación de la fuerza
 permisible, 301
 soldaduras de filete, ecuaciones de la carga
 permisible, 301, 302, 303
 Juicio en el diseño, 1

L

Límite de fatiga, 73
 Longitud del diente,
 en engranajes cónicos, 242
 en engranajes helicoidales, 234
 en engranajes rectos, 222

Lubricación,
 distribución de la presión en la película,
 277, 278 (véase también Cojinetes)
 gráfica de la viscosidad contra la
 temperatura para aceites, 285
 imperfecta, 278
 lubricantes, 276
 película delgada, 278
 película gruesa, 278
 perfecta, 278
 problemas resueltos, 285-288
 viscosidad, 276, 277
 viscosidad cinemática, 277
 viscosidad universal Saybolt, 277

M

Masa equivalente, 89
 Método,
 de la energía, vibración, 92
 del momento de las áreas, deformaciones,
 38, 39
 Modos de vibración, 92
 Momento,
 en conexiones con estrías, 140
 en cuñas, 139
 en embragues de discos, 165
 Momentos,
 flexión de ejes, 115
 torsión de ejes, 115
 Montaje de ajustes a presión, 21
 Montaje de cojinetes de rodamientos,
 alojamiento, 266
 eje, 265
 Montaje selectivo, 19-20

N

Normas de la AGMA para engranajes cónicos,
 243
 Número formativo de dientes,
 engranajes cónicos, 243
 engranajes helicoidales, deducción, 237
 Número de Sommerfeld, 280

O

Orificio normal básico, 18

P

Pasadores,
 cónicos, 140
 diseño de uniones articuladas, 139, 141
 Paso,
 circular circunferencial, 234
 circular normal, 234
 diametral, 234
 diametral normal, 234
 en engranajes de tornillo sin fin, 249
 Paso axial de tornillos sin fin, 249
 Paso circular,
 engranajes de tornillo sin fin, 249
 engranajes helicoidales, 234

engranajes rectos, 222
 Paso diametral de engranajes helicoidales, 234
 Pernos, cargas en,
 altura de la tuerca, 158
 carga externa, 156, 159
 carga inicial, 156-157, 159
 carga resultante, 156-157, 159
 concentración de esfuerzos, 158
 diagrama de Soderberg, 162-164
 esfuerzos, 161-162
 esfuerzos en tracción, 157
 expansión térmica, 160
 impacto, 157, 162
 momento, 157
 problemas propuestos, 163-164
 problemas resueltos, 159-163
 resistencia a la fatiga, 158
 separación de la unión, 156, 159
 uniones con pernos sometidas a tracción,
 156
 Plan de estudio, 5
 Plano,
 de esfuerzo cortante máximo, 7
 de esfuerzo cortante cero, 6
 Planos de esfuerzo cortante máximo, 7
 Potencia,
 que circula en los trenes de engranajes
 planetarios, 211
 transmitida, ecuación para transmisiones por
 correas, 290
 Prensa punzonadora, diseño del volante, 315
 Presión,
 en los ajustes de interferencia, 20, 23
 uniforme en el embrague de discos, 165, 169
 Proporción de las partes, 72
 Proceso de diseño, 1, 2
 Proyectos, 322-336

R

Razón de excentricidad (lubricación), 280
 Reductores de velocidad de tornillo sin fin,
 problemas resueltos, 252
 Relación de frecuencias, 90
 Resistencia, factores que influyen, 72
 Resistencia a la fatiga, 73
 diagrama de Goodman, 74
 línea de Soderberg, 74
 vida finita, 86
 Resonancia, 92-93
 Resortes,
 Belleville, 192, 197
 de múltiples hojas, 190
 diseño, 190
 energía almacenada, 193
 helicoidales, 192
 problemas propuestos, 202-204
 problemas resueltos, 198-202
 razón elástica, 192-193
 Resortes de múltiples hojas,
 deformación, 191
 en voladizo, 190
 esfuerzo de flexión, 191-192

hojas adicionales de longitud completa,
 190-192
 semielípticos, 190
 Resortes helicoidales,
 deformación, 192
 en paralelo, 193
 en serie, 193
 esfuerzo cortante, 192
 esfuerzos permisibles, 195-196
 extremos en los resortes, 194
 factor Wahl, 192
 fatiga, 195-196
 índice del resorte, 192
 pandeo, 193
 pulsaciones, 195
 Rigidez,
 de ejes, 115
 general, 37
 Rosca,
 Acme, 145, 148
 ángulo de la hélice, 146
 ángulo normal al perfil, 145-146
 área de esfuerzo, 147
 avance, 146
 cuadrada, 145
 engranaje de tornillo sin fin, 249
 esfuerzos, 146-147
 paso, 146
 presión de contacto, 147
 terminología, 145
 Rozamiento,
 eficiencia del engranaje con tornillo sin fin,
 251
 en cojinetes de rodamientos, 255, 256
 en engranajes, 205
 en embragues, 165
 en frenos, 182
 en roscas, 146

S

Segunda velocidad crítica, 101
 Selección de la interferencia media, 19
 Sensibilidad a la entalla, 73
 Sobrecarga en las roscas, 146, 148, 151-152
 Soderberg, línea de, 74
 diagrama para cargas en pernos, 162-164
 diagrama para resortes helicoidales, 185
 Soportes flexibles, velocidades críticas en, 108

T

Tamaño nominal, 18
 Temperatura,
 en ajustes, 24
 en cojinetes, 283, 286
 Teorema de Castigliano, 42-43
 Teoría del esfuerzo cortante, 6
 Teoría del esfuerzo cortante máximo,
 general, 6
 para ejes, 113
 Tolerancia, 18, 19
 bilateral, 18
 unilateral, 18

Tornillos de potencia,
 carga axial, 146
 coeficiente de rozamiento, 146, 148-153
 eficiencia, 146
 problemas propuestos, 154-155
 problemas resueltos, 148-153
 sobrecarga, 146, 148
 Torsión, 9
 Transmisibilidad, 91
 Transmisión por correas,
 ángulo de abrazamiento, 290, 291
 capacidad de potencia, problemas resueltos,
 294
 cargas en el eje, problemas resueltos, 293
 correas en V, problemas, 295
 diámetro mínimo de las poleas, 291
 ecuación de esfuerzo para correas planas, 290
 ecuación de la potencia transmitida, 290
 ecuación de tensión, deducción, 292, 293
 esfuerzos permisibles, 291
 motor pivotado, 297
 problemas propuestos, 298-299
 problemas resueltos, 292-298
 Trenes de engranajes planetarios,
 fuerzas, 211
 potencia que circula, 211

U

Un solo grado de libertad, 89

V

Velocidades críticas, 101
 coeficientes de influencia, 103
 de múltiples masas, 102
 de una sola masa, 101
 diseño de un eje, 121
 ecuación de Dunkerley, 102, 109
 ecuación de frecuencia, 103, 108
 ecuación de Rayleigh-Ritz, 102, 104
 eje de sección transversal constante, 102
 primera velocidad crítica, 101
 problemas propuestos, 110, 112
 problemas resueltos, 103-109
 segunda velocidad crítica, 101
 soportes flexibles, 108
 velocidad crítica más alta, 103
 Vibración,
 amortiguamiento crítico, 90
 amortiguamiento equivalente, 89
 amplitud en estado estacionario, 90
 ángulo de fase, 91
 constante elástica equivalente, 89
 energía cinética, 92
 energía del resorte, 92
 energía potencial, 92
 estado estacionario, 90
 factor de amplificación, 91
 frecuencia fundamental, 92
 fuerza transmitida, 91
 función excitadora, 90, 91
 libre, 90
 masa equivalente, 89
 método de la energía, 92
 modelos, 92
 problemas propuestos, 99-100
 problemas resueltos, 93-98
 procedimiento general de análisis, 89
 relación de amortiguamiento, 90
 relación de frecuencias, 90
 resonancia, 92-93
 transitoria, 90
 transmisibilidad, 91, 92
 un solo grado de libertad, 89
 varios grados de libertad, 92
 Vibración en estado estacionario, 90
 Vibraciones en máquinas, 89
 Viga conjugada, deformaciones, 39
 Vigas,
 curvas, 26
 curvas, problemas resueltos, 29-34
 deformación de, método de la viga
 conjugada, 39
 método del momento de las áreas, 38-39
 Vigas curvas, 26
 desarrollo de la fórmula, 31-32
 eje neutro, 26
 energía de deformación diferencial, 43
 energía de deformación por carga transversal,
 42
 esfuerzo máximo, 27
 problemas propuestos, 34-36
 problemas resueltos, 29-34
 secciones, 27-28
 Viscosidad,
 cinemática, 277
 de aceites característicos, 285
 definición, 276
 unidades, 277
 Volantes,
 coeficiente de fluctuación de la velocidad,
 313
 de disco, 313, 315, 320, 321
 de llanta, 313, 314, 316, 317, 319
 descripción del funcionamiento, 313
 problemas propuestos, 317, 321
 problemas resueltos, 317, 321

LIBROS SERIE SCHAUM PUBLICADOS EN ESPAÑOL

ALGEBRA ELEMENTAL

2700 Problemas Resueltos

Por Barnett Rich, Ph.D.,

Jefe del Depto. de Matemáticas, Brooklyn Tech. H. S.

ALGEBRA LINEAL

600 Problemas Resueltos

Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,

Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

ALGEBRA MODERNA

425 Problemas Resueltos

Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Dickinson College

ALGEBRA SUPERIOR

1940 Problemas Resueltos

Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

ANALISIS NUMERICO

775 Problemas Resueltos

Por Francis Scheid, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Boston University

ANALISIS VECTORIAL

480 Problemas Resueltos

Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

CALCULO DIFERENCIAL

1175 Problemas Resueltos

Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Dickinson College

CALCULO SUPERIOR

925 Problemas Resueltos

Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

CIRCUITOS ELECTRICOS

350 Problemas Resueltos

Por Joseph A. Edminister, M.S.E.E.,

Profesor Asociado de Ingeniería Electromecánica, University of Akron

CIRCUITOS ELECTRONICOS

160 Problemas Resueltos

Por Edwin C. Lowenberg, Ph.D.,

Profesor de Ingeniería Eléctrica, University of Nebraska

DINAMICA DE LAGRANGE

275 Problemas Resueltos

Por D. A. Wells, Ph.D.,

Profesor de Física, University of Cincinnati

DINAMICA DE LOS FLUIDOS

100 Problemas Resueltos

Por William F. Hughes, Ph.D.,

Profesor de Ingeniería Mecánica, Pennsylvania State U.

DISEÑO DE MAQUINAS

320 Problemas Resueltos

Por Hall, Holowenko, Laughlin

Profesores de Ingeniería Mecánica, Purdue University

CIENCIAS DE LA INGENIERIA

1400 Ecuaciones Básicas

Por W. F. Hughes, E. W. Gaylord, Ph.D.,

Profesores de Ing. Mec., Carnegie Inst. of Tech.

ECUACIONES DIFERENCIALES

560 Problemas Resueltos

Por Frank Ayres, Jr. Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Dickinson College

ESTADISTICA

875 Problemas Resueltos

Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

FISICA GENERAL

625 Problemas Resueltos

Por Carel W. van der Merwe, Ph.D.,

Profesor de Física, New York University

FUNDAMENTOS DE MATEMATICAS SUPERIORES

1850 Problemas Resueltos

Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Dickinson College

GENETICA

500 Problemas Resueltos

Por William D. Stansfield, Ph.D.,

Depto. de Ciencias Biológicas, Calif. State Polytech.

GEOMETRIA ANALITICA

345 Problemas Resueltos

Por Joseph H. Kindle, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, University of Cincinnati

GEOMETRIA DESCRIPTIVA

175 Problemas Resueltos

Por Minor C. Hawk

Jefe Departamento de Ingeniería Gráfica,

Carnegie Inst. of Tech. *

GEOMETRIA DIFERENCIAL

500 Problemas Resueltos

Por Martin Lipschutz, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, University of Bridgeport

GEOMETRIA PLANA

850 Problemas Resueltos

Por Barnett Rich, Ph.D.,

Jefe del Depto. de Matemáticas, Brooklyn Tech. H. S.

GEOMETRIA PROYECTIVA

200 Problemas Resueltos

Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Dickinson College

INTRODUCCION A LA CIENCIA DE LAS COMPUTADORAS

300 Problemas Resueltos

Por Francis Scheid, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Boston University

LINEAS DE TRASMISION

165 Problemas Resueltos

Por R. A. Chipman, Ph.D.,

Profesor de Ingeniería Eléctrica, University of Toledo

MANUAL DE FORMULAS Y TABLAS MATEMATICAS

2400 Fórmulas y 60 Tablas

Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst. *

MATEMATICAS FINANCIERAS

500 Problemas Resueltos

Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Dickinson College

MATEMATICAS FINITAS

750 Problemas Resueltos

Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,

Profesor Asoc. de Matemáticas, Temple University

MATRICES

340 Problemas Resueltos

Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Dickinson College

MECANICA DE LOS FLUIDOS E HIDRAULICA

475 Problemas Resueltos

Por Randal V. Giles, B. S., M.S. in C.E.,

Profesor de Ingeniería Civil, Drexel Inst. of Tech.

MECANICA TECNICA

460 Problemas Resueltos

Por W. E. McLean, B.S. in E.E., M.S.,

Profesor de Mecánica, Lafayette College

y E.W. Nelson, B.S. in M.E., M. Adm. E.,

Ingeniero Supervisor, Western Electric Co.

PROBABILIDAD

500 Problemas Resueltos

Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,

Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

QUIMICA GENERAL

385 Problemas Resueltos

Por Jerome L. Rosenberg, Ph.D.,

Profesor de Química, University of Pittsburgh

RESISTENCIA DE MATERIALES

430 Problemas Resueltos

Por William A. Nash, Ph.D.,

Profesor de Ingeniería Mecánica, University of Florida

RETROALIMENTACION Y SISTEMAS DE CONTROL

680 Problemas Resueltos

Por J.J. Distefano III, A.R. Stubberud,

I.J. Williams, Ph.D.,

Departamento de Ingeniería, University of Calif., at L. A.

TEORIA DE CONJUNTOS

530 Problemas Resueltos

Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,

Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

TEORIA DE GRUPOS

600 Problemas Resueltos

Por B. Baumslag, B. Chandler, Ph.D.,

Departamento de Matemáticas, New York University

TOPOLOGIA GENERAL

650 Problemas Resueltos

Por Seymour Lipschutz, Ph.D.,

Profesor Asociado de Matemáticas, Temple University

TRASFORMADAS DE LAPLACE

450 Problemas Resueltos

Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

TRIGONOMETRIA

680 Problemas Resueltos

Por Frank Ayres, Jr., Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Dickinson College

VARIABLE COMPLEJA

640 Problemas Resueltos

Por Murray R. Spiegel, Ph.D.,

Profesor de Matemáticas, Rensselaer Polytech. Inst.

VIBRACIONES MECANICAS

225 Problemas Resueltos

Por William W. Seto, B.S. in M.E., M.S.,

Profesor Asociado de Ingeniería Mecánica,

San José State College

SCHAUM'S OUTLINE SERIES

- * **ADVANCED CALCULUS**
Including 925 Solved Problems
By Murray R. Spiegel, Ph. D.,
Professor of Math., Rensselaer Polytech.
- * **ANALYTIC GEOMETRY**
Including 345 Solved Problems
By Joseph H. Kindle, Ph. D.,
Professor of Mathematics, University of Cincinnati
- BASIC ENGINEERING EQUATIONS**
Including 1400 Basic Equations
By W. F. Hughes, E. W. Gaylord, Ph. D.,
Professors of Mech. Eng., Carnegie Inst. of Tech.
- * **CALCULUS**
Including 1175 Solved Problems
By Frank Ayres, Jr., Ph. D.,
Professor of Mathematics, Dickinson College
- * **COLLEGE ALGEBRA**
Including 1940 Solved Problems
By Murray R. Spiegel, Ph. D.,
Professor of Math., Rensselaer Polytech. Inst.
- * **COLLEGE CHEMISTRY**
Including 385 Solved Problems
Edited by Jerome L. Rosenberg, Ph. D.,
Professor of Chemistry, University of Pittsburgh
- * **COLLEGE PHYSICS**
Including 625 Solved Problems
Edited by Carel W. van der Merwe,
Ph. D., *Professor of Physics, New York University*
- COMPLEX VARIABLES**
Including 640 Solved Problems
By Murray R. Spiegel, Ph. D.,
Professor of Math., Rensselaer Polytech., Inst.
- * **DESCRIPTIVE GEOMETRY**
Including 175 Solved Problems
By Minor C. Hawk,
*Head of Engineering Graphics Dept.,
Carnegie Inst. Of Tech.*
- * **DIFFERENTIAL EQUATIONS**
Including 560 Solved Problems
By Frank Ayres, Jr., Ph. D.,
Professor of Math., Dickinson College
- DIFFERENTIAL GEOMETRY**
Including 500 Solved Problems
By Martin Lipschutz, Ph. D.,
Professor of Mathematics, University of Bridgeport
- * **ELECTRIC CIRCUITS**
Including 350 Solved Problems
By Joseph A. Edminister, M.S.E.E.,
Assoc. Prof. of Elec. Eng., University of Akron
- ELECTRONIC CIRCUITS**
Including 160 Solved Problems
By Edwin C. Lowenberg, Ph. D.,
Professor of Elec. Eng., University of Nebraska
- * **ELEMENTARY ALGEBRA**
Including 2700 Solved Problems
By Barnett Rich, Ph. D.,
Head of Math. Dept., Brooklyn Tech. H. S.
- * **ENGINEERING MECHANICS**
Including 460 Solved Problems
By W. G. McLean, B. S. in E.E., M.S.,
Professor of Mechanics, Lafayette College
and E. W. Nelson, B.S. in M.E., M. Adm. E.,
Engineering Supervisor, Western Electric Co.
- FEEDBACK & CONTROL SYSTEMS**
Including 680 Solved Problems
By J. J. Distefano III, A. R. Stubberud,
and I. J. Williams, Ph.D.,
Engineering Dept., University of Calif., at L. A.
- FINITE MATHEMATICS**
Including 750 Solved Problems
By Seymour Lipschutz, Ph. D.,
Assoc. Prof. of Math., Temple University
- * **FIRST Yr. COLLEGE MATHEMATICS**
Including 1850 Solved Problems
By Frank Ayres, Jr., Ph. D.,
Professor of Mathematics, Dickinson College
- * **FLUID DYNAMICS**
Including 100 Solved Problems
By William F. Hughes, Ph. D.,
Professor of Mech. Eng., Carnegie Inst. of Tech.
and John A. Brighton, Ph. D.,
Asst. Prof. of Mech. Eng. Pennsylvania State U.
- * **FLUID MECHANICS AND HYDRAULICS**
Including 475 Solved Problems
By Randal V. Giles, B.S., M.S. in C.E.,
Prof. at Civil Engineering, Drexel Inst. of Tech.
- GENETICS**
Including 500 Solved Problems
By William D. Stansfield, Ph. D.,
Dept. of Biological Sciences, Calif. State Polytech.
- GENERAL TOPOLOGY**
Including 650 Solved Problems
By Seymour Lipschutz, Ph. D.,
Assoc. Prof. of Math., Temple University
- GROUP THEORY**
Including 600 Solved Problems
By B. Baumslag, B. Chandler, Ph. D.,
Mathematics Dept., New York University
- * **LAPLACE TRANSFORMS**
Including 450 Solved Problems
By Murray R. Spiegel, Ph. D.,
Professor of Math., Rensselaer Polytech. Inst.
- LAGRANGIAN DYNAMICS**
Including 275 Solved Problems
By D. A. Wells, Ph. D.,
Professor of Physics, University of Cincinnati
- LINEAR ALGEBRA**
Including 600 Solved Problems
By Seymour Lipschutz, Ph. D.,
Assoc. Prof. of Math., Temple University
- * **MACHINE DESIGN**
Including 320 Solved Problems
By Hall, Holowenko, Laughlin,
Professor of Mechanical Eng., Purdue University
- * **MATHEMATICAL HANDBOOK**
Including 2400 Formulas and 60 Tables
By Murray R. Spiegel, Ph. D.,
Professor of Math., Rensselaer Polytech., Inst.
- MATHEMATICS OF FINANCE**
Including 500 Solved Problems
By Frank Ayres, Jr., Ph. D.,
Professor of Math., Dickinson College
- * **MATRICES**
Including 340 Solved Problems
By Frank Ayres, Jr., Ph. D.,
Professor of Mathematics, Dickinson College
- MECHANICAL VIBRATIONS**
Including 225 Solved Problems
By William W. Seto, B.S. in M.E., M.S.,
Assoc. Prof. of Mech. Eng., San Jose State College
- * **MODERN ALGEBRA**
Including 425 Solved Problems
By Frank Ayres, Jr., Ph. D.,
Professor of Mathematics, Dickinson College
- NUMERICAL ANALYSIS**
Including 775 Solved Problems
By Francis Scheid, Ph. D.,
Professor of Mathematics, Boston University
- * **PLANE GEOMETRY**
Including 850 Solved Problems
By Barnett Rich, Ph. D.,
Head of Math. Dept. Brooklyn Tech. H. S.
- PROBABILITY**
Including 500 Solved Problems
By Seymour Lipschutz, Ph. D.,
Assoc. Professor of Math., Temple University
- PROJECTIVE GEOMETRY**
Including 200 Solved Problems
By Frank Ayres, Jr., Ph. D.,
Professor of Mathematics, Dickinson College
- REINFORCED CONCRETE DESIGN**
Including 200 Solved Problems
By N. J. Everard, MSCE, Ph. D.,
Prof. of Eng. Mech. & Struc., Arlington State College
and J. L. Tanner III, MSCE,
Technical Consultant, Texas Industries Inc.
- * **STATISTICS**
Including 875 Solved Problems
By Murray R. Spiegel, Ph. D.,
Professor of Mathematics, Rensselaer Polytech. Inst.
- * **SET THEORY AND RELATED TOPICS**
Including 530 Solved Problems
By Seymour Lipschutz, Ph. D.,
Assoc. Prof. of Math., Temple University
- * **STRENGTH OF MATERIALS**
Including 430 Solved Problems
By William A. Nash, Ph. D.,
Professor of Eng. Mechanics, University of Florida
- TEST ITEMS IN EDUCATION**
Including 3100 Test Items
By G. J. Mouly, Ph. D., L. E. Walton, Ph. D.,
Professors of Education University of Miami
- THEORETICAL MECHANICS**
Including 720 Solved Problems
By Murray R. Spiegel, Ph. D.,
Professor of Math., Rensselaer Polytech. Inst.
- TRANSMISSION LINES**
Including 165 Solved Problems
By R. A. Chiman, Ph. D.,
Professor of Electrical Eng., University of Toledo
- * **TRIGONOMETRY**
Including 680 Solved Problems
By Frank Ayres, Jr., Ph. D.,
Professor of Mathematics, Dickinson College
- * **VECTOR ANALYSIS**
Including 480 Solved Problems
By Murray R. Spiegel, Ph. D.,
Professor of Math., Rensselaer Polytech. Inst.

* ESTOS TITULOS SE ENCUENTRAN TAMBIEN EN VERSION ESPAÑOLA



91589

